TEORIA DELLE FUNZIONI
CORSO DEL PROF. CARLO VIOLA
UNIVERSITÀ DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DUNEZ

1. Mercoledì 26.9.2012 - Fattorizzazione di funzioni meromorfe

I seguenti risultati ci saranno utili nel presentare il metodo di Weierstrass per la fattorizzazione delle funzioni meromorfe. Ricordiamo una semplice definizione.

Definizione 1.1 (Convergenza totale). *Sia $K \subset \mathbb{C}$. Allora la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$$

converge totalmente in K se $\forall\, n\, |u_n(z)| \leq c_n$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

ossia la serie dei coefficienti converge assolutamente.

Teorema 1.1 (Mittag - Leffler). *Sia $z_1, \dots, z_n$ una successione di numeri in $\mathbb{C}$ che per comodità supporremo non nulli e tali che $z_r \neq z_s$ se $r \neq s$. Inoltre tale successione non deve possedere punto limite al finito ossia $\lim_{n\to\infty} z_n = +\infty$ e $\forall\, i\, |z_i| \leq |z_{i+1}|$.*
Sia $\{m_i\}$ una successione di numeri in $\mathbb{C}$ non nulli.
Allora esiste esiste una successione $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}$ tali che

mg

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}} \tag{1}$$

converge totalmente in ogni compatto K non contenente i z_i della prima serie. Inoltre $f(z)$ è meromorfa in $\mathbb{C}$ e i suoi poli (semplici) sono i z_n con rispettivo residuo m_n.

Dimostrazione. Bisogna associare ad ognuno dei z_n un raggio $r > 0$ centrato nell'origine, ma tale che $r_n < |z_n|\, \forall n$. Fatto questo fissiamo un n e poniamoci all'interno del disco di raggio r_n; all'interno del disco per tutti i z si ha che $|z| \leq r_n$. Notiamo che

$$|z - z_n| \geq |z| - |z_n| \geq |z| - r_n.$$

Utilizziamo queste disuguaglianze a denominatore così da ottenere delle maggiorazioni. Quindi avremo

$$\left|\frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n}.$$

Inoltre si ha che

$$\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{r_n}{|z_n|} < 1.$$

Detta $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots +$ una serie convergente di costanti positive, sia $p_n \geq 0\, \forall\, n$ un intero tanto grande da far si che

s1

$$\left(\frac{r_n}{z_n}\right)^{p_n} < \frac{\varepsilon_n}{|m_n|}(|z_n| - r_n) \tag{2}$$

dove, ricordiamo la quantità tra parentesi è strettamente positiva per costruzione. Allora per tutti gli z nel disco ossia per i quali $|z| \leq r_n$ si ha, grazie alla (2) che

$$\left|\left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n}\right| \leq \left(\frac{r_n}{z_n}\right)^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - r_n} \leq \varepsilon_n$$

con ε_n dipendente dalla scelta di p_n. Abbiamo provato la convergenza totale della serie, ma resta da mostrare che questo accade in un arbitrario compatto non contenente i z_n. Sia ora $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ un compatto. Poichè è compatto sarà chiuso e limitato. Per la limitatezza $\exists N$ tale che $|z| \leq r_N \; \forall z \in K$. Chiamiamo

$$M_n = \max_{z \in K} \left| \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \leq M_1 + \cdots + M_{n-1} + \varepsilon_n + \ldots$$

□

Osservazione 1.1. *La cosa importante da capire è che i p_i non dipendono dalla scelta del compatto.*

Teorema 1.2 (**Criterio per i** p_n)**.** *Siano $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$. Allora essi soddisfano la (2) se e solo se $\forall z \in \mathbb{C}$*

s2
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_{n+1}} < +\infty} \tag{3}$$

Dimostrazione. Partiamo dal dire che, $\forall z \in \mathbb{C}$ fissato e per ogni n tali che $|z_n| > |z|$ si ha

$$\left| \frac{z}{z_n} \right| \leq \frac{2|z|}{|z| + |z_n|} \iff \frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z| + |z_n|} \leq \frac{2|z|}{|z - z_n|}$$

quindi

$$|m_n| \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p_{n+1}} \leq 2|z| \left| \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right|.$$

Poichè z è fissato, per il teorema precedente (dato il punto z stesso è un compatto) l'ultima quantità a destra della disuguaglianza converge e quindi converge anche quella a sinistra.
Viceversa, supponiamo che ogni successione p_n che rende convergente anche la serie di Mittag - Leffler. Mostriamo che allora converge anche la (3). Fissiamo $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_n\}$ e scegliamo z_0 tale che K sia contenuto nel disco di raggio $R = |z_0|$.
Per ogni n tale che $|z_n| > |z_0| + 1$ (e ne esistono infiniti dato che $z_n \to \infty$) si ha che

dis1
$$\left| \left(\frac{z}{z_n}\right)^{p_n} \frac{m_n}{z - z_n} \right| \leq \left| \left(\frac{z_0}{z_n}\right) \right|^{p_n} \left| \frac{m_n}{z_n - z_0} \right| \leq \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|}. \tag{4}$$

Adesso osserviamo che, dato che abbiamo imposto$|z_n| > |z_0| + 1$ troviamo

$$|z_n| - |z_0| > 1 \Rightarrow \frac{|z_0|}{|z_n| - |z_0|} < |z_0| \iff \frac{|z_0|}{|z_n| - |z_0|} + 1 = \frac{|z_n|}{|z_n| - |z_0|} < |z_0| + 1 \iff$$

$$\iff \frac{1}{|z_n|} \frac{|z_n|}{|z_n| - |z_0|} < \frac{|z_0| + 1}{|z_n|} \iff \frac{1}{|z_n| - |z_0|} \leq \frac{|z_0| + 1}{|z_n|} =$$

$$= (1 + |z_0|) \frac{1}{|z_n|} = \frac{1 + |z_0|}{|z_0|} \frac{|z_0|}{|z_n|} = \left(1 + \frac{1}{|z_0|}\right) \frac{|z_0|}{|z_n|}.$$

Quindi la disuguaglianza (4) può essere ulteriormente maggiorata ossia

$$\left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n} \frac{|m_n|}{|z_n| - |z_0|} \leq \left(1 + \frac{1}{|z_0|}\right) \frac{|z_0|}{|z_n|} |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_n} = \left(1 + \frac{1}{|z_0|}\right) |m_n| \left| \frac{z_0}{z_n} \right|^{p_{n+1}}.$$

Questo conclude la dimostrazione. Abbiamo trovato che la convergenza di (3) è CNES affinchè i p_n siano buoni. □

Osservazione 1.2. *Siano γ e γ_1 due distinti cammini da* 0 *a un arbitrario z. Per il teorema dei residui, è bene ricordare, si ha*

$$\int_{\gamma} f(t)dt = \int_{\gamma_1} f(t)dt + 2\pi i R$$

dove R è la somma dei residui. Quindi $\int_{\gamma} f(t)dt$ dipende dal cammino. Al contrario

$$\exp \int_{\gamma} f(t)dt = \exp \int_{\gamma_1} f(t)dt \cdot e^{2\pi i R}$$

quindi i due integrali sono uguali dato che $e^{2\pi i R} = 1$.

Lemma 1.1. *Sia $f(z)$ meromorfa in $\mathbb{C}$ con poli tutti semplici nei punti $z_n \neq 0$ e con rispettivi residui in $\mathbb{Z}$. Allora la funzione*

$$\varphi(z) = \exp\left(\int_0^z f(t)dt\right)$$

(che non è polidroma per l'osservazione precedente) è meromorfa in $\mathbb{C}$ con zeri di molteplicità m_n nei punti z_n se $m_n > 0$ e con poli di molteplicità $|m_n|$ nei punti z_n se $m_n < 0$.

Dimostrazione. Partiamo dall'osservare che $\varphi(z)$ è olomorfa e non nulla in $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$. Resta da verificare le proprietà dei suoi poli e dei suoi zeri. Sia

$$f_1(z) = f(z) - \frac{m_1}{z - z_1}$$

ed $f(z)$ in z_1 ha un polo semplice con $\text{Res}_f(z_1) = m_1$ e di conseguenza f_1 è olomorfa in un intorno di z_1. Allora questo vale anche per

$$\exp\int_0^z f_1(t)dt$$

in tutto $\mathbb{C} \setminus \{z_2 \dots z_n\}$. Adesso

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = \exp\int_0^z f(t)dt &= \exp\int_0^z \left[f_1(t) + \frac{m_1}{z - z_1}\right] = \\
&= \exp\int_0^z f_1(t)dt \cdot \exp\int_0^z \frac{m_1 dt}{z - z_1} = \exp\int_0^z f_1(t)dt \cdot \exp(m_1 \left[\log(t - z_1)\right]_{t=0}^{t=z}) \\
&= \exp\int_0^z f_1(t)dt \cdot \exp[m_1(\log(z - z_1) - \log(-z_1))] \\
&= \left(\exp\int_0^z f_1(t)dt\right)(z - z_1)^{m_1} \exp(-m_1 \log(-z_1)) = \varphi_1(z)(z - z_1)^{m_1}.
\end{aligned}$$

L'argomento dell'ultimo esponenziale è una costante positiva che insieme all'integrale abbiamo chiamato φ_1, funzione olomorfa e non nulla. Abbiamo esplicitato da φ il fattore che in z_1 ha un polo o una radice con la molteplicità $|m_1|$ associata. □

2. MERCOLEDÌ 3.10.2012 - FORMULA DI WEIERSTRASS

Prima di arrivare alla formula di fattorizzazione di Weierstrass, premettiamo due osservazioni su quanto abbiamo già visto.

Osservazione 2.1. *Data una qualunque successione di z_i, tutti non nulli, finita o infinita (ma in questo caso senza punti limite al finito) e data una successione qualunque di interi non nulli, esiste sempre una funzione meromorfa in $\mathbb{C}$ $\varphi(z)$ avente zeri e poli nei punti della prima successione, con molteplicità data dalla seconda.*

Osservazione 2.2. *Ogni funzione $g(z)$ meromorfa in $\mathbb{C}$ è esprimibile come quoziente di due funzioni intere.*

Dimostrazione. Sia $g(z)$ meromorfa in $\mathbb{C}$ e sia $\varphi(z)$ una funzione intera costruita con i teoremi precedenti; prendiamo come zeri di $\varphi(z)$ i poli di $g(z)$. Allora $\varphi(z)g(z)$ sarà una certa funzione intera $h(z)$ e quindi possiamo scrivere

$$g(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}.$$

□

Teorema 2.1 (Weierstrass). *Sia $F(z)$ meromorfa in $\mathbb{C}$ con $z = 0$ punto non singolare ($F(0) \neq 0$). Siano $z_1, z_2, \dots$ zeri e poli di $F(z)$ tali che $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ e $\forall\, n$ sia m_n la molteplicità del punto z_n.*
Allora esiste una successione di $p_i \in \mathbb{N}$ ed esiste una funzione intera $G(z)$ tali che $\forall\, z \in \mathbb{C}$ si abbia:

$$\boxed{F(z) = e^{G(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{m_n} \exp\left(m_n \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\right]} \tag{5}$$

uniformemente convergente su ogni compatto $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_i\}$.

Dimostrazione. Con gli zeri e i poli di $F(z)$ definiamo la $f(z)$ di Mittag-Leffler e poi costruiamo

$$\varphi(z) = \exp\int_0^z f(t)dt$$

ossia

$$\varphi(z) = \exp\int_0^z \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{t-z_n}dt$$

e poichè sappiamo che la serie all'interno è uniformemente convergente (in realtà converge totalmente) possiamo scambiare la serie con l'integrale così da avere

$$\varphi(z) = \exp\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^z \left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{t-z_n}dt = \prod_{n=1}^{\infty}\exp\int_0^z \left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n}\frac{m_n}{t-z_n}dt.$$

Adesso poichè $\frac{x^{p_n}-1}{x-1} = 1+x+\dots+x^{p_n-1}$ con $x = \frac{t}{z_n}$ troviamo che

$$\frac{m_n}{t-z_n} + \left(1+\frac{t}{z_n}+\dots+\left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n-1}\right) = \frac{x^{p_n}-1}{x-1}$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}\exp\int_0^z \frac{m_n}{t-z_n} + \frac{m_n}{t-z_n}\left(\frac{\left(\frac{t}{z_n}\right)^{p_n}-1}{\frac{t}{z_n}-1}\right)dt = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\exp\int_0^z \frac{m_n}{t-z_n} + \frac{m_n}{t-z_n}\left(\frac{t}{z_n}\right)dt = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\exp\int_0^z \left(\frac{m_n}{t-z_n} + \frac{m_n}{z_n}\sum_{k=1}^{p_n}\left(\frac{t}{z_n}\right)^{k-1}\right)dt = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\exp m_n\int_0^z \frac{dt}{t-z_n} + \frac{m_n}{z_n}\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{z_n^{k-1}}\int_0^z t^{k-1}dt \qquad (6)
\end{aligned}$$

Ora osserviamo che

$$\int_0^z t^{k-1}dt = \frac{1}{k}z^k$$

$$\int_0^z \frac{dt}{t-z_n} = \log(z-z_n) - \log(-z_n) = \log\left(\frac{z-z_n}{-z_n}\right) = \log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n} + m_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right] = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{m_n}\exp\left(m_n\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right).
\end{aligned}$$

Non è finita qui: $F(z)$ e $\varphi(z)$ hanno gli stessi zeri e gli stessi poli e di conseguenza il loro rapporto $\frac{F(z)}{\varphi(z)}$ è una funzione intera e non nulla su $\mathbb{C}$. Adesso utilizziamo la derivata logaritmica per capire qualcosa in più su una generica funzione meromorfa $g(z)$. Ci servirà per terminare la dimostrazione.

Prendiamo una curva γ che eviti sia gli zeri che i poli e calcoliamoci

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

Sappiamo che $g(z) = (z-z_0)^{\pm m}\gamma(z)$ e quindi

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m(z-z_0)^{m-1}\gamma(z) + (z-z_0)^m\gamma'(z)}{(z-z_0)^m\gamma(z)} = \frac{m}{z-z_0} + \frac{\gamma'(z)}{\gamma(z)}.$$

Allora si ha che

indlog

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \begin{cases} \#\text{zeri} - \#\text{poli} \\ \frac{1}{2\pi i}[\log g(z)]_\gamma = \frac{1}{2\pi i}[\operatorname{Arg} g(z)]_\gamma \end{cases} \qquad (7)$$

Adesso, scelta una determinazione precisa del logaritmo, abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{F(z)}{\varphi(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{F(z)}{\varphi(z)} \equiv 0$$

e quindi troviamo che il rapporto delle due funzioni è una funzione intera. Allora, terminiamo ponendo

$$G(z) = \log\frac{F(z)}{\varphi(z)} \iff \frac{F(z)}{\varphi(z)} = e^{G(z)}.$$

□

Osservazione 2.3. *L'ipotesi che $F(0) \neq 0$ è necessaria solo per costruire la formula nella forma esposta, ma se $F(0) = 0$ nulla toglie che si possa sistemare tutto affinchè essa continui a valere.*

Osservazione 2.4. *Nella pratica si ha che un polo con molteplicità maggiore di 1 viene considerato come un polo semplice ripetuto il numero di volte indicato dalla sua molteplicità. Questo ci porterà a poter utilizzare, piuttosto che la precedente formula di Weierstrass, una leggermente modificata:*

w1 (8)
$$F(z) = e^{G(z)}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\exp\left(\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right)\right]$$

3. Giovedì 4.10.2012 - Ordine di funzioni intere

Definizione 3.1 (Ordine di una funzione). *Sia $F(z)$ una funzione intera su $\mathbb{C}$. Il suo ordine è definito come*

(9)
$$\alpha = \operatorname{Ord} F(z) := \inf\left\{A > 0 | F(z) \ll e^{|z|^A}, |z| \longrightarrow \infty\right\}$$

dove per $F \ll G$ intendiamo che $F = O(G)$. Inoltre

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ F(z) \ll_\varepsilon e^{|z|^{A+\varepsilon}} \iff \operatorname{Ord} F(z) \leq A.$$

Si hanno le seguenti proprietà algebriche: siano $\operatorname{Ord} F_1(z) = \alpha_1$ e $\operatorname{Ord} F_2(z) = \alpha_2$. Allora

$$\operatorname{Ord}(F_1(z) + F_2(z)) \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\} \qquad \operatorname{Ord}(F_1(z)F_2(z)) \leq \max\{\alpha_1, \alpha_2\}.$$

Esempio 3.1. *Sia $p(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ con coefficiente direttore $a_0 \neq 0$. Allora* $\operatorname{Ord} p(z) \equiv 0$ *se si ha* $|z^k| \ll_\varepsilon e^{|z|^\varepsilon}$

Esempio 3.2. *Sia $p(z)$ come sopra. Se* $\deg p(z) = n \Longrightarrow \operatorname{Ord} e^{p(z)}$ *ossia*

$$\operatorname{Ord} e^{p(z)} = n = \deg p(z).$$

Si mostra facilmente:

$$|e^{p(z)}| \leq e^{\operatorname{Re} p(z)} \leq e^{|p(z)|} \leq e^{|z|^{n+\varepsilon}}$$

Osservazione 3.1. *Se $z \longrightarrow +\infty$, poniasmo lungo una delle n semirette* $\operatorname{Arg} z = -\frac{1}{n}a_0$ *così da avere* $\operatorname{Arg}(a_0z^n) = \operatorname{Arg} a_0 + n\operatorname{Arg} z = 0$ *e questo significa che lungo tali semirette si hanno numeri in $\mathbb{R}$. Allora*

$$\operatorname{Re} p(z) - |z|^{n-\varepsilon} = \operatorname{Re}(a_0z^n) + O(|z|^{n-\varepsilon})$$

ed in definitiva si ha

$$\limsup_{z\to+\infty}\frac{|e^{p(z)}|}{e^{|z|^{n-\varepsilon}}} = \limsup_{z\to+\infty} e^{p(z)-|z|^{n-\varepsilon}} = +\infty$$

Lemma 3.1. *Sia $0 < r < R$ e sia $f(z)$ regolare in $|z - z_0| \leq R$ e non nulla. Sia $N(r)$ il numero di zeri nel disco di raggio r contati con la loro molteplicità. Allora*

stima (10)
$$\boxed{|f(z_0)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^N \max_{|z-z_0|=R}|f(z)|}$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre $z_0 = 0$ e dimostriamo il lemma per $R = 1$. Questo perchè si può avere $\tilde{f}(z) := f(Rz)$ che è regolare in $|z| \leq 1$ e ha N zeri nel disco $|z| \leq \frac{r}{R}$. Ci basterà mostrare l'asserto per $R = 1$. Siano $z_1, \ldots, z_n$ gli zeri di $f(z)$ in $|z| \leq r$ e definiamo una funzione ausiliaria

$$g(z) = f(z)\prod_{n=1}^{N}\frac{1-\bar{z}_nz}{z-z_n}$$

con il termine sotto produttoria detto Fattore di Blaschke. Da come è costruita, segue che $g(z)$ non ha poli in $|z| \leq 1$, inoltre $\forall\, n$ il fattore di Blaschke manda la circonferenza in se stessa ossia

$$|z| = 1 \Longrightarrow \left|\frac{1-\bar{z}_nz}{z-z_n}\right| = 1.$$

Adesso fissiamo n e prendiamo un $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha \neq 1$. Ci scriviamo il fattore di Blascke in modo differente:

$$\left|\frac{1-\bar{\alpha}e^{i\vartheta}}{e^{i\vartheta}-\alpha}\right| = \left|e^{i\vartheta}\frac{e^{-i\vartheta}-\bar{\alpha}}{e^{i\vartheta}-\alpha}\right| = 1$$

dato che $\overline{e^{i\vartheta}-\alpha} = e^{-i\vartheta}-\bar{\alpha}$. Sia ora $|t| \le 1$ e per il principio del massimo sappiamo che avrà un massimo sul bordo e quindi

$$|g(t)| \le \max_{|z|=1}|g(z)| = \max_{|z|=1}|f(z)|$$

quindi si avrà

$$|f(t)| = |g(t)|\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{t-z_n}{1-\bar{z}_n t}\right| \le \left(\max_{|z|=1}|f(z)|\right)\prod_{n=1}^{N}\left|\frac{t-z_n}{1-\bar{z}_n t}\right|.$$

