Matematica & Caos
Universita' di Pisa - A.A. 2012/2013

Matteo Di Nunno

28 novembre 2013

Cos'é il caos?

Proviamo a partire da alcune semplici domande...

- Quale legame potrá mai esserci tra la matematica e il caos?

Cos'é il caos?

Proviamo a partire da alcune semplici domande...

- Quale legame potrá mai esserci tra la matematica e il caos?
- Cos'é precisamente il caos?

Definizioni...dal passato

- Per gli antichi greci il caos ($\chi\alpha o\sigma$) era l'infinito spazio vuoto esistito prima che ogni cosa fosse creata;

Ed oggi, invece, com'é cambiata la concezione che si ha del caos?

Definizioni...dal passato

- Per gli antichi greci il caos ($\chi\alpha o\sigma$) era l'infinito spazio vuoto esistito prima che ogni cosa fosse creata;
- per i romani, invece, il concetto di caos aveva a che fare con la massa informe e primordiale nella quale il Grande Architetto del mondo introdusse ordine e armonia.

Ed oggi, invece, com'é cambiata la concezione che si ha del caos?

Al giorno d'oggi gli scienziati intendono il caos come uno stato di cose avente due ben precise proprietá:

Al giorno d'oggi gli scienziati intendono il caos come uno stato di cose avente due ben precise proprietá:

- disordine,

Al giorno d'oggi gli scienziati intendono il caos come uno stato di cose avente due ben precise proprietá:

- disordine,
- irregolaritá.

Al giorno d'oggi gli scienziati intendono il caos come uno stato di cose avente due ben precise proprietá:

- disordine,
- irregolaritá.

Al giorno d'oggi gli scienziati intendono il caos come uno stato di cose avente due ben precise proprietá:

- disordine,
- irregolaritá.

Sono proprio queste due proprietá a far entrare in gioco la matematica...

Il modello

In matematica un modello di dinamica delle popolazioni é uno strumento al tempo stesso bello e potente:

Il modello

In matematica un modello di dinamica delle popolazioni é uno strumento al tempo stesso bello e potente:
esso non é altro se non una legge che, date delle specie viventi, ci consente di predirne gli sviluppi (l'evoluzione) nel tempo.

Il modello logistico discreto

Il modello ha come obiettivo fornire la dinamica di variazione della popolazione y_n col variare del tempo; quest'ultimo é supposto discreto ossia suddiviso in intervalli con la stessa ampiezza.
Osserviamo che le dimensioni assunte da una popolazione dipendono da molti fattori tra cui

Il modello logistico discreto

Il modello ha come obiettivo fornire la dinamica di variazione della popolazione y_n col variare del tempo; quest'ultimo é supposto discreto ossia suddiviso in intervalli con la stessa ampiezza.
Osserviamo che le dimensioni assunte da una popolazione dipendono da molti fattori tra cui

- ambientali: il cibo, lo spazio, il clima, i rifornimenti;

Il modello logistico discreto

Il modello ha come obiettivo fornire la dinamica di variazione della popolazione y_n col variare del tempo; quest'ultimo é supposto discreto ossia suddiviso in intervalli con la stessa ampiezza.
Osserviamo che le dimensioni assunte da una popolazione dipendono da molti fattori tra cui

- ambientali: il cibo, lo spazio, il clima, i rifornimenti;
- rapporti: relazioni con altre specie, rapporti preda/predatore.

Le ipotesi

Ipotesi

Supponiamo che la grandezza massima assumibile dalla popolazione e sopportabile dall'ambiente sia Y.

Le ipotesi

Ipotesi

Supponiamo che la grandezza massima assumibile dalla popolazione e sopportabile dall'ambiente sia Y.

Sia y_n la popolazione al tempo n; una conseguenza della nostra ipotesi é che

$$y_n < Y \implies y_n \text{ cresce}$$
$$y_n > Y \implies y_n \text{ diminuisce}$$

Le ipotesi

Definiamo ora il rapporto $z_n = y_n/Y$ cosí da poter avere $z_n \in [0,1]$.
Il *tasso di crescita* sará dato da

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$$

ed é proprio su di esso che faremo la prossima ipotesi cruciale per la costruzione del modello.

Le ipotesi

Definiamo ora il rapporto $z_n = y_n/Y$ cosí da poter avere $z_n \in [0,1]$.
Il *tasso di crescita* sará dato da

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$$

ed é proprio su di esso che faremo la prossima ipotesi cruciale per la costruzione del modello.

Ipotesi

Supponiamo che il tasso di crescita sia proporzionale a $1 - z_n$.

Introducento quest'ultima ipotesi abbiamo voluto mettere in rilievo il legame tra la popolazione e la quantitá di risorse naturali non ancora utilizzate.

