TOPOLOGIA

SPAZI METRICI

- Uno spazio metrico è una coppia (E,d) dove E è un insieme e d è una funzione DISTANZA
  - $d: E \times E \to [0, +\infty)$
    - $d(x,x)=0 \ \forall x \in E$
    - $d(x,y)=d(y,x) \ \forall x,y \in E$ (simmetria)
    - $d(x,y)+d(y,z) \geq d(x,z) \ \forall x,y,z \in E$ (disuguaglianza triangolare)
- Esempi
  - $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$
    - $n=1 \Rightarrow d(x,y)=|x-y|$
    - $n>1 \Rightarrow x=(x_1,\dots,x_n)$, $d(x,y)=|x-y|_2=\sqrt{\sum (x_i-y_i)^2}$
  - $(\mathbb{C}, |\cdot|)$
    - $d(z,\omega)=|z-\omega|$
- (E,d) s.m., $E' \subseteq E \Rightarrow (E',d)$ s.m.
- Può capitare che metriche diverse diano la stessa topologia
- Completezza
  - Uno spazio metrico è completo se tutte le successioni di Cauchy convergono

PALLE E INTORNI

- Dato (E,d) spazio metrico definiamo
  - $B_r(x)=\{y \in E \mid d(x,y)<r\}$ PALLA di centro x e raggio r
  - $A \subseteq E$ si dice INTORNO di x se $\exists r>0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$

APERTI E CHIUSI

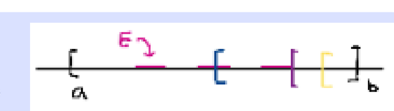
- (E,d) s.m. $A \subseteq E$ si dice APERTO se è intorno di ogni suo punto
  - cioè se $\forall x \in A \ \exists r>0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$
- A si dice CHIUSO se $E \setminus A$ è aperto
- $\mathscr{A}=\{A \subseteq E \mid A \text{ aperto}\}$, allora
  - $\varnothing, E \in \mathscr{A}$
    - Verifica diretta
  - $\{A_i\}$ famiglia di aperti, anche infinita $\Rightarrow \cup A_i \in \mathscr{A}$
    - $x \in \cup A_i \Rightarrow \exists i_1 : x \in A_{i_1} \Rightarrow \exists r>0 \ B_r(x) \subseteq A_{i_1} \subseteq \cup A_i$
  - $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{A} \Rightarrow \cap A_i \in \mathscr{A}$ (non vale per ∩ infinite)
    - $x \in \cap A_i \Rightarrow x \in A_i \ \forall i \in \{1,\dots,n\} \ \exists r>0$ tale che $B_r(x) \subseteq A_i \Rightarrow$ preso il minimo r ho $B_r(x) \subseteq \cap A_i$
- $\mathscr{C}=\{C \subseteq E \mid C \text{ chiuso}\}$, allora
  - $\varnothing, E \in \mathscr{C}$
    - Il loro complementare è aperto
  - $\{C_i\}$ famiglia di chiusi, anche infinita $\Rightarrow \cap C_i \in \mathscr{C}$
    - Il complementare è unione di aperti, quindi aperto (C_i chiuso $\forall i \Rightarrow C_i^c=A_i$ aperto $\forall i$)
  - $C_1,\dots,C_n \in \mathscr{C} \Rightarrow \cup C_i \in \mathscr{C}$ (non vale per ∪ infinite)
    - Il complementare è intersezione finita di aperti quindi è aperto