Infine, poichè deve valere per tutti i t tali che $|t| \le 1$ varrà anche in $t=0$ e quindi

$$|f(0)| \le \left(\max_{|z|=1}|f(z)|\right)\prod_{n=1}^{N}|z_n| \le \left(\max_{|z|=1}|f(z)|\right) r^N.$$

□

Corollario 1. *Se $f(z_0) \neq 0$ allora*

stima2 (11)
$$\boxed{N \le \frac{1}{\log\frac{R}{r}}\cdot\log\left(\frac{\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|}{|f(z_0)|}\right)}$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\log|f(z_0)| \le N\underbrace{\log\frac{r}{R}}_{=-\log\frac{R}{r}} + \log\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|$$

e di conseguenza

$$-\log|f(z_0)| \ge N\log\frac{R}{r} - \log\max_{|z-z_0|=R}|f(z)| \iff$$

$$N\log\frac{R}{r} \le \frac{\log\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|}{\log|f(z_0)|}.$$

□

Teorema 3.1. *Sia $F(z)$ intera e non nulla e sia $N(r)$ il numero di zeri di $F(z)$ in $|z| \le r$. Se $\alpha =$ $\operatorname{Ord} F(z) < +\infty$ allora per $r \longrightarrow +\infty$ si ha*

$$N(r) \ll_{\varepsilon} r^{\alpha+\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon.$$

Dimostrazione. Se $F(0) \neq 0$ applico il corollario con $z_0 = 0$ ed $R = 2r$ così da avere

$$N(r) \le \frac{1}{\log 2}\log\frac{\max_{|z|=2r}|F(z)|}{F(0)}$$

ma per ipotesi $\alpha < +\infty$ quindi grazie ad una osservazione precedente abbiamo

$$\max_{|z|=2r}|F(z)| \ll_{\varepsilon} e^{(2r)^{\alpha+\varepsilon}} \Longrightarrow N(r) \ll_{\varepsilon} (2r)^{\alpha+\varepsilon} \ll_{\varepsilon} r^{\alpha+\varepsilon}$$

e questo conclude la dimostrazione. Osserviamo, comunque, che se $F(0) = 0$ con molteplicità m il corollario si applica ad $\frac{F(z)}{z^m}$ ed inoltre rimane $\operatorname{Ord}\frac{F(z)}{z^m} = \alpha$. □

4. MERCOLEDÌ 10.10.2012 - ESPONENTI DI CONVERGENZA E PRODOTTO CANONICO

Definizione 4.1 (Esponente di convergenza). *Sia $z_1, z_2, z_3 \dots$ una successione divergente tale che $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \{z_i\}_{i \in I} \neq 0 \,\forall\, i$. Si dice esponente di convergenza della successione*

$$\beta := \inf \left\{ B > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-B} < +\infty \right\} \tag{12}$$

e se $\nexists B \Longrightarrow \beta \doteq +\infty$.

Esempio 4.1. *Sia $\{x_n\} = \mathbb{N}$. Allora*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-B} < +\infty \Longrightarrow \beta > 1.$$

Diamo qui una proposizione che non dimostreremo. Ci servirà nel successivo teorema.

Proposizione 4.1. *Sia la ζ di Riemann. Se $s \in \mathbb{C}$, allora la serie converge se e solo se $\operatorname{Re} s > 1$. Inoltre nel semipiano aperto $\operatorname{Re} s > 1$ essa è uniformemente convergente e si ha*

zetapar
$$\boxed{\zeta(2s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = R_K \pi^{2K}} \tag{13}$$

Teorema 4.1. *Sia $F(z)$ intera di ordine α tale che non si annulli nell'origine. Supponiamo che la successione dei suoi zeri abbia esponente di convergenza β. Allora*

$$\beta \leq \alpha.$$

Dimostrazione. Sappiamo, grazie al teorema (3.1) che $N(r) \ll_\varepsilon r^{\alpha+\varepsilon}$; poniamo $r = |z_n|$ e di conseguenza $n = N(r) \ll_\varepsilon |z_n|^{\alpha+\varepsilon}$. Prendiamo $|z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)}$ e per esso si ha che è $\ll_\varepsilon n^{-\left(\frac{\alpha+2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\right)}$. Osserviamo che

$$\frac{\alpha + 2\varepsilon}{\alpha + \varepsilon} \longrightarrow 1 + \varepsilon$$

e quindi per la proposizione di cui sopra, avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(\alpha+2\varepsilon)} \ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} < +\infty.$$

Quindi $\beta \leq \alpha + 2\varepsilon \Longrightarrow \beta \leq \alpha$. □

Teorema 4.2. *Sia $\operatorname{Ord} F(z) < +\infty$. Allora nella formula di fattorizzazione di Weierstrass possiamo prendere per ogni z $p_n = p \,\forall\, n$.*

Dimostrazione. Siccome $\operatorname{Ord} F(z) = \alpha < +\infty$ allora anche l'esponente di convergenza β sarà un numero finito per il teorema precedente. Prendiamo $\mathbb{N} \ni p > \beta - 1$ e per la definizione di β si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} < +\infty \,\forall\, z \in \mathbb{C}$$

e questo è vero se e solo se vale la condizione (3). Questo significa che abbiamo preso il giusto p. □

Definizione 4.2 (Prodotto canonico). *Sia $F(z)$ una funzione intera di ordine finito che non si annulli nell'origine e siano $\{z_i\}_{i \in I}$ i suoi zeri. Sia fissato $\mathbb{N} \ni p \geq 0$ tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$$

. Allora $F(z)$ è fattorizzabile con quel preciso p e si definisce il prodotto canonico E come segue:

pc
$$\boxed{\begin{array}{l} F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) \\ E\left(\frac{z}{z_n}, p\right) = \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n}\right)^k \end{array}} \tag{14}$$

Osservazione 4.1. *Se $\beta \notin \mathbb{Z} \Longrightarrow p = [\beta]$ mentre se $\beta \in \mathbb{Z}$ allora possiamo scegliere $p = \beta$ oppure $p = \beta - 1$. Inoltre vi è una catena di disuguaglianze:*

$$\beta - 1 \leq p \leq \beta \leq \alpha.$$

Esempio 4.2. *Sia $\{z_n\} = n$. Allora $\beta = 1$ e di conseguenza possiamo prendere $p = \beta = 1$. Ma se $\{z_n\} = n^2$ allora*

$$\beta = \inf\left\{B > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2B} < +\infty\right\} = \frac{1}{2}$$

il quale non è intero. In questo caso siamo costretti a prendere $p = [\beta] = 0$.

5. Giovedì 11.10.2012 - Teoremi di Borel - Carathéodory e di Hadamard

Teorema 5.1 (Borel - Carathéodory). *Siano $0 < r < R$ e sia $f(z)$ una funzione regolare nel disco $|z - z_0| \le R$. Si hanno le seguenti due stime.*

bor_cat1

$$\boxed{\max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \le \frac{2r}{R-r} \max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re} f(z) + \frac{R+r}{R-r}|f(z_0)|} \tag{15}$$

Supponendo $\operatorname{Re} f(z) \ge 0$ allora $\forall\, n \in \mathbb{N}$ vale

bor_cat2

$$\boxed{\max_{|z-z_0|=r} |f(z)^{(n)}| \le \frac{2^{n+2} n! R}{(R-r)^{n+1}} \left(\max_{|z-z_0|=R} \operatorname{Re} f(z) + |f(z_0)|\right)} \tag{16}$$

Dimostrazione. Iniziamo dalla prima delle due disuguaglianze. Supponiamo che $z_0 = 0$ per semplificare i calcoli. Abbiamo due casi ossia il caso in cui la funzione è costante è quello in cui non lo è. Se $f(z) = u + iv = cost$ allora ci riduce a dover mostrare che

$$|f| = \sqrt{u^2 + v^2} \le \frac{2ru}{R-r} + \frac{R+r}{R-r}\sqrt{u^2+v^2} \iff 2r\sqrt{u^2+v^2} + 2ru \ge 0 \iff$$

$$\iff \sqrt{u^2+v^2} + u \ge 0$$

il che è banalmente vero. Adesso supponiamo che la funzione non sia costante. Chiamiamo $A \doteq \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z)$. Possiamo avere due casi.

(1) ($f(0) = 0$) Si ha $A > 0$. Definiamo

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2A - f(z)}$$

e osserviamo che è regolare su tutto $|z| \le R$ perchè è quoziente di due funzioni regolari; inoltre, si ha che

$$2A - f(z) \ge 2A - A = A > 0$$

e quindi non può annullarsi. Adesso:

$$\left|\frac{f}{2A-f}\right|^2 = \frac{u^2+v^2}{|2A - u - iv|^2} = \frac{u^2+v^2}{(2A-u)^2 + v^2} \le 1$$

perchè si ha

$$u^2 + v^2 \le (2A-u)^2 + v^2 \iff u^2 \le (2A-u)^2$$

che è evidentemente vero. Andando avanti nei calcoli troveremmo $u \le 4A^2$ che è vero perchè per costruzione A è il massimo della parte reale di f.

Quindi abbiamo un pò di informazioni: $|\varphi(z)| \le 1$ ed inoltre $\varphi(0) = f(0) = 0$ e quindi $\frac{\varphi(z)}{z}$ è regolare in $|z| \le R$. Allora in $|z| \le R$ si ha, per il principio del massimo, che

$$\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \le \max_{|z|=R}\left|\frac{\varphi(z)}{z}\right| \le \max_{|z|=R}\left|\frac{1}{z}\right| \le \frac{1}{R}.$$

Ma allora se questa stima è vera nel disco più grande $|z| \le R$ sarà certamente vera in $|z| \le r$ e si avrà $|\varphi(z)| \le \frac{r}{R}$. Adesso dobbiamo ricavare f in funzione di φ e valutarla in $|z| = R$. Si ha

$$f = \frac{2A\varphi}{1+\varphi} \qquad |f| = \frac{2A|\varphi|}{|1+\varphi|} \le \frac{2A\frac{r}{R}}{1-\frac{r}{R}}$$

dove abbiamo usato il fatto che $|1+\varphi| \ge 1 - |\varphi| \ge 1 - \frac{r}{R}$. Non resta che moltiplicare per R ed arrivare a $\frac{2Ar}{R-r}$ per concludere.

(2) ($f(0) \neq 0$)Lavoreremo con $f(z) - f(0)$. Sappiamo già che vale la stima del primo caso e otteniamo che in $|z| = r$ si ha

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r}\left(\max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(0)\right).$$

Prima di maggiorare ulteriormente osserviamo due cose:

$$|f(z)| - |f(0)| \leq |f(z) - f(0)| \qquad -\operatorname{Re} f(0) \leq |f(0)|$$

e quindi riprendendo la stima abbiamo che l'ultima quantità calcolata è

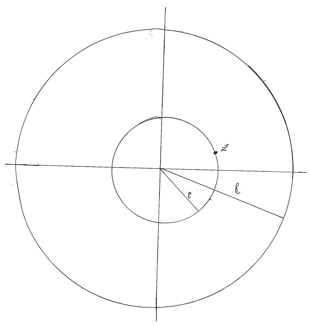
$$\leq \frac{2r}{R+r}\left(\max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|\right) \Longrightarrow |f(z)| \leq \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) + \left(\frac{2r}{R-r} + 1\right)|f(0)|$$

e con questo si dimostra la prima disuguaglianza.

Osserviamo che da quanto dimostrato segue che, poichè $2r \leq R + r$ allora $\max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z) \geq 0$. Adesso passiamo alla dimostrazione della seconda disuguaglianza. Ricordiamo che la formula integrale di Cauchy afferma che $\forall\, n$ vale

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt$$

e quindi possiamo applicarla sulla circonferenza di raggio r; prendiamo una circuitazione sceglien-



$\boxed{1}$

do ρ abbastanza piccolo. Sia, per esempio, $\rho = \frac{R-r}{2}$. Adesso su $|z| = r$ (ricordiamo che in $\mathbb{C}$ si ha $dt \leq |dt|$) si ha che

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{|f(t)|}{|t-z|^{n+1}} |dt| \leq \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{|f(t)|}{\left(\frac{R-r}{2}\right)^{n+1}} |dt|$$

dove quest'ultima quantità, ponendo che lungo γ si abbia $|f(z)| \leq L$ costante, può essere ulteriormente maggiorata come

$$\frac{n! L}{2\pi \left(\frac{R-r}{2}\right)^{n+1}} 2\pi r.$$

Ma soffermiamoci un attimo su L: si avrà $L := \max_{\tau \in \gamma} |f(z)|$, ma poichè γ tocca la circonferenza di raggio $\frac{R+r}{2}$ allora raggiungerà il suo massimo proprio in corrispondenza di $|z| = \frac{R+r}{2}$ quindi

$$L := \max_{\tau \in \gamma} |f(\tau)| = \max_{|\tau| = \frac{R+r}{2}} f(\tau).$$

Di conseguenza, per L, vale la prima delle due disuguaglianze che abbiamo già dimostrato. Quindi si ha

$$L \leq \frac{R + \frac{1}{2}(R+r)}{R - \frac{1}{2}(R+r)} \left(\max_{|\tau|=R} \operatorname{Re} f(\tau) + |f(0)|\right)$$

con il coefficiente che, moltiplicato per due, diviene minore o uguale a $\frac{4R}{R-r}$ si ricava infine che

$$\max_{|z|=r}|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!(R-r)}{2\left(\frac{R-r}{2}\right)^{n+1}} \cdot \frac{4R}{R-r}\left(\max_{|z|=R}\operatorname{Re} f(z) + |f(0)|\right)$$

e con il coefficiente che diventa

$$\frac{n!2^{n+2}}{(R-r)^{n+1}}$$

abbiamo terminato la dimostrazione. □

Teorema 5.2 (**Hadamard**). *Sia $F(z)$ una funzione intera, di ordine finito α e tale che $F(0) \neq 0$. Sia $p \ge 0$ il più piccolo intero tale che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$$

dove i $\{z_i\}$ sono gli zeri di $F(z)$. Allora $F(z)$ ammette fattorizzazione di Weierstrass e in particolare la funzione $G(z)$ è un polinomio di grado $\nu \doteq [\alpha]$.

Dimostrazione. = Dimostrare l'asserto è del tutto equivalente a dimostrare che $G^{(\nu+1)}(z) = 0$. Se questo accade allora anche quelle successive saranno nulle. Adesso, fissata una determinazione precisa del logaritmo, applichiamolo alla formula di fattorizzazione. Si ha

$$\log F(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right].$$

Si ha adesso che

$$\begin{aligned}\frac{d^{\nu+1}}{dz^{\nu+1}}\log F(z) &= \frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{d}{dz}\log F(Z)\right) = \frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{F'(z)}{F(z)} \\ &= G^{(\mu+1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{\frac{-1}{z_n}}{1-\frac{z}{z_n}}\right) = G^{(\nu+1)}(z) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

ma osserviamo che

$$\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{(-1)^\nu \nu!}{(z-z_n)^{\nu+1}} = \frac{-\nu!}{(z_n-z)^{\nu+1}}$$

Si noti, in particolare, che poichè $p \le \beta \le \alpha \Longrightarrow p \le \nu$ e di conseguenza le derivate fino all'ordine ν della somma da 1 a p sono nulle. Ecco, anche, il motivo per cui p si sceglie il più piccolo possibile. Quindi ora la situazione è la seguente:

$$G^{(\nu+1)}(z) - \nu!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}} = \frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{F'(z)}{F(z)}.$$

Definiamo, per $R > 0$ la funzione

$$\varphi_R(z) := \frac{F(z)}{F(0)}\prod_{|z_n|\le R}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)^{-1}$$

Osserviamo che

$$\left|1-\frac{z}{z_n}\right| \ge \frac{|z|}{|z_n|} - 1 \ge 1$$

perchè stiamo lavorando in modo tale da avere $\frac{|z|}{|z_n|} \ge 2 \iff |z| \ge 2|z_n|$ e se $|z| = 2R$ allora $2R \ge 2|z_n|$ ossia, appunto, $R \ge |z_n|$. Quindi, data la nostra supposizione che $|z| = 2R$ abbiamo che

$$|\varphi_R(z)| \le \frac{|F(z)|}{|F(0)|} \ll_\varepsilon e^{(2R)^{\alpha+\varepsilon}} \text{ per } R \to +\infty.$$

Si ha quindi che, dove l'abbiamo definita, $\varphi_R(z)$ è intera e poichè la stima di qui sopra vale per $|z| = 2R$ allora varrà anche per $|z| \le R$ e inoltre φ non si annulla mai in tale disco.
Sia ora $\psi_R(z) := \log\varphi_R(z)$ (che non ha diramazioni perchè φ non ha poli e non ha zeri dove è definita) e lo prendiamo in modo tale da avere la determinazione del logaritmo principale (ossia con argomento in $[-\pi,\pi)$). Quindi $\psi_R(z)$ è olomorfa nel disco $|z| \le R$ e inoltre

$$\operatorname{Re}\psi_R(z) = \log|\varphi_R(z)| \ll_\varepsilon R^{\alpha+\varepsilon}.$$

Adesso notiamo che $\varphi_R(0) = 1$ e quindi per il principio del massimo si ha $\max_{|z|\le R}|\varphi_R(z)| \ge 1 \Rightarrow \max_{|z|\le R}\log|\varphi_R(z)| > 0$. Ma $\log|\varphi_R(z)| = \operatorname{Re}\psi_R(z) \Rightarrow \max_{|z|\le R}\operatorname{Re}\psi_R(z) \ge \operatorname{Re}\psi_R(0) = 0$. Adesso possiamo applicare a $\psi_R(z)$ la seconda disuguaglianza di Borel - Carathéodory con $r=\frac{R}{2}$ e $n=\nu+1$ così da avere

$$\max_{|z|=\frac{R}{2}}\left|\psi_R^{(\nu+1)}(z)\right|\le\frac{2^{\nu+3}(\nu+1)!R}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu+2}}\left(\max_{|z|=\frac{R}{2}}\operatorname{Re}\psi_R(z)+|\psi_R(0)|\right)$$

$$\ll_{\varepsilon,\nu}\frac{R}{\left(\frac{R}{2}\right)^{\nu+2}}R^{\alpha+\varepsilon}\ll R^{\alpha+\varepsilon+1-\nu-2}=R^{\alpha-\nu+\varepsilon-1}. \tag{18}$$

Come utilizziamo questa informazione? Sapevamo che

$$G^{(\nu+1)}(z)=\frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{F'(z)}{F(z)}+\nu!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}=$$
$$=\frac{d^\nu}{dz^\nu}\frac{F'(z)}{F(z)}+\nu!\sum_{|z_n|\le R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}+\nu!\sum_{|z_n|>R}\frac{1}{(z_n-z)^{\nu+1}}$$

e adesso scopriremo che i primi due addendi sono uguali a

$$\psi_R^{(\nu+1)}(z)=\frac{d^{\nu+1}}{dz^{\nu+1}}\left(\log\varphi_R(z)\right)=\frac{d^{\nu+1}}{dz^{\nu+1}}\left[\log F(z)-\log F(0)-\sum_{|z_n|\le R}\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\right]=$$
$$=\frac{d^{\nu+1}}{dz^{\nu+1}}\frac{F'(z)}{F(0)}-\sum_{|z_n|\le R}\frac{-\nu!}{(z_n-z)^{\nu+1}}$$

e quindi adesso possiamo continuare il discorso all'infinito osservando che

$$\left|G^{(\nu+1)}\right|\ll_{\varepsilon,\nu}R^{\alpha-\nu+1+\varepsilon}+\sum_{|z_n|>R}|z_n-z|^{-(\nu+1)}\le R^{\alpha-\nu+1+\varepsilon}+\sum_{|z_n|>R}|z_n|^{-(\nu+1)}$$

dove l'ultima stima è stata possibile perchè $|z|\le\frac{R}{2}$ e quindi

$$|z_n-z|\ge|z_n|-|z|\ge|z_n|-\frac{R}{2}>|z_n|-\frac{|z_n|}{2}=\frac{|z_n|}{2}.$$

Ora, per $R\to\infty$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^{-(\nu+1)}<+\infty$$

perchè $p\le\nu$; ne consegue che avrà code convergenti e quindi la sua parte (ossia il nostro terzo addendo di prima) con $|z_n|>R$ è nulla. Infine, poichè $\beta-1\le p\le\beta\le\alpha$, si ha che $\alpha-\nu=\alpha-[\alpha]<1$ e quindi, per ε piccolo si ha che $R^{\alpha-\nu+1-\varepsilon}\longrightarrow 0\iff\left|G^{(\nu+1)}\right|=0.$ □

6. Mercoledì 17.10.2012 - Ordine del prodotto canonico

A questo punto del corso, abbiamo visto, con il teorema di Hadamard, che $G(z)$ è un polinomio e $\partial G\le\alpha$. Chiameremo, da qui in poi, $\partial G:=q$. Adesso ci chiediamo che ordine abbia il prodotto canonico e lo scopriamo attraverso il seguente teorema.