La legge costitutiva

A questo punto, posta una costante di proporzionalitá K, avremo

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_n} = K(1 - z_n)$$

ed esplicitando rispetto a z_{n+1} arriviamo finalmente alla legge che regola la dinamica:

$$z_{n+1} = z_n + Kz_n(1 - z_n) \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Semplifichiamoci...la vita

Poniamo

$$x_n = \frac{K}{1+K} z_n \qquad r = 1 + K.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{K}{1+K} z_{n+1} = \frac{K}{r}\Big(z_n + K(1 - z_n)\Big) = \\ &= \frac{K}{r} z_n + \frac{K}{r} K z_n - \frac{K}{r} K z_n^2 = r x_n - K x_n \frac{r}{K} x_n = r x_n - r x_n^2 \\ &= r x_n (1 - x_n). \end{aligned}$$

Il modello logistico discreto

Finalmente abbiamo trovato un'espressione compatta che descriva la nostra dinamica:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Sia ora la *funzione logistica*

$$f_r(x) := rx(1 - x) \qquad x \in [0,1] \quad r \in (0,4] \tag{3}$$

grazie alla quale possiamo scrivere la (2) come

$$x_{n+1} = f_r(x_n).$$

Iterate e punti fissi

Ci stiamo rapidamente avvicinando a vedere il caos in carne e ossa, ma per farlo saranno utili alcuni semplici strumenti.
Presa la funzione $f_r(x)$ una sua *iterata* é $f_r^1(x) = f_r(f_r(x))$ e piú in generale l'n-esima iterata é $f_r^n(x) = f_r(f_r^{n-1}(x))$.

Iterate e punti fissi

Ci stiamo rapidamente avvicinando a vedere il caos in carne e ossa, ma per farlo saranno utili alcuni semplici strumenti.
Presa la funzione $f_r(x)$ una sua *iterata* é $f_r^1(x) = f_r(f_r(x))$ e piú in generale l'n-esima iterata é $f_r^n(x) = f_r(f_r^{n-1}(x))$.
Preso un valore iniziale della popolazione x_0, grazie alle iterate potremo trovare ad ogni istante di tempo n il valore assunto dalla popolazione in quell'istante ossia $x_n = f_r^n(x)$.

Iterate e punti fissi

Ci stiamo rapidamente avvicinando a vedere il caos in carne e ossa, ma per farlo saranno utili alcuni semplici strumenti.
Presa la funzione $f_r(x)$ una sua *iterata* é $f_r^1(x) = f_r(f_r(x))$ e piú in generale l'n-esima iterata é $f_r^n(x) = f_r(f_r^{n-1}(x))$.
Preso un valore iniziale della popolazione x_0, grazie alle iterate potremo trovare ad ogni istante di tempo n il valore assunto dalla popolazione in quell'istante ossia $x_n = f_r^n(x)$.
Infine sará comodo utilizzare la nozione di *punto fisso* ossia di un punto x per il quale $f_r^n(x) = x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Predizioni di lungo termine

Tutte queste armi ci serviranno ad effettuare quella che gli scienziati chiamano *predizione di lungo termine*: questo significa che preso un valore iniziale x_0 riusciremo a trovare

$$x_1 = f_r^1(x_0), \ldots\ldots, x_n = f_r^n(x_0).$$

Predizioni di lungo termine

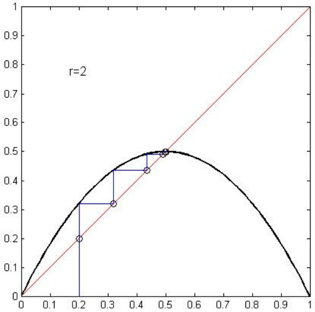
Tutte queste armi ci serviranno ad effettuare quella che gli scienziati chiamano *predizione di lungo termine*: questo significa che preso un valore iniziale x_0 riusciremo a trovare

$$x_1 = f_r^1(x_0), \ldots\ldots, x_n = f_r^n(x_0).$$

Sará molto interessante capire come il caos si nasconda e sia insito nella natura...

L'analisi

Tramite un plottaggio di tipo cobweb vediamo cosa succede ai valori assunti dalla popolazione al variare del parametro r.



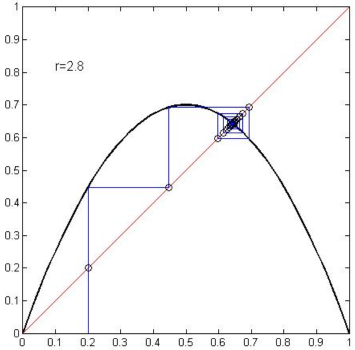
L'analisi

Nella figura precedente si osserva la presenza di due punti fissi: $\xi_0 = 0$ e $\xi_1 = 0.2$; quindi qualsiasi sia il valore iniziale x_0, con il passare del tempo potrá assumere unicamente uno di questi valori.