PUNTI

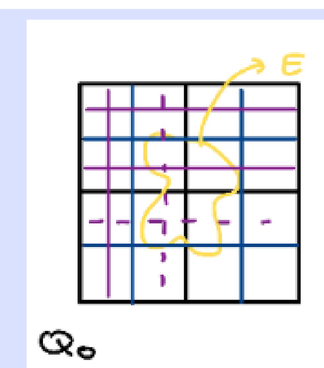
- x è INTERNO ad A $\iff \exists r>0 : B_r(x) \subset A$
  - $\mathrm{int}(A):=\{x \mid x \text{ è interno ad } A\}$
- x è ESTERNO ad A $\iff \exists r>0 : B_r(x) \subset A^c$
  - x è interno a A^c
- x è DI FROTIERA per A $\iff \exists r>0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$ e $B_r(x) \cap A^c \neq \varnothing$
  - x non è né interno né esterno ad A
  - $\delta A=\{x \mid x \text{ è di frontiera per } A\}$
- $E=\mathrm{int}(A) \cup \delta A \cup \mathrm{int}(A^c)$
- x è ADERENTE ad A $\iff \exists r>0 : B_r(x) \cap A \neq \varnothing$
  - $\bar{A}=\{x \mid x \text{ è aderente ad } A\}$ CHIUSURA di A
  - $\bar{A}=\mathrm{int}(A) \sqcup \delta A$
    - $x \in \bar{A} \iff x \notin \mathrm{int}(A^c) \iff$ tesi
  - $\bar{A}=\{x \in E : d(x,A)=0\}$ dove $d(x,A)=\inf\{d(x,a) : a \in A\}$
  - $A \subseteq E$ si dice DENSO $\iff \bar{A}=E$
    - Ad es: $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$
- x è di ACCUMULAZIONE per A $\iff \forall r>0 \ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$
  - Se x è di accumulazione per A $B_r(x)$ contiene infiniti elementi di A diversi da x
- x si dice ISOLATO se non è di accumulazione
  - $A \subseteq E$ si dice DISCRETO $\iff$ tutti i suoi punti sono isolati
    - Ad es: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

TEOREMA DI BOLZANO-WEIRSTRASS

- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ llimitato e di cardinalità infinita $\Rightarrow$ E ha punti di accumulazione
  - n=1
    - idea: restringiamo sempre di più l'intervallo



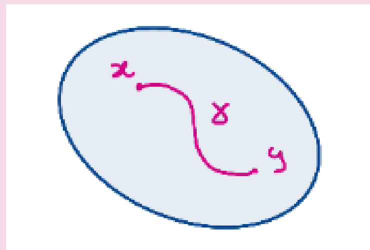
    - $E \subseteq [a,b]$, costruiamo $[a_i,b_i] \subseteq [a_{i+1},b_{i+1}]$, con $a_0=a$, $b_0=b$. Ogni intervallo è dimezzato: $|b_i-a_i|=(b-a)/2^i$ tale che $|E \cap [a_i,b_i]|=\infty$
    - $\cap [a_i,b_i]=x=\sup a_i=\inf b_i \in \mathbb{R}$. x è di accumulazione per E (anche se non è detto che $\in E$): $[a_i,b_i] \subseteq [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ DEFINITIVAMENTE
  - n>1
    - La dimostrazione è analoga



    - Anziché dividere un intervallo divido un M-cubo in 2^n cubi di lato metà e scelgo Q_1 tale che $|E \cap Q_1|=\infty \Rightarrow L_i=L_0/2^i$ lunghezza dello spigolo di Q_i
- Non è vero in spazi metrici in generale

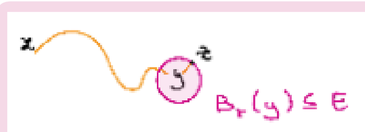
CONNESSI

- E spazio topologico si dice
  - SCONNESSO se $\exists A,B \subseteq E$ aperti $\neq \varnothing$ tali che $A \cap B=\varnothing$ e $E=A \cup B$ (cioè se ha "due pezzi")
  - CONNESSO se non è sconnesso
  - CONNESSO PER ARCHI se $\forall x,y \ \exists \gamma:[a,b] \to E$ continua tale che $\gamma(a)=x$ e $\gamma(b)=y$