Teorema 6.1. *Il prodotto canonico è una funzione intera di ordine β.*

Dimostrazione. Si tratta di dimostrare che, per la definizione di ordine di una funzione, deve valere la seguente formula.

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\ll_\varepsilon e^{|z|^{\beta+\varepsilon}}.$$

Passiamo ai logaritmi così da ridurci ad avere

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right|\ll_\varepsilon|z|^{\beta+\varepsilon}$$

Dividiamo adesso la dimostrazione in due parti.

(1) (Caso $\left|\frac{z}{z_n}\right|\le\frac{1}{2}$) In questo disco, definito dopo aver fissato z si ha che

$$\operatorname{Re}\log\left|E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right|\le\left|\log E\left(\frac{z}{z_n},p\right)\right|=\left|\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right)+\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k\right|$$

ed osserviamo che il logaritmo prima della serie è esprimibile in serie di Taylor perchè, per ipotesi, siamo in un disco $|z| \leq 1$ mentre il raggio di convergenza della funzione $\log(1-x)$ è pari a 1. Si ha, in generale, che

$$\int_0^x \frac{dz}{1-z} = [-\log(1-z)]_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

Tornando alla dimostrazione, si ha

$$\left| -\sum_{k=1}^{\infty} + \sum_{k=1}^{p} \right| = \left| -\sum_{k=1}^{p} - \sum_{k=p+1}^{\infty} + \sum_{k=1}^{\infty} \right| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left| -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \left| \frac{z}{z_n} \right|^k \leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} \left(1 + \left| \frac{z}{z_n} \right| + \left| \frac{z}{z_n} \right|^2 + \cdots + \right)$$
$$\leq \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 2 \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1}$$

Di conseguenza si ha

$$\sum_{|z_n| \geq 2|z|} \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p \right) \right| \leq 2|z|^{p+1} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} |z_n|^{-(p+1)} \leq 2|z|^{p+1} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(p+1)}$$

dove l'ultima serie è convergente proprio perchè, per ipotesi, p è stato scelto per questo. Infine il tutto può essere stimato come $\ll_\varepsilon |z|^{p+1}$. Adesso, poichè avevamo $\beta - 1 \leq p \leq \beta \Rightarrow \beta \leq p+1$, si possono avere due casi.

(a) ($\beta = p+1$) Si ha

$$\sum_{|z_n| \geq 2|z|} \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p \right) \right| \ll |z|^{\beta}$$

e quindi concludiamo.

(b) ($\beta < p+1$) Scegliamo ε tale che $\beta + \varepsilon < p+1$. Adesso abbiamo che

$$\sum_{|z_n| \geq 2|z|} \log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p \right) \right| \leq 2|z|^{p+1} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} |z_n|^{-(p+1)} |z|^{\beta+\varepsilon} |z|^{-(\beta+\varepsilon)}$$
$$\leq 2|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n| \geq 2|z|} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p+1} |z|^{-(\beta+\varepsilon)}.$$

Adesso, poichè $p+1-\beta-\varepsilon > 0$ e che stiamo sommando su $|z_n| \geq 2|z|$ possiamo stimare tutto così:

$$\frac{2|z|^{\beta+\varepsilon}}{2^{p+1-\beta-\varepsilon}} \underbrace{\sum_{|z_n| \geq 2|z|} |z_n|^{-(\beta+\varepsilon)}}_{\leq cost} \ll_\varepsilon |z|^{\beta+\varepsilon}.$$

Questo perchè $\beta + \varepsilon$ è maggiore di p e quindi la serie non dipende da z, ma da ε.

(2) ($\left| \frac{z}{z_n} \right| > \frac{1}{2}$) Adesso non siamo più nel disco ma nel resto del piano complesso e di conseguenza non possiamo più effettuare sviluppi in serie di Taylor. Cerchiamo di superare la cosa con maggiorazioni diverse:

$$\log \left| E\left(\frac{z}{z_n}, p \right) \right| \leq \log \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \leq \log \left| 1 - \frac{z}{z_n} \right| + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Re} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k \leq$$
$$\leq \log \left(1 + \left| \frac{z}{z_n} \right| \right) + \sum_{k=1}^{p} \left| \frac{z}{z_n} \right|^k$$

dove l'ultima quantità è tale che

$$\ll_\varepsilon \begin{cases} \left| \frac{z}{z_n} \right|^{\varepsilon} & p = 0 \\ \left| \frac{z}{z_n} \right|^{p} & p \geq 1 \end{cases}.$$

Se $p = 0$ allora

$$\begin{aligned}\sum_{|z_n|\le 2|z|} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| &\le |z|^{\varepsilon} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon} = |z|^{\varepsilon}|z|^{\beta} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-\varepsilon}|z|^{-\beta} \\ &\le |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \le \\ &\le \left[|z| < \frac{|z_n|}{2} \Rightarrow |z|^{-\beta} < \frac{|z_n|^{-\beta}}{2^{-\beta}} = 2^{\beta}|z_n|^{-\beta}\right] \le \\ &\le 2^{\beta}|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \le 2^{\beta}|z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(\beta+\varepsilon)} \ll_{\varepsilon} \\ &\ll_{\varepsilon} |z|^{\beta+\varepsilon}\end{aligned}$$

Se $p \ge 1$, ricordando che $\beta + \varepsilon > p$ si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \log\left|E\left(\frac{z}{z_n}, p\right)\right| &\ll |z|^{p} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-p} = |z|^{\beta+\varepsilon} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z|^{-(\beta+\varepsilon-p)}|z_n|^{-p} \\ &\le 2^{\beta-p+\varepsilon} \sum_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-p-\beta-\varepsilon+p} \le (\text{perchè} \beta+\varepsilon > p) \le \\ &\le 2^{\beta-p+\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-p-\beta-\varepsilon+p} \ll_{\varepsilon} |z|^{\beta+\varepsilon}.\end{aligned}$$

Infine abbiamo che $\operatorname{Ord} F \le \beta$ ma l'esponente di convergenza sappiamo che deve essere minore di β: da qui ne deduciamo che

$$\beta \le \operatorname{Ord} F \le \beta \Longrightarrow \operatorname{Ord} F = \beta.$$

□

Corollario 2. *Sia $F(z)$ una funzione intera di ordine α, siano z_n gli zeri con esponente di convergenza β. Sia $\partial G(z) = q$ e p il più piccolo intero tale che $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-(p+1)} < +\infty$. Allora*

$$\alpha = \max\{\beta, q\}.$$

Dimostrazione. Sappiamo già che $\beta \le \alpha$ e per il teorema di Hadamard che $q \le \alpha$. Questo implica che $\max\{\beta, q\} \le \alpha$.
Ma poichè $\partial G(z) = q$ allora $\partial(e^{G(z)}) = q$, inoltre, come abbiamo appena visto, il prodotto canonico ha $\operatorname{Ord} E = \beta$. Di conseguenza il prodotto di due funzioni di ordine q e β avrà ordine $\alpha \le \max\{\beta, q\}$. Allora vale l'uguaglianza. □

7. Giovedì 18.10.2012 - Formula di fattorizzazione del seno di Eulero

Studieremo la fattorizzazione del seno di Eulero ossia della funzione

$$F(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}. \tag{19}$$

La funzione in questione è intera anche se c'è il termine $\frac{1}{\pi z}$ perchè perchè viene compensato dallo zero di $\sin \pi z$ in 0. Dalla formula di Eulero si ricava

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e si vede che poichè è somma di funzioni con ordine ≤ 1 allora $\operatorname{Ord} \sin z \le 1$.
Dal fatto che $\sin z$ si annulla in $z = k\pi$ allora $\sin \pi z$ lo farà per $z = k \in \mathbb{Z}$ e di conseguenza avremo l'esponente di convergenza $\beta \equiv 1$. Quindi

$$\alpha = 1 = \beta = \max\{1, q\}.$$

Infine dobbiamo capire il valore di $\partial G(z) = q$. Sceglieremo p in modo tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} < +\infty \text{ con } p > 0 \Longrightarrow p = 1.$$

Da adesso in poi supporremo $q < p$. Sviluppiamo i calcoli

$$\log F(z) = G(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^{k}\right]$$

posizionandoci in un intorno dell'origine in un disco con raggio al più uguale al primo degli zeri della funzione; di conseguenza $\left|\frac{z}{z_n}\right| < 1$ e quindi si può sviluppare in serie di Taylor il $\log(1-x)$. Sviluppando e sostituendo si ha

$$G(z) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{z_n}\right)^k$$

ma noi sappiamo, per il teorema di Mittag-Leffler, che la serie converge e quindi possiamo scambiare le somme ed avere

$$G(z) - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k}|z|^k \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-k} \Longrightarrow G(z) = \log F(z) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k} z^k \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{-k}.$$

Adesso sviluppiamo il logaritmo

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right] + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k}|z|^k \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{-k}.$$

Ora va osservato che tutti i termini con ordine di derivazione superiore o uguale a q sono nulli per il teorema di Hadamard, inoltre siamo nell'ipotesi che $q < p$ e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_n^{-k} = 0$$

e di conseguenza troviamo

$$G(z) = \log F(0) + \sum_{k=1}^{q} \frac{z^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \frac{F'(z)}{F(z)}\right]\Bigg|_{z=0}.$$

Infine $G(z) = \log F(0) + z\frac{F'(0)}{F(0)} = 0$ perchè $F(0) = 1 \Rightarrow \log F(0) = 0$ e $F'(0) = 0$m, quindi la fattorizzazione sarà

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Finalmente possiamo dire che

sine

$$\boxed{\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)} \tag{20}$$

Questa scrittura della funzione seno di Eulero non è fine a se stessa. Essa ci sarà utile per avere informazioni sul comportamento della ζ di Riemann sui numeri pari. Applichiamo la funzione logaritmo al nostro prodotto infinito:

$$\log \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \log\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right) = \log \sin \pi z - \log z - \log \pi.$$

Adesso deriviamo nella variabile z osservando che:

$$\pi \cot \pi z = \frac{\pi}{\tan \pi z} = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

e quindi

$$\pi \cot \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\frac{2z}{n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}\right) = -2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} \Rightarrow (\text{ diviso per -2 }) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2} \cot \pi z = z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{1-\frac{z^2}{n^2}}.$$

Ora si osservi che se $|z| < 1$ allora il termine all'interno della somma è il limite di una serie geometrica e che per il teorema di Mittag - Leffler è possibile, in questo caso, scambiare l'ordine di somma: quindi abbiamo

$$z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^{2h}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{2h+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2h+2}} = (\text{ con } k = h+1) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{2k-1} \zeta(2k)$$

e di conseguenza troviamo lo sviluppo in serie di Taylor della derivata del logaritmo del seno di Eulero in $|z| < 1$ cioè

sinzet (21)
$$\boxed{\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = \frac{1}{(2k-1)!}\left[\left(\frac{d}{dz}\right)^{2k-1} \frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot\pi z\right]_{z=0}}$$

con $k \in \mathbb{N}$. Ma questa espressione non è molto maneggievole e quindi cercheremo una forma diversa dello sviluppo di Taylor.

8. I numeri di Bernoulli

Definizione 8.1 (**Numeri di Bernoulli**). *sono detti tali i numeri*

ber1 (22)
$$\boxed{B_n := \left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{z}{e^z-1}\right]_{z=0}.}$$

Osserviamo che
$$e^z - 1 = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots = z\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \frac{e^z-1}{z} = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots$$
e quindi è una funzione intera e la sua reciproca è regolare in 0 e meromorfa in $\mathbb{C}$ con poli in $z = \log 1 = 2k\pi i$ e $k = \pm 1, \pm 2, \dots$.
Gli zeri più vicini all'origine sono $z_0 = \pm 2\pi i$ e di conseguenza si ha che in $|z| < 2\pi$ lo sviluppo in serie di Taylor della funzione sarà, per come sono definiti i numeri di Bernoulli, il seguente:

ber2 (23)
$$\boxed{\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.}$$

Osservazione 8.1. *La funzione di cui abbiamo dato lo sviluppo di Taylor è pari. Lo si vede dal fatto che:*
$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{-z}{e^{-z}-1} - \frac{z}{2} \ \forall z \in \mathbb{C}$$
e questo è vero perchè
$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{e^{-z}-1} = -n \Longleftrightarrow \frac{1}{e^z-1} + \frac{1}{e^{-z}-1} = -1 \Longleftrightarrow \frac{e^z-1+e^{-z}-1}{(e^z-1)(e^{-z}-1)} = -1$$
ma $2 - e^z - e^{-z} = -(e^z + e^{-z} - 2)$ *e quindi la funzione è pari.*

Osservazione 8.2. $B_0 = 0$.

Ma allora da queste valutazioni ne deriva che
$$\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n + \frac{z}{2} = 1 + (B_1 + \frac{1}{2})z + \frac{B_2}{2} z^2$$
avrà solo i termini pari ossia che
$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad B_{2k+1} \equiv 0.$$
Quindi adesso vorremmo trovare una espressione compatta per i termini pari. Si ha che
$$1 = \frac{e^z-1}{z}\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n =$$
$$= \left(1 + B_1 z + \frac{B_2}{2} z^2 + \frac{B_3}{3!} z^3 + \dots\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{(n-k)!k!}\right) z^{n-1} \equiv 1.$$
Osserviamo che abbiamo potuto moltiplicare i termini delle due serie alla Cauchy perchè le sapevamo convergenti. Adesso, poichè abbiamo visto che $B_0 = 0$ allora anche i successivi saranno tutti nulli e quindi
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_n}{(n-k)!k!} = 0 \Longrightarrow \forall\, n \geq 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \Longrightarrow B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

che vale per tutti gli n tranne per $n = 1$ perchè altrimenti avremmo $\frac{1}{2}$ invece di $-\frac{1}{2}$. Con qualche altro passaggio arriveremo ad una formula ricorsiva per i numeri di Bernoulli. Si ha

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}B_k + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0 \iff \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}B_k + nB_{n-1} = 0 \iff$$

ber3 (24)
$$\boxed{B_{n-1} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}B_k \quad \forall\, n \geq 2.}$$

Diamo qui i primi numeri di Bernoulli:

$$B_0 = 0 \quad B_1 = -\frac{1}{2} \quad B_2 = \frac{1}{6} \quad B_3 = 0 \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad B_8 = -\frac{1}{30} \quad B_{10} = \frac{5}{66}$$
$$B_{12} = -\frac{691}{2730} \quad B_{14} = \frac{7}{6} \quad B_{16} = -\frac{3617}{510}.$$

Torniamo adesso alla funzione $\frac{1}{2z} + \frac{\pi}{2}\cot\pi z$ econsideriamo per il momento solo $\cot z$. Sappiamo che i numeri complessi sono scrivibili come $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ e di conseguenza si ha che

$$\begin{cases}\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\end{cases} \implies \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} = i + \frac{2i}{e^{2iz}-1} = i + \frac{1}{z}\frac{2iz}{e^{2iz}-1} =$$
$$= i + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(2iz)^n = i + \frac{1}{z}\left(1 - iz + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k}\right) =$$
$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}2^{2k}z^{2k-1} \qquad |z| < \pi.$$

Allora la funzione $\cot\pi z$, per $|Z| < 1$ si potrà scrivere come

$$\cot\pi z = \frac{1}{\pi z} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{B_{2k}}{(2k)!}2^{2k}(\pi z)^{2k-1};$$

Adesso moltiplichiamo per $\frac{\pi}{2}$ e cambiamo segno così da avere

$$\frac{1}{2z} - \frac{\pi}{2}\cot\pi z = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}z^{2k-1}$$

che sappiamo essere uguale a

$$\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)z^{2k-1}.$$

La morale è che

zpari (25)
$$\boxed{\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}}$$

9. Mercoledì 24.10.2012 - Analisi asintotica per B_{2k} e formula di Stirling

Adesso che abbiamo una formula compatta per esprimere il valore della ζ di Riemann sui pari, sarà particolarmente proficuo analizzarne il contenuto intrinseco. Va detto che, se letta verso destra, essa da informazioni di carattere aritmetico ossia, in particolare, ci suggerisce che i valori azzunti da $\zeta(2k)$ sono il prodotto di un numero razionale per uno trascendente ossia un multiplo di 2π. D'altro canto, leggerla in senso opposto è ciò che a noi interessa maggiormente perchè questo ce ne fa trarre informazioni di carattere analitico non autoevidenti. Si ha, invertendo la zpari (25):

$$(-1)^{k-1}B_{2k} = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k).$$

Questa scrittura ci permette di notare che:

(1) i segni si alternano;
(2) è possibile effettuare uno studio di tipo asintotico.

Prima di avventurarci in quest'ultimo, mostriamo un risultato di natura...culturale.

Proposizione 9.1. *Dato $B_2 = \frac{1}{6}$, si ha*

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dimostrazione. Il tutto passa dal calcolo di un particolare integrale doppio: ipotizzeremo di trovarci nel primo quadrante così da poter inizialmente scrivere la funzione intgranda come serie.

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = \int_0^1\int_0^1 \sum_{h=0}^{\infty}(xy)^h dxdy = \sum_{h=0}^{\infty}\int_0^1 x^h dx \int_0^1 y^h dy = \sum_{h=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^h dx\right)^2 =$$
$$= \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{h+1}\right)^2 = (h+1=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-2} = \zeta(2).$$

Adesso calcoliamo il tutto secondo una diversa procedura, prima di farlo cambiamo variabili:

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = u + v \end{cases}.$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dxdy}{1-xy} = 2\iint_Q \frac{dudv}{1-u^2+v^2} = 4\iint_T \frac{dudv}{1-u^2+v^2} =$$
$$= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}} du \int_0^u \frac{dv}{1-u^2+v^2} + \int_{\frac{1}{2}}^1 du \int_0^{1-u} \frac{dudv}{1-u^2+v^2}\right) =$$
$$= \left(\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dv}{1-u^2+v^2} = \frac{1}{1-u^2}\int \frac{dv}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)^2} \Rightarrow\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)\right) \Rightarrow =$$
$$= 4\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right]\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\arctan\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right]\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

Adesso cambiamo ancora variabile: sia $u = \sin t$ così da poter avere

$$\arctan\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right) = t \Longrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt = \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{36}.$$

Si osservi la seguente formula:

$$\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1-2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

□

Adesso nel secondo integrale poniamo $u = \sin\alpha$; i valori saranno tali che $\frac{1}{2} \le u \le 1 \iff \frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Allora abbiamo

$$\int \arctan\left(\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)d\alpha = \int \arctan(\tan\alpha)d\alpha = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha.$$

Adesso chiamiamo $\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} = t$ e quindi si avrà $d\alpha = -2dt$. Per $\alpha = \frac{\pi}{6}$ si ha $t = \frac{\pi}{6}$ e per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ si ha $t = 0$. Abbiamo in definitiva:

$$4\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} t\,dt\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Passiamo ora allo studio asintotico dei numeri di Bernoulli di indice pari: ci sarà utile la formula di Stirling. Dimostreremo che

stirling

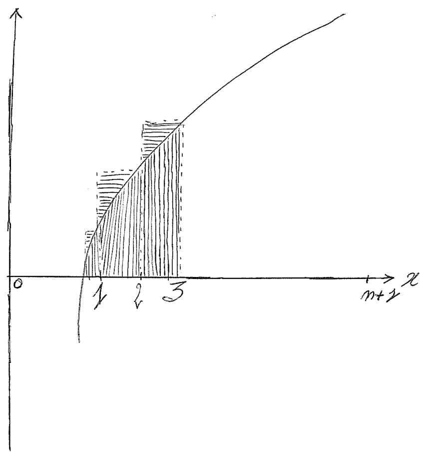
$$\boxed{\begin{gathered} n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \log n! \simeq n\log n - n + \frac{1}{2}\log n + \log\sqrt{2\pi} + \log\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{gathered}} \qquad (26)$$

Inoltre il termine asintotico O può essere arbitrariamente precisato.