L'analisi

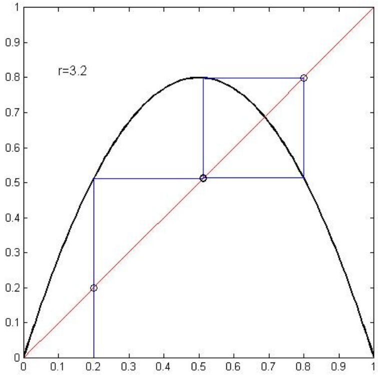
Nella figura precedente si osserva la presenza di due punti fissi: $\xi_0 = 0$ e $\xi_1 = 0.2$; quindi qualsiasi sia il valore iniziale x_0, con il passare del tempo potrá assumere unicamente uno di questi valori.
Nella figura successiva, nella quale il parametro é fissato a $r = 2.8$, si nota un comportamento non dissimile dalla precedente: il valore iniziale di popolazione $x_0 = 0.2$ tende a stabilizzarsi su $x_1 \simeq 0.6$; in particolare si noti come i valori descrivano delle spirali attorno ad x_1.

L'analisi



L'analisi

La prossima figura ci mostra un comportamento molto interessante...il sistema comincia a perdere "stabilitá"...



L'analisi

Osservando il grafico della funzione per $r = 3.2$, si notano i punti fissi $\xi_0 = 0$ e $\xi_1 \simeq 0.7$ e i valori $\xi_2 = 0.5$ e $\xi_3 = 0.8$; ogni volta che la popolazione assume valore ξ_2 automaticamente viene portata ad assumere il valor ξ_3 e viceversa.

L'analisi

Osservando il grafico della funzione per $r = 3.2$, si notano i punti fissi $\xi_0 = 0$ e $\xi_1 \simeq 0.7$ e i valori $\xi_2 = 0.5$ e $\xi_3 = 0.8$; ogni volta che la popolazione assume valore ξ_2 automaticamente viene portata ad assumere il valor ξ_3 e viceversa.
Questo significa che a lungo termine il numero di individui della specie in analisi non tenderá ad un unico valore, ma si troverá ad oscillare tra due valori distinti.

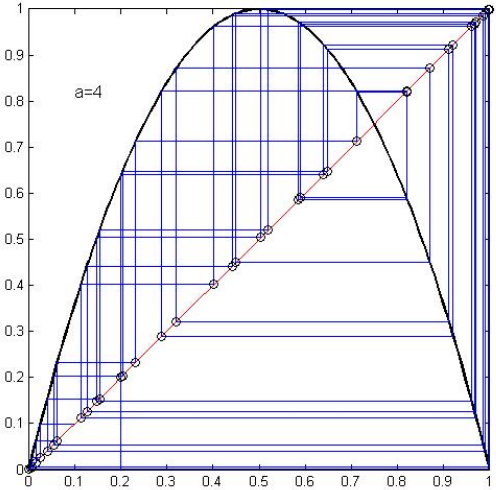
L'analisi

Cominciamo ad intuire come, al crescere del parametro r, il comportamento del modello logistico cambi: "nascono" nuovi punti fissi e cambiano i valori che la popolazione andrá ad assumere a lungo termine.

L'analisi

Cominciamo ad intuire come, al crescere del parametro r, il comportamento del modello logistico cambi: "nascono" nuovi punti fissi e cambiano i valori che la popolazione andrá ad assumere a lungo termine.
Adesso cosa ci si puó aspettare quando il parametro viene portato al suo valore massimo ossia $r = 4$?

Disordine e irregolaritá



Ecco il caos!

Il valore iniziale $x_0 = 0.2$ varia continuamente senza tendere a nessun punto particolare e tantomeno non tende a nessun punto fisso; il comportamento del sistema appare complicato e imprevedibile.

Ecco il caos!

Il valore iniziale $x_0 = 0.2$ varia continuamente senza tendere a nessun punto particolare e tantomeno non tende a nessun punto fisso; il comportamento del sistema appare complicato e imprevedibile.
Il sistema é diventato *caotico*!!!

Ecco il caos!

Il valore iniziale $x_0 = 0.2$ varia continuamente senza tendere a nessun punto particolare e tantomeno non tende a nessun punto fisso; il comportamento del sistema appare complicato e imprevedibile.
Il sistema é diventato *caotico*!!!
Ecco proprio le caratteristiche del caos: irregolaritá, imprevedibilitá, disordine.