Gli archi sarebbero curve

- $E \subseteq \mathbb{R}$ connesso $\iff$ E connesso per archi $\iff$ E intervallo o semiretta in $\mathbb{R}$
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ CONVESSO, cioè $\forall x,y \in E \ [x,y]=\{\lambda x+(1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subseteq E$ è connesso per archi
- E connesso per archi $\Rightarrow$ E connesso
  - Se E fosse sconnesso, $E=A \cup B$, $x \in A, y \in B$, $\gamma:[0,1] \to E$ continua tale che $\gamma(0)=x$, $\gamma(1)=y \Rightarrow \gamma([0,1]) \subseteq A \cup B=E$ è sconnesso. Assurdo, perché [0,1] è connesso e γ è continua (manda connessi in connessi)
- Vale il viceversa solo in un caso
- $E \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto connesso $\iff$ E connesso per archi
  - $x \in E$, $A=\{y \in E \mid \exists \gamma:[0,1] \to E$ continua, $\gamma(0)=x$ e $\gamma(1)=y\} \Rightarrow$ A aperto $\Rightarrow E \setminus A$ aperto $\Rightarrow E=A \cup (E \setminus A)$ connesso $\Rightarrow E \setminus A=\varnothing \Rightarrow E=A \Rightarrow$ E connesso per archi



COMPATTEZZA

- E spazio topologico (include gli spazi metrici)
  - ① E si dice COMPATTO se ogni suo RICOPRIMENTO APERTO contiene un SOTTORICOPRIMENTO FINITO
    - RICOPRIMENTO APERTO: $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ famiglia di aperti tale che $E \subseteq \cup \Omega_i$
    - SOTTORICOPRIMENTO FINITO: $\Omega_1,\dots,\Omega_n \in \{\Omega_i\}$ ricoprimento
  - ② E si dice NUMERABILMENTE COMPATTO se vale ① ∀ I indice (①⇒②)
  - ③ E si dice SEQUENZIALMENTE COMPATTO se $\forall x_n$ successione in E $\exists x_{n_i}$ SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE in E, cioè $\lim_{i\to\infty} x_{n_i}=x \in E$
- Se E è metrico ①⟺②⟺③
- E spazio metrico compatto, $F \subseteq E$ chiuso $\Rightarrow$ F spazio metrico compatto
  - $x_n \in F \Rightarrow \exists x_{n_i} \to x \in E \Rightarrow x \in F$ (perché chiuso)
- E metrico, $F \subseteq E$ compatto $\Rightarrow$ F chiuso e limitato
  - CHIUSO: se non lo fosse esisterebbe un punto di accumulazione $x_0 \notin F$ ma per compattezza troverei $x_{n_i} \to x_0 \in F$. Assurdo
  - LIMITATO: Se non lo fosse troverei una ssucc. non convergente in F. Assurdo
- $F \subset \mathbb{R}^n$ CHIUSO e LIMITATO $\Rightarrow$ F COMPATTO
  - $x_n \in F$ successione
    - $\exists x \in F$ tale che $x_n=x$ per infiniti n (frequentemente) $\Rightarrow x_{n_i} \to x \ \forall i$
    - Altrimenti $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è infinito e limitato $\Rightarrow$ per B.W. $\exists x \in \mathbb{R}^n$ pt. di acc. $\Rightarrow x_{n_i} \to x \in F$
- E spazio metrico, $F \subseteq E$ compatto infinito $\Rightarrow$ F ha un punto di accumulazione $x \in F$
  - x_n successione in F tale che $x_n \notin \{x_0,\dots,x_{n-1}\} \Rightarrow x_{n_i} \to x \in F$, $x_{n_i} \neq x \ \forall i \Rightarrow$ x è di accumulazione per F
- E spazio metrico compatto $\Rightarrow$ E completo

DEFINIZIONE

Si definisce topologia una collezione T di sottoinsiemi di un insieme X tali che:
① $\varnothing, X \in T$
② $\cup Z \in T, \ \forall Z \in T$
③ $Y \cap W \in T, \ \forall Y,W \in T$

Uno spazio topologico è una coppia (X,T), dove X è un insieme e T una topologia. In uno spazio topologico gli insiemi che costituiscono T si dicono aperti in X