Dimostrazione. Poichè $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots \Rightarrow \log n! = \log 1+\log 2+\log 3+\ldots$ e quindi si tratta di stimare

$$\sum_{k=1}^{n} \log k.$$

L'approssimazione che faremo sarà esplicata da un esempio: $\log 3$ non sarà stimato con la stima superiore e quella inferiore nel rettangoloide $2-3$ ma in quello $2,5-3,5$. Sia $k \in \mathbb{N}$. Si ha



$\boxed{2}$

$$\begin{aligned}\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} [\log(k+x)+\log(k-x)]dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \log(k^2-x^2)dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left[k^2\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right]dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left[\log k^2 + \log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\right]dx = \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \log k dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)dx = 2\frac{1}{2}\log k + \int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)dx =\end{aligned}$$

adesso siamo arrivati ad avere

$$\log k = \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx + R_k \qquad R_k := -\int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)dx.$$

Per $0 \le x \le \frac{1}{2}$ la funzione integranda di R_k è $\le \frac{1}{4k^2}$; se $k \le 1$ si ha anche che essa è $\le \frac{1}{4}$ ossia $-\log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) \le \frac{1}{4}$ e quindi possiamo sviluppare il logaritmo in serie di Taylor. Ma l'integrazione è effettuata tra 0 e $\frac{1}{2}$ e di conseguenza

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right) dx = O\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} dx = O\left(\frac{1}{2}\right).$$

Adesso

$$\log n! = \sum_{k=1}^{n} \log k = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \log x dx + \sum_{k=1}^{n} R_k = \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x dx + \dots$$

dove l'ultima uguaglianza è lecita a causa della linearità dell'integrale. Osserviamo che

$$\sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{2}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{2}\right) < +\infty$$

perchè si tratta proprio di $\zeta(2)$. A questo punto possiamo riscrivere tutto come un oggetto meno un certo resto:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x dx + \sum_{k=1}^{\infty} R_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} R_k$$

con la prima sommatoria posta C_1 e la seconda che asintoticamente si comporta come $O\left(\frac{1}{n}\right)$, per confronto, con $\int \frac{1}{x} dx$. A questo punto abbiamo trovato che:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \log x dx + C_1 - O\left(\frac{1}{n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + C_2 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Notiamo che

$$\log\left(n+\frac{1}{2}\right) = \log\left[n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] = \log n + \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) \simeq \log n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e sostiuendo nella formula precendente troviamo

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\log n + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \longrightarrow \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Adesso una osservazione importante.

Osservazione 9.1. *Sia $n \ge 2$. Si ha*

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \; d(\cos x) = \\
&= \underbrace{[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1)\sin^{n-2} x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x - \sin^n x dx \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n)
\end{aligned}$$

Allora

(27) $$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \Longrightarrow I_n = (n-1) I_{n-2}$$

Inoltre se n è pari, allora

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-2}{2n}\frac{2n-3}{2n} I_{2n-4} \dots$$

fino a ritrovare che

senopari (28) $$\boxed{I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}}$$

mentre se n è dispari si ha

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} \dots$$

fino a ritrovare

senodispari (29) $$\boxed{I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}}$$

Adesso sfruttiamo questa osservazione. Si ha che $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ fissato, abbiamo $\sin x \geq \sin^2 x \geq \cdots \geq \sin^n x$; integrando tutte queste disuguaglianze, esse continuano a valere e si ha

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{(2n)!}{(2n+1)!!}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!} = \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{2n}} = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

e di conseguenza troviamo che

$$1 \geq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \geq O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Invece ora si noti che

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{2}{\pi} \Longrightarrow \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}O\left(\frac{1}{n}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2} = \frac{\pi}{2}(2n+1)(1+O\left(\frac{1}{n}\right)) = \pi n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{\pi}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \pi n + O(1).$$

Risulta, adesso, evidente che

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n}.$$

Quindi, a questo punto della dimostrazione sappiamo due cose:

(1) $\log n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + C + O\left(\frac{1}{n}\right)$;

(2) $\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{\pi n}$.

Osserviamo la costante C, che a breve espliciteremo, è unica perchè, se così non fosse, per $n \to \infty$ avremmo $C - C' \longrightarrow 0$.
Procediamo trasformando i seminattoriali in fattoriali:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!!^2}{(2n)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n)!} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{2^{2n} n!^2}{(2n)!} = \sqrt{\pi n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Di conseguenza, applicando il logaritmo, abbiamo:

$$2n\log 2 + 2\log n! - \log(2n)! = \log\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\log n + \log O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dove osserviamo, per Taylor, il logaritmo di un infinitesimo è un infinitesimo dello stesso ordine. Adesso andiamo a sotituire all'interno della formula che avevamo ricavato per $\log n!$ ed anche per $\log(2n)!$ così da avere

$$2n\log 2 + (2n+1)\log n - 2n + 2C - (2n+\frac{1}{2})(\log 2 + \log n) + 2n - C - \log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\log n = 0$$

e eliminando il possibile, arriviamo a

$$C + 2n\log 2 + 2n\log n + \log n - 2n\log 2 - 2n\log n - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log n - \log\sqrt{\pi} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ossia

$$C - \frac{1}{2}\log 2 - \log\sqrt{\pi} \longrightarrow 0 \Longrightarrow C = \log\sqrt{2\pi}.$$

Così abbiamo ritrovato la formula di Stirling logaritmica; elevando all'esponenziale si ritrova anche quella classica. □

10. GIOVEDÌ 25.10.2012 - OSSERVAZIONI ANALITICO-ASINTOTICHE SUI B_{2k} E POLINOMI DI BERNOULLI

Useremo la formula di Stirling per un'analisi asintotica del carattere dei numeri di Bernoulli. Prima, però, un'osservazione sul comportamento di $\zeta(2k)$.

Osservazione 10.1. *Osserviamo che*

$$\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}=1+2^{-2k}+3^{-2k}+4^{-2k}+\ldots\Longrightarrow \zeta(2k)>1$$

e quindi, poichè vogliamo stimarla tramite l'integrale, si ha che

$$\zeta(2k)<1+\int_1^{+\infty} x^{-2k}\,dx=1+\left[\frac{x^{1-2k}}{1-2k}\right]_1^{+\infty}=1+\frac{1}{2k-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}=$$

$$=1+\frac{1}{2k}+\left(\frac{1}{2k}\right)^2+\ldots\longrightarrow 0$$

quindi, per Taylor, $\zeta(2k)\longrightarrow 1+O\left(\frac{1}{k}\right)$ *per* $k\to+\infty$.

Adesso nella formula (zpari ~~25~~) sostituiamo la stima trovata per $\zeta(2k)$ e la formula di Stirling al posto del fattoriale così da avere:

$$|B_{2k}|=\frac{2}{(2\pi)^{2k}}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\sqrt{2\pi 2k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)=4\sqrt{\pi k}\left(\frac{k}{e\pi}\right)^{2k}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Procediamo ora con delle osservazioni non più asintotiche ma al finito: partiamo dal notare che

$$1<\zeta(2k)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}\le\sum_{n=1}^{\infty} n^2=\frac{\pi^2}{6}$$

quindi per piccoli valori di k si ha

$$\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}<|B_{2k}|\le\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\frac{\pi^2}{6}=\frac{(2k)!}{3(2\pi)^{2k-2}}.$$

Notiamo che sull'asse reale, l'estremo destro è minore del sininstro del successivo intervello e quindi $|B_{2k}|\le|B_{2k+2}|$ e questo significa trovare per quali k si ha

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\le\frac{2(2k+2)!}{(2\pi)^{2k+2}}\iff\frac{\pi^2}{3(2\pi)^{2k}}\le\frac{2(2k+1)(2k+2)}{(2\pi)^{2k+2}}\iff$$

$$\iff\frac{\pi^2}{3}\le\frac{(2k+1)(2k*2)}{2\pi^2}\iff 2\pi^4\le 3(2k+1)(2k+2)$$

ed il più piccolo k per cui questa condizione risulta soddisfatta è $k=4$.

Passiamo ora allo studio di un oggetto di tipo nuovo.

Definizione 10.1 (**Polinomi di Bernoulli**). *Si chiamano polinomi di Bernoulli i polinomi:*

polber

$$\boxed{B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\qquad n\in\mathbb{N}}\tag{30}$$

Esempio 10.1. *Calcoliamo, a mò di esempio i primi polinomi di Bernoulli:*

$$\begin{aligned}&B_0(x)=B_0=0\\&B_1(x)=\tbinom{1}{0}B_0x+\tbinom{1}{1}B_1=x-\tfrac{1}{2}\\&B_2(x)=\tbinom{2}{0}B_0x^2+\tbinom{2}{1}B_1x+\tbinom{2}{2}B_2=x^2-x+\tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

Osserviamo che il coefficiente direttore è sempre 1 perchè $\binom{n}{0}B_0\equiv 0$, mentre il termine noto è $\binom{n}{n}B_n=B_n(0)=B_n$. Inoltre per i polinomi calcolati in 1, in genere si ha:

$$B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k=\begin{cases}B_n & n\ne 1\\ -B_1=\frac{1}{2} & n=1\end{cases}.$$

Adesso cerchiamo delle relazioni particolari e delle proprietà di cui godono questi polinomi; consideriamo z variabile e $x \in \mathbb{C}$ parametro fissato. Abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{ze^{xz}}{e^z-1} &= \frac{z}{e^z-1}e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}z^n\right) = (|z| \le 2\pi) = \\ &= (\text{somma alla Cauchy}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k n!}{k!n!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n.\end{aligned}$$

Adesso consideriamo l'ultima serie alla quale siamo arrivati con $x+y$ invece di x:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+y)}{n!}z^n = \frac{ze^{xz}e^{yz}}{e^z-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}z^n\right) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

e quindi troviamo che

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}. \tag{31}$$

Adesso, per trovare ulteriori, meno evidenti, proprietà dei $B_n(x)$ poniamo $x=1$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}B_n(1+x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(1)x^{n-k} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq 1}}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} + nx^{n-1} - \frac{n}{2}x^{n-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k} + nx^{n-1} = B_n(x) + nx^{n-1}\end{aligned}$$

e quindi abbiamo scoperto che

polber1

$$\boxed{B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in \mathbb{C}} \tag{32}$$

Osservazione 10.2. *Supponiamo di prendere m, n, r naturali con $m < n$ e scriviamo i polinomi di Bernoulli come somme e sottrazioni di termini ossia*

$$\begin{aligned}B_{r+1}(n) - B_{r+1}(m) &= \sum_{k=m}^{n-1}(B_{r+1}(k+1) - B_{r+1}(k)) = \\ &= \sum_{k=m}^{n-1}(r+1)k^r = (r+1)\sum_{k=m}^{n-1}k^r\end{aligned} \tag{33}$$

e quindi troviamo che

polber2

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n-1}k^r = \frac{B_{r+1}(n) - B_{r+1}(1)}{r+1}} \tag{34}$$

Per esempio eseguiamo i calcoli per i primi tre r:

- $r = 0$*:*
$$n - 1 = B_1(n) - \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2};$$
- $r = 1$*:*
$$\sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{B_2(n) - B_2}{2} = \frac{n^2 - n + \frac{1}{6} - \frac{1}{6}}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$
- $r = 2$*:*
$$\sum_{k=1}^{n-1}k^2 = \frac{B_3(n) - B_3}{3} = \frac{n^2 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}{3} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Adesso cerchiamo di trovare una qualche relazione legante anche le derivate dei polinomi di Bernoulli. Partendo dalla (32) [polber1] si ha:

$$B_n'(x+1) - B_n'(x) = n(n-1)x^{n-2} = n(B_{n-1}(x+1) - B_{n-1}(x)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow B_n'(x+1) - nB_{n-1}(x+1) = B_n'(x) - nB_{n-1}(x)$$

ossia il polinomio a sinistra ha periodo unitario e quindi è costante: per trovare questa costante poniamoci in $x = 0$ al termine dei seguenti passaggi.

$$B_n'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n}{k}B_k(n-k)x^{n-1-k}.$$

e quindi abbiamo trovato che

polber3

$$\boxed{B_n'(x) = nB_{n-1}(x).} \tag{35}$$

11. Mercoledì 31.10.2012 - Formule di sommazione e costante di Eulero - Mascheroni

Cominciamo con il ricordare che una serie di potenze $\sum_0^\infty a_n z^n$ converge totalmente per $|z| < \rho$ (raggio di convergenza), ma è necessaria cautela per quanto riguarda i punti del bordo del disco.

Esempio 11.1. *La funzione*

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$$

ha, come serie, raggio di convergenza $\rho = 1$ *e non converge sul bordo.*
La funzione $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$ *ha raggio di convergenza, anch'essa, pari a* $\rho = 1$ *e converge (ma non assolutamente) in tutti i punti del bordo tranne in* $z = -1$.

Si ha il seguente teorema.

Teorema 11.1 (**Abel**). *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

converge in z_0 *uniformemente, allora converge totalmente con* $\rho = |z_0|$.

Questo teorema, che non dimostriamo, è lo spunto da cui partire per introdurre le formule di sommazione. Abel dimostrò il teorema grazie a una di queste formule, trovata appositamente per lo scopo.

Proposizione 11.1 (**Formula di Sommazione di Abel**). *Sia una successione* $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$ *in* $\mathbb{R}$ *che non abbia punti limite al finito ossia tale che* $\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = +\infty$ *e sia* $f(t)$ *una funzione a valori in* $\mathbb{R}$, *o in* $\mathbb{C}$ *(ma con* $t \in \mathbb{R}$*) di classe* $\mathscr{C}^1[\lambda_1, x]$ *per un certo* x *fissato. Allora si ha*

sumabel

$$\boxed{\sum_{\lambda_n\le x} a_n f(\lambda_n) = \left(\sum_{\lambda_n\le x} a_n\right) f(x) - \int_{\lambda_1}^{x}\left(\sum_{\lambda_n\le t} a_n\right) f'(t)\,dt} \tag{36}$$

Dimostrazione. Sia N tale che $\lambda_N \le x \le \lambda_{N+1}$. Allora

$$\left(\sum_{\lambda_n\le x} a_n\right) f(x) - \sum_{\lambda_n\le x} a_n f(\lambda_n) = \sum_{\lambda_n\le x} a_n (f(x) - f(\lambda_n))$$

ma per ipotesi $f \in \mathscr{C}^1[\lambda_1, x]$ e per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\sum_{\lambda_n\le x} a_n(f(x) - f(\lambda_n)) = \sum_{\lambda_n\le x} a_n \int_{\lambda_n}^{x} f'(t)\,dt = \int_{\lambda_1}^{x} a_1 f'(t)\,dt + \int_{\lambda_2}^{x} a_2 f'(t)\,dt + \dots.$$

Adesso ogni singolo integrale di cui sopra, per l'additività dell'integrale, può essere spezzato come

$$\int_{\lambda_1}^{x} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} + \dots$$

e così facendo si viene a creare una tabella diagonale in cui possiamo ritrovare tutto l'intgrale di partenza sommando sulle colonne. Il risultato sarà

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a_1 f'(t)\,dt + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} (a_1 + a_2) f'(t)\,dt + \int_{\lambda_3}^{\lambda_4} (a_1 + a_2 + a_3) f'(t)\,dt + \dots = \int_{\lambda_1}^{x}\left(\sum_{\lambda_n\le x} a_n\right) f'(t)\,dt$$

□

Adesso vediamo un'utile applicazione della formula di sommazione di Abel.

Proposizione 11.2 (**Costante di Eulero - Mascheroni**). *Si ha*[1]

eulmasc

$$\boxed{\gamma := \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)} \tag{37}$$

Dimostrazione. Apparentemente si tratta di una forma indeterminata del tipo $\infty-\infty$, ma noi useremo il risultato di Abel per mostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\log n=\gamma+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dobbiamo considerare $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ con $\lambda_k=k$, $f(x)=\frac{1}{x}$ e $a_k\equiv 1$. Per Abel abbiamo che

$$\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)\frac{1}{n}-\int_1^n\left(\sum_{k=1}^{[t]}1\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=1+\int_1^n\frac{[t]dt}{t^2}=1+\int_1^n\frac{t-\{t\}}{t^2}dt=$$
$$=1+\int_1^n\frac{dt}{t}-\int_1^n\underbrace{\frac{\{t\}}{t^2}}_{=O(\frac{1}{t^2})}dt=\log n+O\left(\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}\right)$$

quindi la serie iniziale converge e possiamo scrivere

$$\int_1^n\frac{\{t\}}{t^2}dt=\int_1^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt-\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt=O\left(\frac{1}{n}\right)$$

dove sappiamo che

$$\int_n^{+\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt=O\left(\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

In definitiva

$$\left(1-\int_1^\infty\frac{\{t\}}{t^2}dt\right)+\log n+O\left(\frac{1}{n}\right)=\gamma+\log n+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

e quindi

$$\gamma=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}-\log n\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad\text{per } n\to+\infty$$

□

Proposizione 11.3 (**Formula di sommazione di Eulero - Mc Laurin**). *Sia $f(x)$ funzione a valori reali, di classe $\mathscr{C}^q[a,b]$ con $q\geq 1$. Allora*

$$\sum_{a<k\leq b}f(k)=\int_a^b f(x)dx+\sum_{r=1}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}\left[B_r(\{x\})f^{(r-1)}(x)\right]_a^b+\frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx$$

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazione in due casi: una volta fatta nel primo, ci ricondurremo ad esso. La distinzione si basa sul fatto che, se $r\geq 2$, allora $B_r(0)=B_r(1)=B_r$ ed è una funzione continua.

(1) $(q=1)$
Osserviamo che, poichè $B_1(x)=x-\frac{1}{2}$, allora $B_1(\{x\})$ è la funzione dente di sega. Adesso partiamo dal calcolarci l'ultimo integrale, così da avere come risultato il resto mancante della formula. Si ha che $\int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx$ possiamo spezzarlo, per l'additività dell'integrale, per esempio tra due interi. Quindi avremo

$$\int_k^{k+1}B_1(\{x\})f'(x)dx=\int_k^{k+1}\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx=\left[\left(x-k-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_k^{k+1}-$$
$$-\int_k^{k+1}f(x)dx=\frac{f(k+1)+f(k)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)dx$$

[1] A livello nozionistico, le prime cifre della costante di Eulero - Mascheroni sono $\gamma\approx 0,577215$.

