SERIE

DEFINIZIONI

- SERIE — Somma formale di elementi di uno spazio vettoriale metrico V (tipicamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). La indichiamo con $\sum x_n$ (da n_0 a $+\infty$)
- SOMME PARZIALI — $S_N = \sum x_n$ (da n_0 a N)
- CONVERGENTE — $\iff S_N \to x \in \mathbb{R}$ per $N \to +\infty$
- DIVERGENTE — $\iff S_N \to \pm\infty$ per $N \to +\infty$
- NON CONVERGENTE — se non rientra in questi due casi

CRITERI DI CONVERGENZA

CRITERIO DI CAUCHY

- $\sum x_n$ converge $\iff S_N$ è di Cauchy
- $\iff \forall \varepsilon \exists n_\varepsilon$ tc $|\sum x_n| = |S_{N_2} - S_{N_1}| < \varepsilon$ $\forall N_1, N_2 \geq n_\varepsilon$

CONDIZIONE NECESSARIA

- $\sum x_n$ converge $\Rightarrow x_n \to 0$ (per $n \to +\infty$)
- Quindi se non ho la condizione necessaria so subito che la serie non converge (es: $\sum(-1)^n$)

SERIE A TERMINI POSITIVI

- $\sum x_n$ si dice a termini positivi se $x_n \geq 0$ $\forall n$. In questo caso ho due sole possibilità:
  - $\sum x_n$ converge
  - $\sum x_n$ diverge a $+\infty$
- CONFRONTO — $0 \leq x_n \leq y_n$ def. in n
  - $\sum x_n = +\infty \Rightarrow \sum y_n = +\infty$
  - $\sum y_n < +\infty \Rightarrow \sum x_n < +\infty$
- CONDENSAZIONE — $x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \sum x_n < +\infty \iff \sum 2^a \cdot x_{2^a}$
- CONFRONTO ASINTOTICO
  - $a_n \sim b_n$ per $n \to \infty$, $\sum a_n < +\infty \iff \sum b_n < +\infty$
  - ESEMPIO IMPORTANTE: $\log(n!) \sim n \cdot \log(n)$
- RAPPORTO
  - $a_{n+1}/a_n < 1$ def. in n $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$
  - $a_{n+1}/a_n > 1$ def. in n $\Rightarrow \sum a_n = +\infty$
  - $a_{n+1}/a_n = 1$ def. in n $\Rightarrow$ non posso dire niente
- RADICE
  - $\sqrt[n]{a_n} < 1$ def. in n $\Rightarrow \sum a_n < +\infty$
  - $\sqrt[n]{a_n} > 1$ def. in n $\Rightarrow \sum a_n = +\infty$
  - $\sqrt[n]{a_n} = 1$ def. in n $\Rightarrow$ non posso dire niente
- PRODUTTORIE — $\prod(1+a_n)$ converge $\iff \sum a_n$ converge

SERIE A TERMINI GENERALI

- DUE TIPI DI CONVERGENZA
  - SEMPLICE — La serie converge semplicemente se $S_N = \sum a_n$ converge per $N \to \infty$
  - ASSOLUTA — La serie converge assolutamente se la serie a termini positivi $\sum |a_n|$ converge
- $\sum a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge semplicemente
  - Non vale il viceversa
- CRITERIO DI LEIBNITZ — $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ def. in n e $a_n \to 0$ per $n \to \infty \Rightarrow \sum(-1)^n a_n$ converge semplic.
- CRITERIO DI DIRICHLET — $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tali che
  - $a_n \to 0$ per $n \to \infty$
  - a_n ha variazione limitata (basta monotona se $a_n \in \mathbb{R}$)
  - $|B_N| \leq C$ $\forall N$
  - $\sum a_n b_n$ converge semplicemente
- CRITERIO DI ABEL — $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ tali che
  - a_n ha variazione limitata (converge)
  - $\sum b_n$ converge (cioè B_N è convergente)
  - $\sum a_n b_n$ converge semplicemente
- RIORDINAMENTI
  - $\sum b_n$ è un riordinamento di $\sum a_n$ se $\exists f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $b_n = a_{f(n)}$
  - $\sum a_n$ converge assolutamente a S $\Rightarrow$ $\sum b_n$ converge assolutamente a S

SERIE DI FOURIER

- $\sum a_n \cdot \sin(nx)$, $\sum a_n \cdot \cos(nx)$ con $x \in \mathbb{R}$ fissato
- Si può applicare Dirichlet con $b_n = \sin(nx)$ oppure $b_n = \cos(nx)$

SERIE DI POTENZE

- $\sum a_n z^n$ $z \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ serie di potenze complessa
  - Vediamo per quali z converge tramite il criterio della radice
    - $|z| < R$: converge assolutamente
    - $|z| > R$: non converge
    - $|z| = R$, $z \neq R$ si applica Dirichlet
    - $z = R$ va visto a parte
  - RAGGIO DI CONVERGENZA
    - $R = 1/\lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$
    - Delinea un CERCHIO DI CONVERGENZA
  - Si può anche avere $(z-z_0)^n$ con z_0 "centro" della serie

ESEMPI

- SERIE ARMONICA — $\sum 1/n$ — diverge a $+\infty$
- SERIE ARMONICA GENERALIZZATA
  - $\sum 1/n^a$ con $a > 0$
    - diverge a $+\infty$ se $a \leq 1$
    - converge se $a > 1$
  - PARENTE STRETTO — $\sum 1/(n \cdot \log^a(n))$
    - diverge a $+\infty$ se $a \leq 1$
    - converge se $a > 1$
- SERIE GEOMETRICA — $\sum x^n$
  - $= 1/(x-1)$ se $|x| < 1$
  - $= +\infty$ se $x \geq 1$
  - non converge se $x \leq -1$
- SERIE TELESCOPICHE — $\sum(a_{n+1} - a_n) = a - a_0$

Presented with xmind