Adesso, possiamo arrivare fino a b perchè $k \le b$, ma per ipotesi $a < k$ e quindi restano i termini che ora ci calcoleremo a parte.

$$\begin{aligned}\int_a^{[a]+1} B_1(\{x\})f'(x)dx &= \int_a^{[a]+1}\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)f'(x)dx = \\ &= \left[\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_a^{[a]+1} - \int_a^{[a]+1} f(x)dx = \\ &= \frac{f([a]+1)}{2} - \left(\{a\}-\frac{1}{2}\right)f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x)dx\end{aligned}$$

Adesso, osserviamo che $\{a\} - \frac{1}{2} = B_1(\{a\})$. Ora l'ultimo pezzo rimasto è

$$\begin{aligned}\int_{[b]}^{b} B_1(\{x\})f'(x)dx &= \int_{[b]}^{b}\left(x-[b]-\frac{1}{2}\right)f''(x)dx = \\ &= \left[\left(x-[b]-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_{[b]}^{b} - \int_{[b]}^{b} f(x)dx = \\ &= \left(\{b\}-\frac{1}{2}\right)f(x) + \frac{1}{2}f([b]) - \int_{[b]}^{b} f(x)dx\end{aligned}$$

Adesso sommiamo tutto:

$$\begin{aligned}\int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx = &\underbrace{\frac{f([a]+1)}{2}}_{(\triangle)} - B_1(\{a\})f(a) - \int_a^{[a]+1} f(x)dx + \\ &+ \sum_{k=[a]+1}^{[b]-1} \frac{f(k)+f(k+1)}{2}\int_k^{k+1} f(x)dx - \\ &- \int_{[a]+1}^{a} f(x)dx + b_1(\{b\})f(b) + \underbrace{\frac{1}{2}f([b])}_{(\square)}\end{aligned} \tag{38}$$

Infine notiamo che la sommatoria in realtà ha tutti termini del tipo $f([a]+1)+f([a]+2)+f([a]+2)+f([a]+3)+f([a]+3)+\dots$ e così via e quindi con la moltiplicazione per il fattore $\frac{1}{2}$ i doppi termini si elidono. Infine vi si aggiunge $(\triangle)$ e $(\square)$ così da ritrovare

$$\sum_{a<k\le b} f(k).$$

(2) $(q \ge 2)$
Allo stesso modo del caso precedente, si ha

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q(\{x\})f^{(q)}dx = \\ &= \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\left[B_q(\{x\})f^{(q-1)}(x)\right]_a^b - \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b B_q'(\{x\})f^{(q-1)}(x)dx = \\ &= \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\left[B_q(\{x\})f^{(q-1)}(x)\right]_a^b - \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_a^b qB_{q-1}(\{x\})f^{(q-1)}(x)dx\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità polber3 (35). Adesso iterando la procedura si trova

$$\sum_{r=2}^{q}\frac{(-1)^r}{r!}\left[B_r(\{x\})f^{(r-1)}(x)\right]_a^b + \int_a^b B_1(\{x\})f'(x)dx$$

e quindi ci siamo ricondotti al primo caso, che abbiamo già dimostrato. Questo conclude la dimostrazione.

$\square$

12. Mercoledì 7.11.2012 - Serie asintotica della costante di Eulero - Mascheroni

Vogliamo trovare uno sviluppo asintotico per la costante di Eulero - Mascheroni; utilizzeremo la formula di sommazione di Eulero - Mc Laurin con $a = m$ e $b = n$ interi. Vediamo che forma prende la formula.

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + \sum_{r=1}^{q} {}^{2}\frac{(-1)^r B_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\right) + \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_m^n B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx$$

e adesso aggiungiamo $f(m)$ a entrambi i membri e esplicitiamo a sinistra $B_1 = \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(m)$ così da avere

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)dx + f(m) + \frac{1}{2}f(n) - \frac{1}{2}f(m) + \sum_{r=1}^{[\frac{q}{2}]}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\cdot\left(f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(m)\right) +$$

$$+\frac{(-1)^q}{q!}\int_m^n B_q(\{x\})f^{(q)}(x)dx.$$

Adesso, per sviluppare la serie asintotica, supponiamo q dispari e sviluppiamo $f(x) = \frac{1}{x}$ con $m = 1$ ed n un intero qualsiasi ed arbitrariamente grande. Osserviamo che scriveremo da subito

$$f^{(2r-1)}(x) = -(2r-1)!\frac{1}{x^{2r}}.$$

Si ha:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) + \sum_{r=1}^{[q]}\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left((2r-1)! - (2r-1)!\frac{1}{x^{2r}}\right) +$$

$$+\frac{1}{(2q+1)!}\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})f^{(2q+1)}(x)dx$$

dove

$$\frac{B_{2r}}{(2r)!}\left((2r-1)! - (2r-1)!\frac{1}{x^{2r}}\right) = \frac{B_{2r}}{2r}\left(1-\frac{1}{n^{2r}}\right).$$

Inoltre

$$\frac{1}{(2q+1)!}\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})(-(2q+1)!)\frac{1}{x^{2q+2}}dx = -\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})\frac{dx}{x^{2q+2}}$$

e poichè $B_{2q+1}(\{x\})$ è limitata, l'integrale converge e quindi possiamno scriverlo come $-\int_1^\infty + \int_n^\infty$. Portando a primo membro $\log n$ e passando al limite si ha

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \log k = \frac{1}{2} + \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r} - \int_n^{+\infty} B_{2q+1}(\{x\})\frac{dx}{x^{2q+2}}$$

con la quantità a sinistra che ha il pregio di non dipendere da q, ed anzi, è arbitrariamente precisa all'aumentare di q. Ora sostituiamo γ nella formula di sommazione così da avere

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{q}\frac{B_{2r}}{2r}\frac{1}{n^{2r}} + \int_n^{+\infty} B_{2q+1}(\{x\})\frac{dx}{x^{2q+2}}$$

ma osserviamo che poichè $B'_{2q+2}(x) = (2q+2)B_{2q+1}(x)$, ne consegue che

$$dB_{2q+2}(x) = (2q+2)B_{2q+1}(x)dx.$$

Sfrutteremo questo per mostrare come l'ultimo integrale rimasto sia in realtà un infinitesimo.

$$\int_n^{+\infty} B_{2q+1}(\{x\})\frac{dx}{x^{2q+2}} = \frac{1}{2q+2}\int_n^{+\infty}\frac{1}{x^{2q+2}}dB_{2q+2}(\{x\}) = \frac{1}{2q+2}\left[\frac{B_{2q+2}(\{x\})}{x^{2q+2}}\right]_n^{+\infty} -$$

$$-\frac{1}{2q+2}\int_n^{+\infty} B_{2q+2}(\{x\})(-(2q+2))\frac{dx}{x^{2q+3}} =$$

$$= -\frac{1}{2q+2}\frac{B_{2q+2}}{n^{2q+2}} + \int_n^{+\infty} B_{2q+2}(\{x\})\frac{dx}{x^{2q+3}} =$$

$$= -\frac{1}{2q+2}\frac{B_{2q+2}}{n^{2q+2}} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right)$$

[2] Il termine B_r nella frazione è dovuto al fatto che quando $n \in \mathbb{N}$ allora $\{x\} = 0$ e $B_r(0) = B_r$.

e l'ultima quantità, per q fissato, per $n \to +\infty$ tende a

$$O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right).$$

Quindi, fino ad ora, abbiamo trovato che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{r=1}^{\infty} \frac{B_{2r}}{2r} + O\left(\frac{1}{n^{2q+2}}\right)$$

ma non abbiamo ancora finito. Poichè la serie a destra diverge, cosa che adesso dimostreremo, dobbiamo dimostrare che in effetti non può sussistere uguaglianza vera e propria tra i due membri. Useremo il fatto che, per Cauchy - Hadamard, il raggio di convergenza è nullo. Sappiamo che

$$|B_r| \sim 4\sqrt{\pi r}\left(\frac{r}{e\pi}\right)^{2r}$$

e che il raggio di convergenza è definito come

$$\rho := \left(\limsup_{r \to +\infty} \sqrt[r]{|a_r|}\right)^{-1}.$$

Adesso

$$\lim_{r \to +\infty} \sqrt[r]{\frac{|B_{2r}|}{2r}} = \exp \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r}\left(\log|B_{2r}| - \log 2 - \log r\right)$$

ma osserviamo che

$$\log|B_{2r}| = 2\log 2 + \log\sqrt{\pi} + \frac{1}{2}\log r + 2r\log r - 2r\log e\pi + O\left(\frac{1}{r}\right)$$

e tutti i termini, divisi per r, vanno a zero così si ha sostanzialmente

$$\exp \lim_{r \to +\infty} \frac{\log|B_{2r}|}{r} \longrightarrow e^{\log r} \longrightarrow +\infty \Longrightarrow \rho = (\infty)^{-1} = 0$$

e quindi la serie diverge per ogni n.

13. Giovedì 8.11.2012 - La Γ di Eulero: definizione e prime proprietà

Definizione 13.1 (**Funzione Γ**). *Sia z parametro complesso e t variabile reale. E' definita la funzione Gamma di Eulero come*

g1 (39)
$$\boxed{\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt}$$

Osservazione 13.1. *Supponiamo di avere due generici $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ con $\alpha \neq 0$. Per definizione si ha $\alpha^\beta = e^{\beta \log \alpha}$ che a priori può assumere infiniti valori dato che $\log \alpha = \log|\alpha| + i \arg \alpha$. Ma basta prendere $\alpha \in \mathbb{R}^+$ per far si che, in particolare, la funzione t^{z-1} non sia polidroma.*

Affinchè l'integrale converga, almeno inizialmente bisogna prendere il parametro tale che $\operatorname{Re} z > 0$. Si noti, non è male dirlo, che all'infinito l'esponeziale domina il comportamento della funzione, mentre, se ci si avvicina a 0, la parte che conta è t^{z-1}. Quindi vediamo cosa si deve richiedere affichè ci sia convergenza a 0.
Se $t \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{C}$ allora

$$|t^\beta| = |e^{\beta \log t}| = e^{\operatorname{Re}\beta \log t} = t^{\operatorname{Re}\beta}$$

e di conseguenza

$$\int_0^1 |t^{z-1}| dt = \int_0^1 t^{(\operatorname{Re} z)-1} dt < +\infty \iff (\operatorname{Re} z) - 1 > -1 \iff \operatorname{Re} z > 0.$$

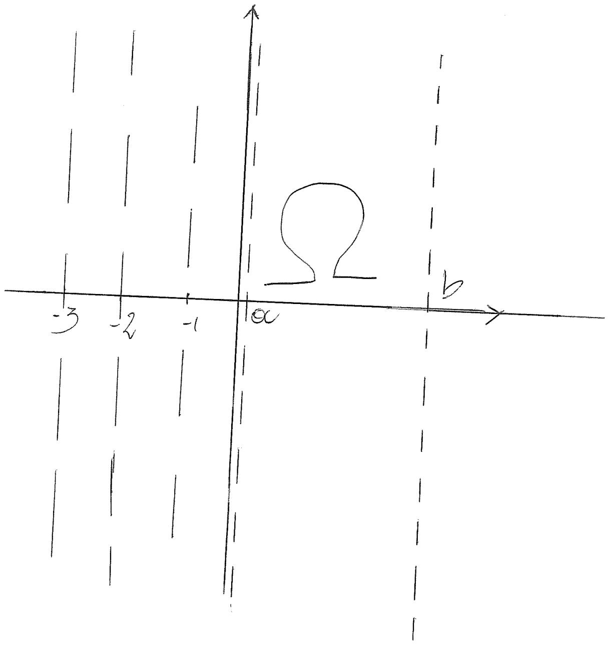
Questo va richiesto per avere convergenza assoluta, ma noi vogliamo quella totale, che implica quella uniforme, così da poter scambiare, quando necessario, derivazioni, integrazioni, passaggi al limite. Ricordiamo che una $f(z)$ converge totalmente in un aperto Ω se

$$f(z) = \int_1^{+\infty} u(t;z) dt \qquad |u(t;z)| \le C(t) \qquad \int C(t) dt < +\infty.$$

Ricordiamo anche che se $\forall\, t \in [1, +\infty)$ una $u(t;z)$ è olomorfa in $\Omega \subset \mathbb{C}$ allora si può derivare termine a termine ossia avere

$$f'(z) = \int_1^{+\infty} \frac{du}{dz}(t;z) dt.$$

La richiesta che $\operatorname{Re} z > 0$ può essere espressa, con $z = x + iy$, ponendo $0 < a \le x \le b < +\infty$, dove si noti che a può essere arbitrariamente piccolo ma comunque positivo.



2

In questo semipiano c'è convergenza totale dell'integrale:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \le \int_0^1 t^{a-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{b-1} dt < +\infty.$$

La morale è che, data l'arbitarietà con cui possono essere scelti a e b, la funzione $\Gamma(z)$ è olomorfa su tutto il semipiano $\operatorname{Re} z > 0$.
Adesso ci ricaveremo l'equazione funzionale per la Γ: supposto fissato z, si ha

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{z} e^{-t} d(t^z) = \frac{1}{z}[e^{-t} t^z]_{t=0}^{+\infty} - \frac{1}{z}\int_0^{+\infty} -e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

Quindi abbiamo trovato che

g2 (40)
$$\boxed{z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)}$$

Una delle più importanti conseguenze della presenza di questa equazione funzionale, è che, se letta come $\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1)$, ci da un'indicazione su come estendere su tutto il piano complesso la funzione Γ. Giaà in questa forma essa ci dice che possiamo estendere la funzione finoa a $\operatorname{Re} z = -1$ e avere un polo semplice in $z = 0$. Iterando si ha

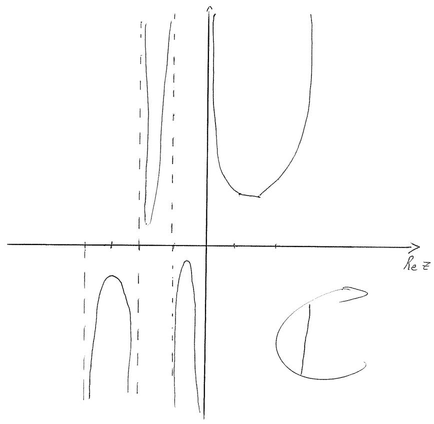
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\Gamma(z+n+1)$$

e quindi per estensioni successive sulle strisce si ha che la Γ è olomorfa su tutto il pianio complesso tranne nell'origine e negli interi negativi, ove ha dei poli semplici; inoltre

$$\operatorname{Res}_{-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

Teorema 13.1 (**Formula di Gauss**). *Si ha*

g3 (41)
$$\boxed{\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}}$$



4

Dimostrazione. Per ogni $n > 0$ fissato, considereremo la quantità
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt$$
che, osserviamo, per t fissato ed $n \to +\infty$ si ha convergenza alla Γ, ma per farlo bisogna passare al limite sotto il segno di integrale, cosa delicata. Sempre supponendo $z \in \{\mathrm{Re}\, z > 0\}$, insieme a t ed n, poniamo il cambio di variabile $\frac{t}{n} = \tau$, $dt = nd\tau$. Si ha
$$\int_0^1 (1-\tau)^n n^{z-1}\tau^{z-1} nd\tau = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau.$$
adesso mettiamoci da parte il fattore n^z e integriamo per parti così da avere
$$\int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1} d\tau = \frac{1}{z}\int_0^1 (1-\tau)^n d(\tau^z) = \frac{1}{z}[\tau^z(1-\tau)^n]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 \tau^z (1-\tau)^{n-1} d\tau$$
e iterando si ottiene
$$\frac{n}{z}\frac{n-1}{z+1}\cdots\frac{1}{z+n-1}\int_0^1 (1-\tau)\tau^{z+n-1}d\tau = \frac{n}{z}\frac{n-1}{z+1}\cdots\frac{1}{z+n-1}\frac{1}{z+n} =$$
$$= \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$
Aggiungendo il fattore n^z si ha la formula cercata. Resta, ora, da mostrare effettivamente che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \Gamma(z).$$
Si ha
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt = \int_0^n e^{-t} - \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt =$$
$$= \Gamma(z) - \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt$$

Adesso dobbiamo dimostrare che l'ultimo integrale è nullo. Per farlo consideriamo $0 \le t < n$ ossia $\frac{t}{n} < 1$. Allora si ha che

$$1+\frac{t}{n} \le 1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{2!n^2}+\frac{t^3}{3!n^3}\dots \le e^{+\frac{t}{n}} \le$$

$$\le 1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{n^2}+\frac{t^3}{n^3}+\dots$$

e poichè per ipotesi $\frac{t}{n} < 1$ allora il tutto è maggiorato da $\frac{1}{1-\frac{t}{n}}$ e questo ci permette di scrivere, lette dall'alto verso il basso, le seguenti diseguaglianze.

$$\begin{cases} 1+\frac{t}{n} & \iff & \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \\ \le & & \le \\ e^{\frac{t}{n}} & & e^t \\ \le & & \le \\ \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-1} & \iff & \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n} \end{cases} \implies \begin{cases} 1. \ \left(1+\frac{t}{n}\right)^{-1} \le e^t \\ 2. \ \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le e^{-t} \end{cases}$$

Dalla 2. si ha che

$$0 \le e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] \le e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] \iff$$

$$\iff e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ge \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \implies$$

$$\implies e^t \ge \left(1+\frac{t}{n}\right)$$

dove l'ultima disuguaglianza è la 1. Adesso, osserviamo che $\forall \alpha \le 1$ si ha $(1-\alpha)^n \ge 1-n\alpha$ per Taylor. Quindi, posto $\alpha = \frac{t^2}{n^2}$ si ha

$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \ge 1-n\frac{t^2}{n^2} = 1-\frac{t^2}{n}$$

quindi

$$e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] \le e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right] = \frac{e^{-t}t^2}{n}.$$

In definitiva

$$\begin{aligned} \left|\int_0^n \left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}dt\right| &\le \int_0^n \left|e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right|\left|t^{z-1}\right|dt \le \\ &\le \left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \le \frac{t^2}{n}e^{-t}\right) \le \\ &\le \int_0^n \frac{t^2}{n}e^{-t}t^{\operatorname{Re} z-1}dt = \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{\operatorname{Re} z+1}dt \le \\ &\le \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\operatorname{Re} z+1}dt = O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Quindi abbiamo mostrato tutto nel caso $\operatorname{Re} z > 0$, ma vogliamo estendere il risultato su tutto $\mathbb{C}$: estenderemo sulle striscie prese una per una, considerando le verticali a sinistra degli aperti e e quelle a destra dei chiusi che escludano i poli. Più precisamente

$$\begin{cases} -(k+1) < \operatorname{Re} z <\le -k \\ z \ne -k \end{cases}.$$

Adesso applichiamo l'equazione funzionale

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)}\Gamma(z+k+1)$$

ma adesso $\mathrm{Re}(z+k+1)>0$ e per k fissato, quindi, vale ancora la formula di Gauss. Avremo

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{1}{z(z+1)\dots(z+k)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{z+k+1}n!}{(z+k+1)\dots(z+k+n+1)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n! n^{k+1}}{z(z+1)\dots(z+k+n+1)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{k+1}}{(z+n+1)\dots(z+n+k+1)}
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo limite vale 1 perchè $(z+n+1)\dots(z+n+k+1) \simeq n^{k+1}$. □

Proposizione 13.1. *Si ha:*

g4 (42)
$$
\boxed{\frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right) e^{-\frac{z}{k}} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}}
$$

Dimostrazione. Partiamo dall'osservare che

$$
\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\dots = n.
$$

Adesso, manipolando lievemente la formula di Gauss si ottiene che

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z n!}{1z2(z+1)\dots n(1+\frac{z}{n})} = \\
&= \frac{1}{z} \lim_{n\to+\infty} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1} \right] \qquad (43)
\end{aligned}
$$

□

dove nella prima produttoria possiamo sostituire $n-1$ con n dato che per $n\to+\infty$ si ha $1+\frac{1}{k}\to 1$. Di conseguenza possiamo unire le produttorie ed arrivare ad una formula dovuta ad Eulero:

$$
z\Gamma(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}. \qquad (44)
$$

Adesso, torando alla formula di Gauss, si ha che

$$
z\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^z}{(z+1)\dots(z+k)} \iff \frac{1}{z\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)}{n^z}
$$

ma

$$
\frac{1}{n^z} = n^{-z} = e^{-z\log n} = e^{-z\left(\log n+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2}-\dots-\frac{1}{n}\right)}
$$

e quindi ad esponente abbiamo

$$
z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right) - z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)
$$

e questo ci consente di riscrivere tutto come

$$
\frac{1}{z\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \left((1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)}\right).
$$

Riordiando i fattori troviamo

$$
\frac{1}{z\Gamma(z)} = \lim_{n\to+\infty} \left((1+z)e^{-z}\left(1+\frac{z}{2}\right)e^{-\frac{z}{2}}\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}} e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)}\right)
$$

ma il limite del prodotto è il prodotto dei limiti e di conseguenza abbiamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z\Gamma(z)} &= \lim_{n\to+\infty} e^{z\left(1+\dots+\frac{1}{n}-\log n\right)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}} = \\
&= e^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}.
\end{aligned}
$$

Si osservi come, in effetti, la produttoria in realtà è un prodotto di Weierstrass - Hadamard con $z_n=-n$, $p=1$, inoltre $G(z)=\gamma z$ e per un teorema precedentemente visto, la funzione $[z\Gamma(z)]^{-1}$ è intera di ordine 1 e quindi $\Gamma(z)$ non si annulla mai.

14. Mercoledì 14.11.2012 - Seconda equazione funzionale

Teorema 14.1. *Si ha che*

g5

$$\boxed{\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}} \tag{45}$$

Daremo due dimostrazioni diverse di questo teorema.

Dimostrazione. Sfrutteremo il fatto che

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} \qquad \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} z\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \Gamma(z+1)\Gamma(1-z) = \\ &= \frac{1}{z+1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1+z}\left(1+\frac{1+z}{n}\right)^{-1}\frac{1}{1-z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-z}\left(1+\frac{1-z}{n}\right)^{-1} = \\ &= \frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}-\frac{z^2}{n^2}\right]^{-1} \end{aligned}$$

dove osserviamo che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{z}{n}\right]\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{z}{n}\right]$$

e inoltre, manipolando i fattori troviamo che

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{z^2}{n^2}} = \left[\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{z^2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}\right]^{-1} = \left[1-\frac{z^2}{(n+1)^2}\right]^{-1}$$

quindi, tornando alla produttoria, abbiamo

$$\frac{1}{1-z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{(n+1)^2}\right)^{-1}$$

ma poichè $n \to +\infty$ possiamo sostituire $n+1$ con n ed inglobare il termine prima della produttoria così da avere

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)^{-1} = \left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)\right]^{-1} = \frac{\pi z}{\sin \pi z}.$$

□

Nella seconda dimostrazione che daremo, della validità dela seconda equazione funzionale, faremo uso delle funzioni B(beta) di Eulero.

Definizione 14.1. *Siano $x, y \in \mathbb{C}$ tali che $\operatorname{Re} x > 0$ e $\operatorname{Re} y > 0$. Allora la beta di Eulero è*

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt. \tag{46}$$

Si osservi che $B(x,y) = B(y,x)$ e lo si mostra tramite un semplice cambio di variabili. Adesso proviamo ad estendere $B(x,y)$ in un modo simile a come abbiamo fatto per la funzione $\Gamma(z)$. Per prima cosa effettuiamo il cambio di variabili $t = \frac{u}{1+u}$ così da avere

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{du}{(1+u)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,du.$$

Adesso osserviamo che

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+u)}\,t^{x+y-1}\,dt = (t(1+u)=\vartheta) &= \int_0^{+\infty} e^{-\vartheta}\left(\frac{\vartheta}{1+u}\right)^{x+y-1}\frac{d\vartheta}{(1+u)} = \\ &= \frac{1}{(1+u)^{x+y}}\int_0^{+\infty} e^{-\vartheta}\,\vartheta^{x+y-1}\,d\vartheta = \frac{\Gamma(x+y)}{(1+u)^{x+y}} \end{aligned}$$

con l'ultima quantità che non è priva di senso dato che $u \in (0, +\infty)$ e $1+u > 0$. Adesso moltiplichiamo tutto per u^{x-1} ed integriamo così da avere

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t(1+u)}t^{x+y-1}u^{x-1}dt\right)du = \Gamma(x+y)\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}du}{(1+u)^{x+y}} = \Gamma(x+y)B(x,y).$$

Ma non è tutto, data la regolarità delle intgrande, possiamo scambiare l'ordine di integrazione e avere

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x+y-1}dt\int_0^{+\infty} e^{-tu}u^{x-1}du.$$

Adesso, per t fissato, poniamo $tu = \vartheta$ e osserviamo che il secondo integrale è tale che

$$\int_0^{+\infty} e^{-\vartheta}\left(\frac{\vartheta}{t}\right)^{x-1}\frac{d\vartheta}{t} = t^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-\vartheta}\vartheta^{x-1}\,d\vartheta = t^{-x}\Gamma(x)$$

che inserito nell'integrale rimanente da

$$\Gamma(x)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}dt = \Gamma(x)\Gamma(y)$$

e questo ci permette di avere una relazione tra la Γ e la B ossia

g6 (47)
$$\boxed{B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}}$$

dove, osserviamo, questa relazione sussiste se $\operatorname{Re} z > 0$ e $\operatorname{Im} z > 0$, ma possiamo estenderla a tutto $\mathbb{C}$ dato che siamo riusciti a farlo per la Γ.
Adesso siamo pronti per la seconda dimostrazione.

Dimostrazione. Innanzitutto poniamo $x = z$ e $y = 1 - z$ nella (47), così da avere $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x)$. Dobbiamo mostrare che

$$B(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

e questo basta farlo per $x \in (0,1)$. La tesi si avrà successivamente con un argomento di prolungamento analitico. A questo punto, usiamo la formulazione

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}du$$

e per calcolare questo integrale utilizzeremo il metodo dei residui. Vogliamo, quindi, provare che

$$B(x,1-x) = \int_0^{+\infty}\frac{u^{x+1}}{1+u}du = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

L'obiettivo è calcolare la circuitazione

$$\oint \frac{z^{x+1}}{1+z}dz$$

e, come mostrato in figura, fissiamo ρ ed R in modo tale da evitare la polidromia nell'origine. Osserviamo che $-1 \in (-\rho, -R)$; scriviamo il numeratore come $z^{x-1} = e^{(x-1)\log z}$ dove il logaritmo è quello standard. Nella parte A quindi abbiamo un preciso logaritmo e, di conseguenza, terminata la circuitazione su B si avrà un incremento di 2π. In particolare su A abbiamo

$$z^{x-1} = e^{(x-1)\log z} = |z|^{x-1} = u^{x-1}.$$

Quindi una volta giunti su C si dovrà considerare il vecchio logaritmo aumentato di $2\pi i$ così avremo

$$z^{x-1} = e^{(x-1)(\log|z|+2\pi i)} = u^{x-1}e^{2\pi i(x-1)}.$$

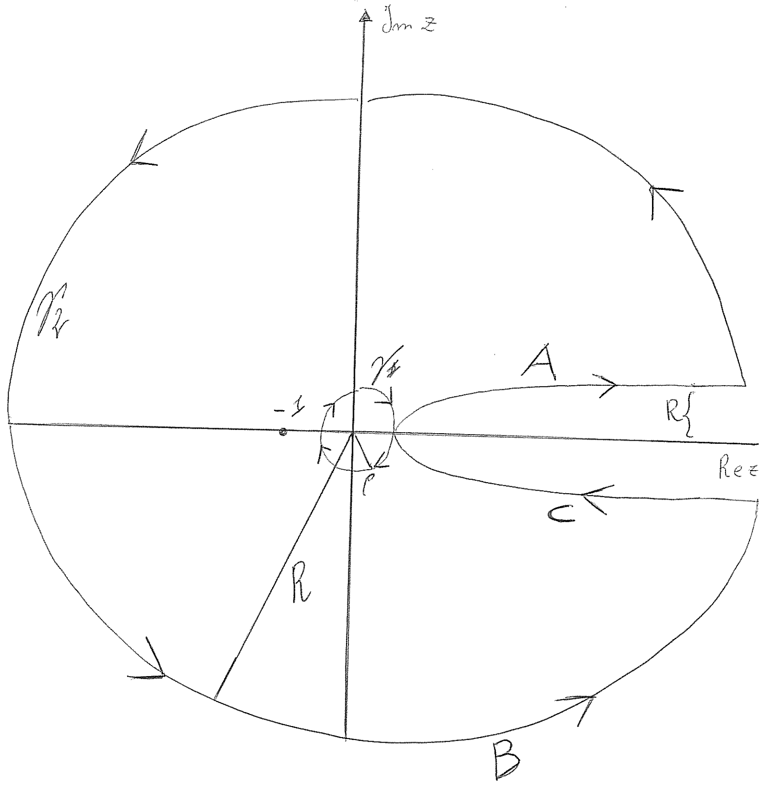
Adesso maggioriamo le due circuitazioni delle circonferenze centrate nell'origine e abbiamo

$$\oint \frac{z^{x-1}}{1+z}dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1}\frac{z^{x-1}}{1+z} = (-1)^{x-1}2\pi i$$

dove il segno varia a causa del fatto che $\log|-1| + i\arg(-1) = \pi i$. Vedremo che3 comunque tutto questo non dipernde, per il teorema di Cauchy, dalla scelta di ρ e R.[3] Prima di procedere con i calcoli osserviamo che

ro (48)
$$\left|e^z\right| \le \left|e^{\operatorname{Re} z}\right| \Longrightarrow e^{(x-1)\log\rho} \le \rho^{x-1}.$$

[3] Su ρ il segno è negativo perchè stiamo procedendo in senso orario.



5

Adesso si ha

$$\left|\oint_{\gamma_1}\frac{z^{x-1}}{1+z}dz\right|\le\oint_{\gamma_1}\left|\frac{z^{x-1}}{1+z}\right|dz\le\frac{\rho^{x-1}}{|1+z|}|dz|\le\rho^{x-1}\oint_{\gamma_1}\frac{dz}{|1+z|}\le$$

$$\le(|1+z|\ge 1-\rho)\le\frac{\rho^{x-1}}{1-\rho}\oint_{\gamma_1}|dz|=2\pi\rho\frac{\rho^{x-1}}{1-\rho}=2\pi\frac{\rho^{x}}{1-\rho}\xrightarrow{\rho\to 0}0.$$

Per quanto riguarda l'altra circonferenza si ha

$$\left|\oint_{\gamma_1}\frac{z^{x-1}}{1+z}dz\right|\le\oint_{\gamma_1}\left|\frac{z^{x-1}}{1+z}\right|dz\le\oint_{\gamma_2}\frac{R^{x-1}}{|1+z|}|dz|\le(x\in(0,1)\Rightarrow x-1<0)\le$$

$$\le\frac{R^{x-1}}{R-1}2\pi R=2\pi\frac{R^{x}}{R-1}\xrightarrow{R\to 0}0.$$

Adesso, ritornando ai residui, abbiamo la seguente situazione:

$$\oint \frac{z^{x-1}}{1+z}dz = 2\pi i e^{\pi i(x-1)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du - \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}e^{2\pi i(x-1)}}{1+u}du =$$
$$= \left(1 - e^{2\pi i(x-1)}\right)\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du.$$

e quindi abbiamo trovato che

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du = \frac{2\pi i e^{\pi i(x-1)}}{1-e^{2\pi i(x-1)}}.$$

Siamo quasi vicini alla conclusione; osserviamo ora che

$$1 - e^{2\pi i(x-1)} = e^{\pi i(x-1)}\left(e^{\pi i(1-x)} - e^{-\pi i(1-x)}\right)2i\sin[\pi(1-x)]$$

per le note formule di scrittura dei numeri complessi. Quindi in realtà possiamo scrivere che l'integrale vale

$$\frac{2\pi i e^{\pi i(x-1)}}{2i\sin[\pi(1-x)]e^{\pi i(x-1)}} = \frac{\pi}{\sin[\pi(1-x)]}$$

dove, grazie alle formule di addizione si ha $\sin[\pi(1-x)] = \sin\pi x$. E questo conclude la seconda delle dimostrazioni. □

Osservazione 14.1. *Si noti che se nella seconda equazione funzionale si pone $z = \frac{1}{2}$ allora*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

15. Giovedì 15.11.2012 - Formula di duplicazione di Gauss

Legendre aveva dimostrato che $\forall\, z \in \mathbb{C}$ si ha

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}2^{1-2z}\Gamma(2z) \tag{49}$$

mentre Gauss, successivamente, riuscì a generalizzare tale formula.

Teorema 15.1. *Vale la seguente formula di duplicazione:*

g7

$$\boxed{\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz) \qquad \forall\, n>0} \tag{50}$$

Dimostrazione. Sappiamo che vale l'equazione (41) che ora riscriviamo e proviamo a manipolare.

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^z m!}{z(z+1)\dots(z+m)} = \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{z+m}\cdot\frac{m^z(m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)}$$

ma

$$\frac{m}{z+m} \to 1$$

per $m \to +\infty$ e quindi possiamo considerare

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to+\infty} \frac{m^z(m-1)!}{z(z+1)\dots(z+m-1)}.$$

Ma se questa successione converge, allora lo farà anche una sua sottosuccessione; noi sceglieremo quella dei multipli di z ossia nz e la useremo nello sviluppo del seguente prodotto.

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) =$$
$$= \frac{n^{nz-1}}{\lim_{m\to+\infty}\frac{(nm)^{nz}(nm-1)!}{nz(nz+1)\dots(nz+nm-1)}}\prod_{k=0}^{n-1}\lim_{m\to+\infty}\frac{m^{z+\frac{k}{n}}(m-1)!}{\left(z+\frac{k}{n}\right)\dots\left(z+m-1+\frac{k}{n}\right)}$$

ma ora, poichè il limite del prodotto è il prodotto dei limiti possiamo scrivere

$$n^{nz-1}\lim_{m\to+\infty}\frac{\prod_{k=0}^{n-1} m^{z+\frac{k}{n}}(m-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right)\dots\left(z+m-1+\frac{k}{n}\right)}\;\frac{\overbrace{nz(nz+1)\dots(nz+nm-1)}^{(\bullet)}}{(nm)^{nz}(nm-1)!}$$

ma vediamo come esprimere meglio i singoli pezzi.

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1} m^{z+\frac{k}{n}}(m-1)! = [(m-1)!]^n m^z m^{z+\frac{1}{n}} \dots m^{z+\frac{n-1}{n}} &= \\ = m^{nz+\frac{1}{n}+\dots+\frac{n-1}{n}} = m^{nz+\frac{1}{n}(1+2+\dots+n.1)} = m^{nz+\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}} &= \\ = m^{nz+\frac{n-1}{2}}[(m-1)!]^n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right)\dots\left(z+\frac{k}{n}+m-1\right) = \\ &= \underbrace{z(z+1)\dots(z+m-1)}_{k=0}\underbrace{\left(z+\frac{1}{n}\right)\left(z+1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(z+\frac{1}{n}+m-1\right)}_{k=1}\cdot\dots \\ &\dots\cdot\underbrace{\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\dots\left(z+m-1+\frac{n-1}{n}\right)}_{k=n-1}\end{aligned}$$

Adesso sistemiamo i termini prendendo il primo fattore per $k=0$, il primo per $k=1$ fino a $k=n-1$, poi ripetiamo la cosa per il secondo fattore e così via. Ci ritroviamo

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right) &= \prod_{k=0}\left(z+\frac{k}{n}\right)\prod_{k=1}\left(z+\frac{k}{n}\right)\cdots\prod_{k=n-1}\left(z+\frac{k}{n}\right) = \\ &= z\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\left(z+\frac{n-1}{n}\right)\cdot(z+1)\left(z+1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(z+1+\frac{n-1}{n}\right)\cdot \\ &\cdot\dots(z+m-1)\left(z+m-1+\frac{1}{n}\right)\dots\left(z+m-1+\frac{n-1}{n}\right)\end{aligned}$$

Osserviamo che ogni fattore è il successivo $-\frac{1}{n}$ o equivalentemente il precedente $+\frac{1}{n}$ e in definitiva tutto questo equivale ad

$$z(z+1)\dots\left(z+m-\frac{1}{n}\right).$$

Infine

$$(\bullet) = n^{nm}\left(z\left(z+\frac{1}{n}\right)\dots\left(z+m-\frac{1}{n}\right)\right).$$

Quindi dobbiamo calcolarci

$$n^{nz-1}\lim_{m\to+\infty}\frac{[(m-1)!]^n m^{nz+\frac{n-1}{2}} n^{nm}}{(nm)^{nz}(nm-1)!}$$

dove semplifichiamo il termine prima del limite con n^{nz} a denominatore, poi uniamo il rimanente n^{-1} con n^{nm} e semplifichiamo il rimanente m^{nz} del denominatore con quello a numeratore così da arrivare a

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{[(m-1)!]^n m^{\frac{n-1}{2}} n^{nm-1}}{(nm-1)!}$$

che non dipende più da z ma solo dall'n fissato inizialmente e quindi è costante per tutti i z. Quindi allo stato attuale abbiamo trovato che

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right) = \lim_{m\to+\infty}\frac{[(m-1)!]^n m^{\frac{n-1}{2}} n^{nm-1}}{(nm-1)!}.$$

Abbiamo detto che l'ultima quantità si mantiene costante per ogni z e quindi è lecito vedere cosa accade se scegliamo, per esempio, $z=\frac{1}{n}$. Andando a sotituire, il termine prima della produttoria si semplifica, dato che $\Gamma(1)=1$ e rimane solo

$$\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

ma osserviamo che per $k=n-1$ si ha ancora il prodotto per $\Gamma(1)$ e quindi facciamo il prodotto fino a $k=n-2$ ossia

$$\prod_{k=0}^{n-2}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right) = \prod_{h=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{h}{n}\right) > 0$$

dato che la Γ è positiva sui reali.
Adesso, come nel caso di $\Gamma(1/2)$ ci calcoliamo il quadrato e successivamente lo incolonniamo come segue:

$$\left[\prod_{h=1}^{n-1}\gamma\left(\frac{h}{n}\right)\right]^2=\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)^2=\begin{array}{lll}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot & \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\dots & \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\\ \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot & \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\dots & \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\end{array}$$

Mettendo così il prodotto abbiamo voluto evidenziare come sia possibile, in realtà, scrivere il nostro quadrato come

$$\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{h}{n}\right)=(45)=\prod_{h=1}^{n-1}\frac{\pi}{\sin\frac{h\pi}{n}}=\frac{\pi^{n-1}}{\prod_{h=1}^{n-1}\sin\frac{h\pi}{n}}$$

quindi tramite questo passaggio scopriamo che

g8 (51)
$$\boxed{\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\prod_{h=1}^{n-1}\sin\frac{h\pi}{n}}}}$$

Non è ancora finita. Consideriamo ora il polinomio $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$ le cui radici sono le radici n-esime dell'unità $x_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$; tolto $k=0$ che da $x_0=1$ possiamo scrivere

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\prod_{k=1}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)$$

ma questa è un'identità e quindi vale per ogni x. Scegliendo $x=1$ e andando a sostituire troviamo che

$$\begin{aligned}n&=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)=\prod_{k=1}^{n-1}\left[-e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}}\right)\right]=\\&=\prod_{k=1}^{n-1}-e^{i\frac{k\pi}{n}}\cdot 2i\sin\frac{k\pi}{n}=(-1)^{n-1}2^{n-1}e^{i\frac{\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\\&=2^{n-1}\left(-ie^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=(e^{i\frac{\pi}{2}}=i)=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.\end{aligned}$$

A questo punto il denominatore della (51) in realtà è tale che

$$\sqrt{\prod_{h=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}=\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}$$

e di conseguenza

$$\frac{n^{nz-1}}{\Gamma(nz)}\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=\prod_{h=1}^{n-1}\Gamma\left(\frac{h}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\prod_{k=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(nz)}{n^{nz-1}}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\Gamma(nz)$$

e questo conclude la dimostrazione. □

16. Mercoledì 21.11.2012 - Formula di Stirling generalizzata

L'obiettivo è trovare uno sviluppo asintotico per $\log\Gamma(z)$: vediamo un pò com'è la situazione. Se eliminiamo il semiasse $\operatorname{Im} z\le 0$ la Γ che già di suo non ha zeri, adesso non avrà più nemmeno i poli e quindi ci ritrobiamo in un aperto semplicemente connesso iin cui $\log\Gamma(z)$ è univocamente determinato e questo garantisce l'assenza di polidromia.
Adesso poniamo $\log\Gamma(1)=1$: implicitamente abbiamo fissato il logaritmo nella sua determinazione principale, altrimenti avremmo avuto $\log 1=i\arg 1=2k\pi i$. La formula che esibiamo, però, ha validità al di fuori di un angolo di ampiezza ε con asse centrale sovrapposto al semiasse $\operatorname{Im} z\le 0$.

Teorema 16.1. *Per ogni fissato $q \geq 1$ in $\mathbb{N}$ vale:*

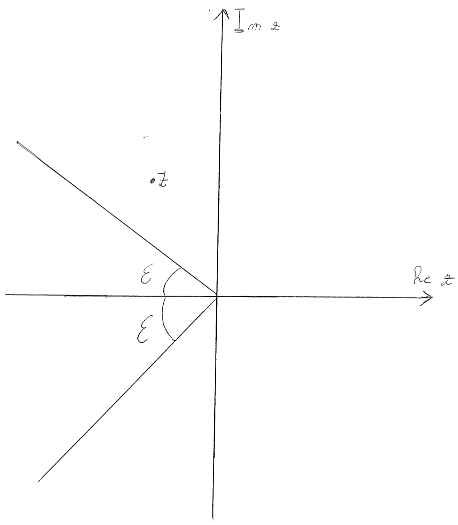
g9 (52)
$$\boxed{\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}} + O_{q,\varepsilon}\left(\frac{1}{|z|^{2q+1}}\right)}$$

Osservazione 16.1. *Si osservi che una volta fissato l'angolo ε l'errore commesso ne dipende.*

Dimostrazione. Fissiamo z e consideriamo il logaritmo della formula di Gauss cioè

$$\begin{aligned}\log\frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)} &= z\log n - \log(z+n) + \log\left(\frac{1}{z}\frac{2}{z+1}\cdots\frac{n}{z+n-1}\right) = \\ &= z\log n - \log(z+n) - \log z - \log\frac{z+1}{2} - \cdots - \log\frac{z+n-1}{n} = \\ &= z\log n - \log(z+n) - \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z-1}{k}\right).\end{aligned}$$

Adesso applichiamo la formula di sommazzione di Eulero - Mc Laurin all'ultima sommatoria scritta. Prima di farlo raccogliamo alcune informazioni sulle derivate di $f(x) = \log\left(1+\frac{z-1}{x}\right) = \log(x+z-1) - \log x$.



6

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{z+x-1} - \frac{1}{x} \\ f''(x) = -\frac{1}{(z+x-1)^2} + \frac{1}{x^2} = -1!(z+x-1)^{-2} + 1!x^{-2} \\ f'''(x) = 2!(z+x-1)^{-3} - 2!x^{-3} \\ \vdots \\ f^{(q)}(x) = (-1)^{q-1}(q-1)!(z+x-1)^{-q} + (-1)^q(q-1)!x^{-q}. \end{cases}$$

Nella formula di sommazione mandiamo $q \longrightarrow 2q+1$ così poi da ritrovare che $\left[\frac{q}{2}\right] \longrightarrow q$. Quindi la sommatoria all'interno della formula di sommazione, per n, m interi, diventa

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{[\frac{q}{2}]}\frac{B_{2r}}{2r!}\left(f^{(2r-1)}(n) - f^{(2r-1)}(m)\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(2k-2)!}{(z+n-1)^{2k-1}} - \frac{(2k-2)!}{n^{2k-1}} - \frac{(2k-2)!}{z^{2k-1}} + (2k-2)!\right).\end{aligned}$$

Allora la formula di sommazione risulta essere (ricordiamoci del segno negativo davanti alla sommatoria che stiamo rappresentando, il quale ci da ora i segni invertiti):

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{z+1}{k}\right)=-\int_1^n\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)dx-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\log\left(\frac{n+z-1}{n}\right)-\\
&-\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{(2k-2)!}{(z+n-1)^{2k-1}}-\frac{(2k-2)!}{n^{2k-1}}-\frac{(2k-2)!}{z^{2k-1}}+(2k-2)!\right)-\\
&-\frac{1}{(2q+1)!}\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})\left(\frac{(2q)!}{z+x-1}+(-1)^{2q+1}\frac{(2q)!}{x^{2q+1}}\right).
\end{aligned}$$

Le ultime due righe qui sopra sono sempligicabili eliminando $(2q)!$ e $(2k-2)!$; questo ci da

$$\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\left(\frac{1}{(z+n-1)^{2k-1}}-\frac{1}{n^{2k-1}}-\frac{1}{z^{2k-1}}+1\right)-\\
&-\frac{1}{2q+1}\int_1^n B_{2q+1}(\{x\})\left(\frac{1}{(z+x-1)^{2q+1}}-\frac{1}{x^{2q+1}}\right)dx.
\end{aligned}$$

Ora interessiamoci ai termini prima della sommatoria: l'integrale è tale che

$$\begin{aligned}
&\int_1^n\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)dx=x\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)-\int_1^n x\left(\frac{1}{x+z-1}-\frac{1}{x}\right)dx=\\
&=x\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)-x\int\frac{x+z-1-z-1}{x+z-1}dx=x\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)+\\
&+(z-1)\int\frac{dx}{z+x-1}=x\big(\log(z+x-1)-\log x\big)+(z-1)\log(z+x-1)=\\
&=(z+x-1)\log(z-x-1)-x\log x.
\end{aligned}$$

Sostituento 1 ed n nella formula trovata abbiamo

$$\int_1^n\log\left(1+\frac{z-1}{x}\right)dx=(z+n-1)\log(z+n-1)-n\log n-z\log z.$$

Quindi abbiamo allo stato attuale (trascurati l'ultimo integrale e l'ultima sommatoria nella formula di sommazione di Eulero - Mc Laurin) la seguente situazione:

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(z)&=z\log n-\frac{1}{2}\log z-\frac{1}{2}\log(z+n-1)+\frac{1}{2}\log n-\log(z+n)-\\
&-(z+n-1)\log(z+n-1)+n\log n+z\log z=\\
&=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-\left(z+n-1+\frac{1}{2}\right)\log(z+n-1)+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+\\
&+z\log n-\log(z+n).
\end{aligned}$$

Adesso aggiungiamo e togliamo $\log(z+n-1)$. Osserviamo che $-\log(n+z-1)$ ci da

$$\begin{aligned}
&-\left(n+z+\frac{1}{2}\right)\log(n+z-1)=\left(n+z-1=n\left(1+\frac{z-1}{n}\right)\right)=\\
&=-\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\left[\log n+\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)\right] \qquad (53)
\end{aligned}$$

mentre $\log(n+z-1)$ da

$$-\log(z+n)+\log(z+n-1)=\log\left(1-\frac{1}{z+n}\right).$$

In definitiva per ora abbiamo i primi termini dello sviluppo ossia

$$-\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)+\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z+\log\left(1-\frac{1}{z+n}\right).$$

E' il momento di passare al limite per $n\to+\infty$:

$$\log\left(1-\frac{1}{z+n}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0;$$

poichè $\log(1+z)\simeq z+\frac{z^2}{2}+\dots$ allora

$$\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)=\frac{z-1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

e

$$-\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{z-1}{n}\right)\simeq-\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{z-1}{n}\right)$$

che, messo in evidenza $\frac{1}{n}$, converge a $-(z-1)$. Infine

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\left(\frac{1}{(z+n-1)^{2k-1}}-\frac{1}{n^{2k-1}}\right)\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

e tutto questo ci riempie di gioia dato che la situazione sta migliorando. Al momento

$$\log\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z-z+C_q+\sum_{k=1}^{q}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{z^{2k-1}}-\frac{1}{2q+1}\int_1^{+\infty}\frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(x+z-1)^{2q+1}}dx$$

dove nella costante C_q è rientrato, dato che non dipende più da z, anche il termine

$$\frac{1}{2q+1}\int_1^{+\infty}\frac{B_{2q+1}(\{x\})}{x^{2q+1}}dx.$$

Consideriamo ora $x+1:=\xi$: fatta questa scelta osserviamo che $\{x+1\}=\{\xi\}$ e $dx=d\xi$. Questo ci permetterà di cambiare l'intervallo di integrazione ossia invece che partire da 1 lo si farà da 0. Per comodità notazionale richiamiamo $\xi=x$ e ricordiamo che

$$B_n'(x)=nB_{n-1}\Longrightarrow dB_n(x)=nB_{n-1}(x)dx.$$

Adesso dimostreremo che

$$\frac{1}{2q+1}\int_0^{+\infty}\frac{B_{2q+1}(\{x\})}{(x+z)^{2q+1}}dx=O_{q,\varepsilon}\left(\frac{1}{|z|^{2q+1}}\right).$$

Si ha

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2q+1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2q+2}\frac{dB_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}=(\text{per parti})=\frac{1}{(2q+1)(2q+2)}\left[\frac{B_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+1}}\right]_0^{+\infty}-\\&-\frac{1}{(2q+1)(2q+2)}\int_0^{+\infty}B_{2q+2}(\{x\})d(z+x)^{-(2q+1)}=\\&=\left(d(z+x)^{(2q+1)}=-(2q+1)(z+x)^{-(2q+2)}dx\right)=\\&=\frac{1}{(2q+1)(2q+2)}\frac{B_{2q+2}}{z^{2q+1}}+\frac{1}{2q+2}\int_0^{+\infty}\frac{B_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+2}}dx.\end{aligned}$$

Sia ora ε tale che $-\pi+\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$.
Si ha $|z+x|=|z|^2+x^2-2x|z|\cos\gamma$ ma, preso $\varepsilon\le\gamma\le\pi$ avremo $-1\le\cos\gamma\le 1$ e quindi $|z|^2+x^2-2x|z|\cos\gamma\ge|z|^2+x^2-2x|z|\cos\varepsilon$.
Nella prossima disuguaglianza interverrà il fatto che $B_{2q+2}(\{x\})$ è periodica e quindi la frazione da integrare all'infinito è $\ll 1$.

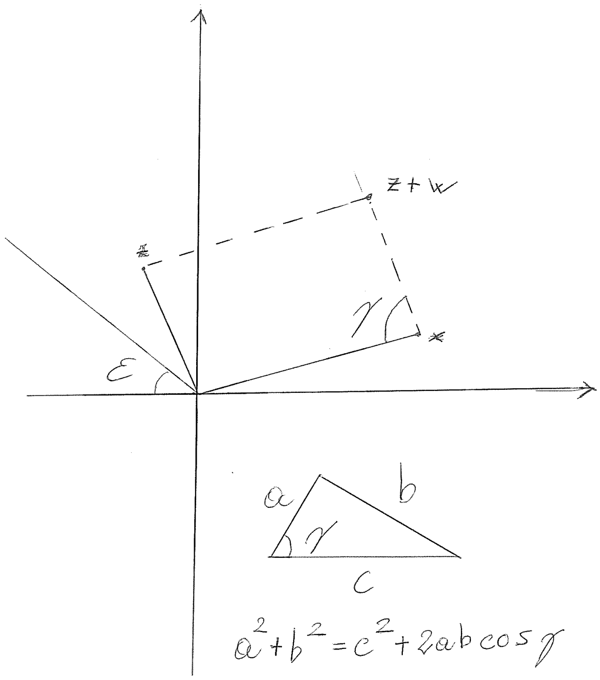
$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2q+2}\int_0^{+\infty}\frac{B_{2q+2}(\{x\})}{(z+x)^{2q+2}}dx\ll q\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(|z+x|^2)^{q+1}}\le\\&\le\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(|z|^2+x^2-2x|z|\cos\varepsilon)^{q+1}}\le(x:=t+|z|\cos\varepsilon)\le\\&\le\int_{-|z|\cos\varepsilon}^{+\infty}\frac{dt}{(|z|^2-2|z|(t+|z|\cos\varepsilon)\cos\varepsilon+t^2+|z|^2\cos^2\varepsilon+2t|z|\cos\varepsilon)^{q+1}}.\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il denominatore si ha

$$\left[|z|^2\left(1-2\cos^2\varepsilon+\cos\varepsilon\right)+t^2\right]^{q+1}=\left[|z|^2\sin^2\varepsilon+t^2\right]^{q+1}$$

quindi l'ultimo può essere ulteriormente maggiorato come segue:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(|z|^2\sin^2\varepsilon+t^2)^{q+1}}=(t:=|z|u\sin\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|z|\sin\varepsilon\,du}{|z|^2\sin^2\varepsilon(1+u^2)^{q+1}}=\\&=\frac{1}{(|z|\sin\varepsilon)^{2q+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{q+1}}\overset{\varepsilon\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty.\end{aligned}$$



7

Adesso osserviamo che la costante è quella già calcolata in precedenza: si può mostrare la cosa sia ragionando per assurdo sia utilizzando la formula

$$\log\Gamma(z) + \log\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \log\sqrt{\pi} + \log 2 - 2z\log z + \log\Gamma(2z).$$

□

17. Giovedì 22.11.2012 - Teorema di Cauchy per funzioni complesse

Studieremo equazioni differenziali omogenee di ordine n nel campo analitico ossia dove sia i coefficienti che le funzioni incognite sono complessi.

$$y^{(n)} = p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \tag{54}$$

con x variabile complessa in un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$. I $p_i(x)$ sono funzioni regolari in un disco $|x - x_0| \leq a$.
Posti i dati iniziali

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{55}$$

allora si ha un Problema di Cauchy per il quale vale il teorema di esistenza ed unicità. Qui ne daremo la dimostrazione nel campo analitico.

Dimostrazione. L'idea è di cercare una serie di potenze con coefficienti che sarranno opportunamente scelti a posteriori al fine di soddisfare l'equazione con i dati iniziali associati.

(!)
Formalmente abbiamo

$$y=\sum_{r=0}^{\infty} c_r(x-x_0)^r \qquad y'=\sum_{r=1}^{\infty} r c_r(x-x_0)^{r-1}$$

e così via fino all'ordine dell'equazione. Ma in una serie di Taylor avremo i $c_r=(-1)^r\frac{y^{(r)}}{r!}$ quindi

$$c_0=y_0 \qquad c_1=y_0' \qquad c_2=\frac{y_0''}{2!}$$

e così via fino a $c_{n-1}=\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}$. Sostituendo gli sviluppi in serie nell'equazione, (sia quelli di y che dei $p_i(x)$) una volta fissati i coefficienti l'unicità risulta evidente.
($\exists$)
L'obiettivo è dimostrare che trovato lo sviluppo formale in serie di Taylor della candidata soluzione, allora il raggio di convergenza sia non nullo affinchè essa esista. Consideriamo, per semplicità, $n=2$ così da avere

$$\begin{cases} y''=p(x)y'+q(x)y \\ y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \end{cases} \tag{56}$$

dove

$$p(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r(x-x_0)^r \qquad q(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r(x-x_0)^r$$

sono gli svilippi di Taylor dei coefficienti nel disco. Sostituendo nell'equazione abbiamo

$$\sum_{r=2}^{\infty} r(r-1)c_r(x-x_0)^{r-2}=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r(x-x_0)^r\sum_{r=1}^{\infty} r c_r(x-x_0)^{r-1}+\sum_{r=0}^{\infty}\beta_r(x-x_0)^r\sum_{r=0}^{\infty} c_r(x-x_0)^r$$

e calcolando il prodotto alla Cauchy troviamo

$$\begin{cases} 1\cdot 2c_2=\alpha_0c_1+\beta_0c_0 \\ 2\cdot 3c_3=2\alpha_0c_2+(\alpha_1+\beta_0)c_1+\beta_1c_0 \\ 3\cdot 4c_4=3\alpha_0c_3+(2\alpha_1+\beta_0)c_2+(\alpha_2+\beta_1)c_1+\beta_2c_0 \end{cases}$$

e così via; ma osserviamo che c_1 e c_0 sono assegnati quindi deriviamo c_2 dalla prima, c_3 dalla seconda e iterando la procedura troviamo in maniera successiva tutti i coefficienti. Si osservi che ogni coefficiente è combinazione lineare degli sviluppi di Taylor di p e q.
Adesso $\forall\, n\geq r$ abbiamo

$$c_r=\sum_{s=1}^{r} A_{rs}c_{r-s}.$$

Poichè, per ipotesi, i coefficienti $p_i(x)$ sono regolari sul disco e quindi su un chiuso, essi sono dotati di massimo M_i. Ai fini della dimostrazione è sufficiente che $\forall\, x\in|x-x_0|<a\Longrightarrow|p_i(x)|\leq M_i$. A questo punto chiamiamo

$$p_i(x)=\sum_{r=0}^{\infty}p_i^{(r)}(x-x_0)^r \qquad p_i^{(r)}:=\frac{p_i^{(r)}}{r!}$$

e, ricordando che

$$f^{(r)}(x_0)=\frac{r!}{2\pi i}\oint_{|x-x_0|=a}\frac{f(x)}{|x-x_0|^{r+1}}dx$$

possiamo procedere con la seguente maggiorazione:

$$|p_i^{(r)}(x_0)|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{|x-x_0|=a}\frac{|p_i(x)|}{|x-x_0|^{r+1}}|dx|\leq\frac{M_i}{2\pi a^{r+1}}\oint_{|x-x_0|=a}|dx|=\frac{M_i}{a^r}.$$

Adesso definiamo

$$P_i(x)=\frac{M_i}{1-\frac{x-x_0}{a}} \qquad i=1,\dots,n$$

e osservando che $|x-x_0|\leq a\Longrightarrow\frac{x-x_0}{a}\leq 1$ troviamo che

$$P_i(x)=M_i\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^r=\sum_{r=0}^{\infty}p_i^{(r)}(x-x_0)^r\Longrightarrow p_i^{(r)}=\frac{M_i}{a^r}.$$

Qui, a questo punto, abbiamo trovato che $|p_i^{(r)}| \leq P_i^{(r)}$. Adesso consideriamo i fissato e $r \in [0, +\infty)$. Diamo qui una definizione che ci sarà utile nel proseguire.

Definizione 17.1 (**Dominanti alla Cauchy**). *Siano $f(x), g(x)$ olomorfe nel punto x_0. Allora $f(x)$ è dominata da $g(x)$ in x_0 se*

$$|f^{(r)}(x_0)| \leq g^{(r)}(x_0) \qquad \forall\, r.$$

Torniamo a noi: cosa aveva fatto Cauchy? Aveva trovato l'equazione dominante la nostra equazione di partenza ossia aveva trovato

$$Y^{(n)} = P_1(x)Y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)Y' + P_n(x)Y \qquad Y = \sum_{r=0}^{\infty} C_r(x-x_0)^r$$

e imponendo le condizioni iniziali otteniamo, similmente a quanto già visto, che

$$C_r = \sum_{s=1}^{r} B_{rs}C_{r-s}$$

dove i B_{rs} sono coefficienti positivi e tali che $|A_{rs}| \leq B_{rs}$, proprio per il fatto che $|p_i^{(r)}| \leq P_i^{(r)}$.
Ci si è ridotti a studiare le soluzioni dell'equazione dominante perchè è relativamente più semplice. In particolare

$$\sum_{r=0}^{\infty} \left|C_r(x-x_0)^r\right| \leq \sum_{r=0}^{\infty} C_r|x-x_0|^r$$

e quindi dobbiamo mostrare che l'ultima serie scritta converge con raggio di convergenza non nullo.
Cambiamo variabile: sia $\xi := \frac{x-x_0}{a}$. Di conseguenza abbiamo dei cambiamenti del tipo

$$\frac{dY}{d\xi} = \frac{dY}{dx}\frac{dx}{d\xi} = a\frac{dY}{dx} \qquad P_i(\xi) = \frac{M_i}{1-\xi}$$

mod

$$\frac{1}{a^n}\frac{d^nY}{d\xi^n} = \frac{M_1}{1-\xi}\frac{1}{a^{n-1}}\frac{d^{n-1}Y}{d\xi^{n-1}} + \cdots + \frac{M_n}{1-\xi}Y. \tag{57}$$

Adesso moltiplichiamo tutto per $(1-\xi)a^n$ e poniamo lo sviluppo di Taylor di Y come

$$Y = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r \xi^r$$

che dovrà soddisfare (57); di conseguenza i coefficienti saranno legati dalla seguente relazione.

mod2

$$(n+r)!\gamma_{n+r} = r(n+r-1)!\gamma_{n+r-1} + \sum_{s=1}^{n}(n+r-s)!M_s a^s \gamma_{n+r-s} \qquad r = 0, \dots, +\infty \tag{58}$$

Osserviamo che per costruzione $\gamma_r = C_r a^r$. Detto questo, abbiamo due possibili casi.

(1) Il caso banale ossia quello in cui abbiamo scelto dall'inizio tutti i coefficienti $c_i \equiv 0$; di conseguenza, tramite la costruzione per ricorrenza, avremo tutti i $\gamma_r \equiv 0$. Quindi la soluzione sarà $Y \equiv 0$.

(2) Il caso non banale ossia quello in cui abbiamo almeno un $c_i \neq 0$. Questo significa che da un certo $\gamma_r > 0$, per induzione, saranno non nulli anche tutti i successivi $\forall\, n \geq r$. A questo punto dividiamo la (58) per $(n+r)!$ così da trovare

$$\gamma_{n+r} = \frac{1}{n+r}\gamma_{n+r-1} + \sum \cdots$$

dove nella sommatoria troviamo per la seconda volta il termine γ_{n+r-1}. Raccogliendo troviamo

$$\gamma_{n+r} = \frac{r+M_1 a}{n+r}\gamma_{n+r-1} + \underbrace{\vartheta_{n+r-2}}_{\geq 0}.$$

A questo punto, dato che M_1 è una costante, nulla ci impedisce di incrementarlo al fine di avere $M_1 a > n$. Questo implica che $\gamma_{n+r} > \gamma_{n+r-1}$ $\forall\, r$. Ora

$$\frac{\gamma_{n+r}}{\gamma_{n+r-1}} = \frac{r+M_1 a}{r+m} + \sum_{s=2}^{n} \frac{(n+r-s)!M_s a^s \gamma_{n+r-s}}{\gamma_{n+r-1}(n+r)!}$$

e per $r \to +\infty$ si ha

$$\frac{\gamma_{n+r}}{\gamma_{n+r-1}} \longrightarrow 1 \iff \frac{\gamma_{n+r-1}}{\gamma_{n+r}} \longrightarrow 1$$

e finalmente troviamo che la serie ha raggio di convergenza 1. Adesso se ritorniamo a $a\xi \longrightarrow x - x_0$ troviamo che

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_r a^r \xi^r$$

ha raggio di convergenza $\rho = a$.

$\square$

18. Mercoledì 28.11.2012 - Richiami sulle EDO e integrale fondamentale del primo tipo

Riscriviamo il nostro problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y^{(n)} = p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y \\ y(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Cosa succede se supponiamo che il punto x_0 sia un punto singolare isolato per almeno uno dei coefficienti $p_i(x)$? Vedremo che si ha una nuova varietà di fenomeni e le soluzioni no saranno più regolari.
Prima di addentrarci nella questione, diamo alcuni richiami. Data la EDO, se y_1 e y_2 sono due soluzioni allora anche Cy_1 oppure y_1+y_2 sono soluzioni. Questo vale ancora se abbiamo $y_1,\dots,y_n$ integrali particolari in un intorno di x_0(in questi richiami supposto regolare).
Un integrale y è detto generale se contiene tutte le soluzioni o, per essere più precisi, se possiamo disporre di arbitrarie costanti per soddisfare arbitrari problemi ai dati iniziali

$$(S)\qquad \begin{cases} y(x_0) = c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) = y_o' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \qquad (59)$$

Quindi risolveremo il sistema (S) con incognite i c_i in un intorno di x_0 se e solo se il wronskiano è tale che

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Notiamo che, in virtù del teorema di esistenza e unicità, se $W(x_0) = 0$ allora $W \equiv 0$ in tutto il disco $|x - x_0| < a$ e questo significa che gli integrali particolari y_i sono linearmente dipendenti cioè esistono degli $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ non tutti nulli tali che $\alpha_1y_1 + \cdots + \alpha_ny_n = 0$.
Se, invece, partiamo dal porre $W = 0$, troviamo che Y soddisfa il problema di Cauchy con dati iniziali tutti nulli e, per il teorema di esistenza e unicità, è l'unica soluzione possibile.

Teorema 18.1 (**Formula di Liouville**). *Si ha che* $\forall\, x \in \Delta_a(x_0)$ *vale la seguente formula:*

edo1

$$\boxed{W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}} \qquad (60)$$

Dimostrazione. L'idea è di calcolarci $W'(x)$. In generale se abbiamo

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

allora

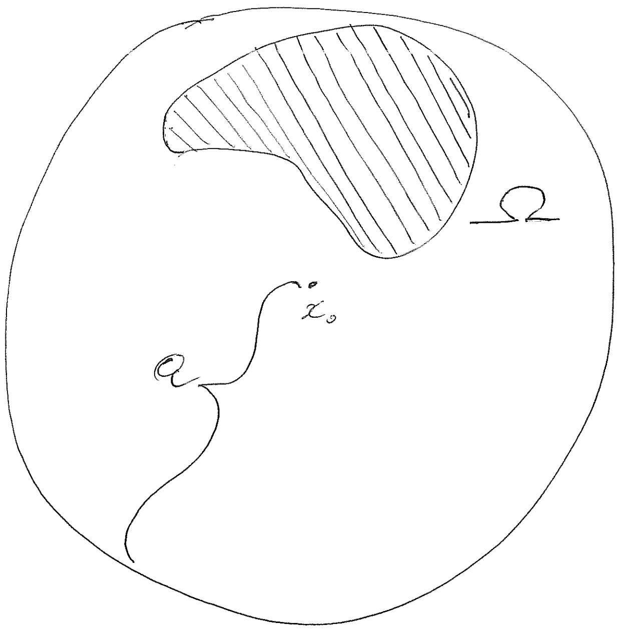
$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & \dots & f_{1n}'(x) \\ f_{21}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}'(x) & \dots & f_{2n}'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}'(x) & \dots & f_{nn}'(x) \end{vmatrix}$$

Quando andiamo, quindi, a calcolarci $W'(x)$ il contributo della riga i-esima è uguale a quello della $i+1$-esima; di conseguenza l'unico contributo è dato dall'ultima riga. Se mettiamo in evidenza uno qualsiasi dei $p_i(x)$ (per esempio $i = 1$) troviamo che $W'(x) = p_1(x)W(x)$; per separazione di variabili e integrando otteniamo la formula. □

Studiaremo ora gli integrali dell'equazione

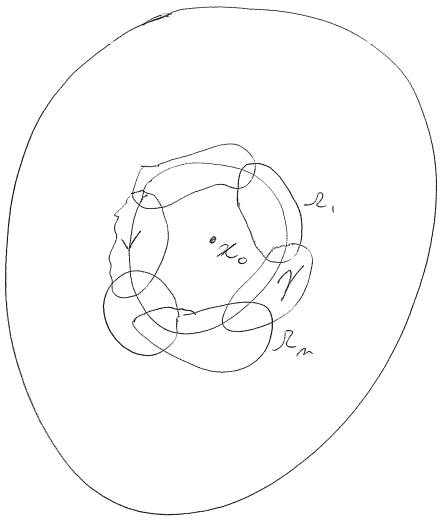
$$y'' = p_1(x)y' + p_2(x)y.$$

Supponiamo che i coefficienti siano funzioni olomorfe nel disco bucato $\Delta := \Delta_a(x_0) \setminus \{x_0\}$ e ci chiediamo che forma abbiano gli integrali in un intorno di x_0. Il caso di nostro interesse si ha quando tale punto è un punto singolare isolato per almeno uno dei due coefficienti.
Vediamo di capirlo. Prendiamo un aperto semplicemente connesso $\Omega \subset \Delta$.



8

Sia $x_0 \in \Omega$ e, a patto di passare per altri aperti, facciamo una circuitazione attorno ad x_0. Si osservi che è necessario uscire da Ω perchè lo abbiamo ipotizzato semplicemente connesso. Sappiamo che che in esso $p_1(x)$ e $p_2(x)$ sono entrambi regolari e per il teorema di esistenza e unicità, in Ω, esistono due integrali linearmente indipendenti $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Notiamo che la curva γ che abbiamo utilizzato per la circuitazione è un compatto; di conseguenza per ogni $x \in \gamma$ possiamo



9

trovare un numero finito di aperti così da riuscire a ricoprirla.
Dopo aver percorso l'intera curva γ avremo che $y_1(x) \longmapsto Y_1(x) \qquad y_2(x) \longmapsto Y_2(x)$ che saranno ancora integrali dell'equazione in Ω. Questo significa che esistono quattro costanti tali che

$$\begin{cases} Y_1(x) = ay_1(x) + by_2(x) \\ Y_2(x) = cy_1(x) + dy_2(x) \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Se si potesse avere il determinante nullo allora i due nuovi integrali risulterebbero linearmente dipendenti, contro le ipotesi.
Sia ora $y_0(x)$ un integrale qualsiasi (ma non nullo) dell'equazione. Esso si scriverà come combinazione lineare di $y_1(x)$ e $y_2(x)$ quindi

$$y_0(x) = k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x)$$

e dopo aver percorso γ anch'esso andrà in un nuovo integrale $Y_0(x)$; vediamo come sono legati.

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= k_1 Y_1(x) + k_2 Y_2(x) = k_1[ay_1(x) + by_2(x)] + k_2[cy_1(x) + dy_2(x)] = \\ &= (k_1 a + k_2 c) y_1(x) + (k_1 b + k_2 d) y_2(x). \end{aligned}$$

Dunque, troviamo che y_0 dovrà essere quel che si dice un integrale invariantivo ossia tale che $Y_0(x) = \lambda y_0(x)$ con λ costante da determinarsi. Quindi $y_0(x)$ è un integrale invariantivo se e solo se

$$\begin{cases} k_1 a + k_2 c = \lambda k_1 \\ k_1 b + k_2 d = \lambda k_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-\lambda)k_1 + ck_2 = 0 \\ bk_1 + (d-\lambda)k_2 = 0 \end{cases} \iff A = \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ b & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ossia se e solo se

$$\lambda^2 - \operatorname{Tr} A + \det A = 0 \tag{61}$$

cioè quando si annulla l'equazione caratteristica del punto singolare x_0.

Osservazione 18.1. *Osserviamo che λ_1, λ_2 sono indipendenti dalla scelta di $y_1(x), y_2(x)$; inoltre devono essere entrambi non nulli. In caso contrario avremmo*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

ma noi abbiamo supposto che così non fosse.

Quindi, tornando a noi, esistono degli integrali invariantivi; ci si presentano due possibilità. Analizziamo la prima, cioè quella in cui $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dobbiamo capire come sono fatti gli $Y_0 = \lambda y_0$. Poniamo

$$r_1 = \frac{1}{2\pi i} \log \lambda_1$$

che a priori potrebbe avere infiniti valori dato che non è precisata la determinazione del logaritmo, dove, ricordiamo, esso è dato da $\log \lambda_1 = \underbrace{\log|\lambda_1|}_{L} + i \underbrace{\arg \lambda_1}_{\vartheta} + 2k\pi i$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$r_1 = \frac{L + i\vartheta}{2\pi i} + K.$$

Questa scrittura ci consente di osservare che due diversi valori di r_1 differiscono per un intero e questo è equivalente ad affermare che

$$\lambda_1 = e^{2\pi i r_1}.$$

Passando alle coordinate polari (ρ, ϑ) potremo scrivere ogni punto di Δ come $x - x_0 = \rho e^{i\vartheta}$ e quindi $(x - x_0)^{r_1} = \rho^{r_1} e^{i r_1 \vartheta}$. Troviamo che partendo da un punto x e effettuando una circuitazione attorno ad x_0 troviamo un incremento di λ_1 (ϑ incrementa di 2π), quindi, preso l'integrale invariantivo $\tilde{y}_1(x) = \lambda_1 y_1(x)$ in realtà si ha un incremento di $(x - x_0)^{r_1}$. Di conseguenza la funzione

$$\varphi_1(x) := \frac{\tilde{y}_1(x)}{(x - x_0)^{r_1}}$$

non cambia valore girando attorno al punto x_0 ossia non è per $\varphi_1(x)$ un punto di diramazione. Questo significa che è olomorfa in Δ. Iterando la stessa procedura per λ_2 troviamo che gli integrali particolari sono

$$\tilde{y}_1(x) = \varphi_1(x)(x - x_0)^{r_1} \qquad \tilde{y}_2(x) = \varphi_2(x)(x - x_0)^{r_2} \tag{62}$$

19. Giovedì 29.11.2012 - Integrale fondamentale del secondo tipo e teorema di Fuchs

Consideriamo ora il caso in cui $\lambda_1 = \lambda_2$ detto logaritmico, cosa della quale ci convinceremo in seguito. Ricordiamo che dire che le radici del polinomio caratteristico sono uguali è equivalente a dire che $r_1 \equiv r_2 (1)$.
Riusciamo ancora a trovare $\tilde{y}_1(x)$ ma abbiamo bisogno di un altro integrale particolare tale che essi siano linearmente indipendenti. Partiamo dal prendere un qualsiasi integrale dell'equazione $y_2(x)$ per il quale dobbiamo capire com'è fatto. Al solito facciamo una circuitazione, nel verso positivo, attorno al punto x_0 sulla curva γ e questo farà si che

$$\tilde{y}_1(x) \longmapsto \tilde{Y}_1(x) \qquad \tilde{y}_2(x) \longmapsto \tilde{Y}_2(x)$$

ma noi sapevamo già che $\tilde{Y}_1(x) = \lambda_1 (x - x_0)^{r_1} \varphi_1(x)$ e $Y_1(x) = a\tilde{y}_1(x)$ (qui si ha $a = \lambda_1$ e $c = 0$) e che $Y_2(x) = c\tilde{y}_1(x) + d y_2(x)$. Quindi l'equazione caratteristica assume la seguente forma.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & c \\ 0 & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda_1 - \lambda)(d - \lambda) = 0$$

ma abbiamo ipotizzato $\lambda_1 = \lambda_2$ e quindi $d = \lambda_1$. Troviamo allora

$$Y_2(x) = c\tilde{y}_1(x) + \lambda_1 y_2(x).$$

Si osservi che

$$\frac{Y_2(x)}{\tilde{Y}_1(x)} = \frac{y_2(x)}{\tilde{y}_1(x)} + \frac{c}{\lambda_1};$$

consideriamo ora la funzione

$$\frac{c}{2\pi\lambda_1 i} \log(x - x_0) = \frac{c}{2\pi\lambda_1 i} \log|x - x_0| + \frac{c}{2\pi\lambda_1} \arg(x - x_0) \xrightarrow{\gamma}$$

$$\xrightarrow{\gamma} \frac{c}{2\pi\lambda_1 i} \log|x - x_0| + 2\pi \frac{c}{2\pi\lambda_1}$$

che assume il comportamento su scritto una volta percorsa la curva γ. Allora, posta la costante $H := \frac{c}{2\pi\lambda_1 i}$ si ha che

$$H\log(x-x_0) \xrightarrow{\gamma} H\log(x-x_0) + \frac{c}{\lambda_1}.$$

Abbiamo trovato una funzione con lo stesso incremento di $\frac{Y_2(x)}{\tilde{Y}_1(x)}$. A questo punto nulla ci impedisce di definire la funzione

$$\psi(x) := \frac{Y_2(x)}{\tilde{Y}_1(x)} - H\log(x-x_0)$$

che non subisce variazioni dopo aver percorso γ ed è olomorfa nel disco bucato Δ. Questo ci ha permesso di scoprire la struttura del secondo integrale particolare in questo caso, ossia la seguente.

$$y_2(x) = \left[H\log(x-x_0) + \psi(x)\right]\tilde{y}_1(x) = (x-x_0)^{r_1}\varphi_1(x)\left[\frac{c}{2\pi\lambda_1 i}\log(x-x_0) + \psi(x)\right]. \tag{63}$$

Osserviamo che la polidromia è tutta confinata all'interno del logaritmo.
Adesso abbiamo due sottocasi:

(1) il caso in cui $c = 0$ dove tutti gli integrali sono invariantivi dato che si avrebbe

$$\begin{cases} Y_1(x) = \lambda_1\tilde{y}_1(x) \\ Y_2(x) = \lambda_1 y_2(x) \end{cases};$$

(2) il caso in cui $c \neq 0$ e quindi possiamo dividere tutto per $2\pi\lambda_1 i$ e abbiamo

$$\frac{\psi(x)}{H} + \log(x-x_0)$$

con $\psi(x)$ definita a meno di una costante additiva.

Teorema 19.1 (**Teorema di Fuchs**). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

ammetta un sistema fondamentale di integrali $y_1(x), y_2(x)$ rappresentabili nell'intorno di un punto singolare isolato x_0 tramite le formule

$$\begin{cases} y_1(x) = (x-x_0)^{r_1}\varphi_1(x) \\ y_2(x) = (x-x_0)^{r_2}\varphi_2(x) \end{cases} \tag{64}$$

oppure

$$\begin{cases} y_1(x) = (x-x_0)^{r_1}\varphi_1(x) \\ y_2(x) = (x-x_0)^{r_1}\varphi_1(x)\left[H\log(x-x_0) + \psi(x)\right] \end{cases} \tag{65}$$

,con $\varphi_1(x)$ e $\psi(x)$ funzioni regolari, e non abbiano singolarità essenziali ossia abbiano al più un polo in x_0 è che $p_1(x)$ abbia al più un polo semplice e $p_2(x)$ ne abbia al più uno del secondo ordine in x_0.

Osservazione 19.1. *Osserviamo che un punto x_0 per cui vale il teorema di Fuchs si dice singolare regolare o meglio ancora singolare fuchsiano.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$)(CN) Dimostriamo la necessità delle ipotesi.
Definiamo la famiglia

$$\mathscr{F} := \left\{F(x) := (x-x_0)^{\alpha}G(x) \mid \alpha \in \mathbb{C}, G \text{ ha al più un polo in } x_0\right\}.$$

Abbiamo certe proprietà delle funzioni che stanno in $\mathscr{F}$.

(1) Prodotti, quozienti e derivate di funzioni in $\mathscr{F}$ stanno in $\mathscr{F}$. Per esempio

$$F'(x) = \alpha(x-x_0)^{\alpha-1}G(x) + (x-x_0)^{\alpha}G'(x) = (x-x_0)^{\alpha-1}\left[\alpha G(x) + (x-x_0)G'(x)\right].$$

(2) Se $F \in \mathscr{F}$ allora $\frac{F'(x)}{F(x)}$ ha al più un polo semplice in x_0.
Osserviamo che, a patto di cambiare α con $\alpha \pm n$ possiamo supporre $G(x)$ regolare e non nulla in x_0. Si ha

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{(x-x_0)^{\alpha-1}[\alpha G(x) + (x-x_0)G'(x)]}{(x-x_0)^{\alpha}G(x)} = \frac{\alpha}{x-x_0} + \frac{G'(x)}{G(x)}.$$

(3) Se $F \in \mathscr{F}$ allora $\frac{F''(x)}{F(x)}$ ha al più un polo doppio in x_0. Si vede facilmente dal fatto che

$$F''(x) = (\alpha-1)\alpha(x-x_0)^{\alpha-2}G(x) + \alpha(x-x_0)^{\alpha-1}G'(x) + \\ + \alpha(x-x_0)^{\alpha-1}G'(x) + (x-x_0)^{\alpha}G''(x).$$

Di conseguenza

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(x-x_0)^2} + \frac{2\alpha}{x-x_0}\frac{G'(x)}{G(x)} + \frac{G''(x)}{G(x)}$$

e quindi $\frac{F''}{F}$ ha al più un polo doppio in x.

Adesso, date y_1 e y_2 (con radici distinte o meno) esse soddisfano

$$\begin{cases} y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p_1(x)y_2' + p_2(x)y_2 = 0 \end{cases}.$$

Moltiplichiamo la prima di queste equazioni per $-y_2$ e la seconda per y_1 e sommiamo così da avere

$$y_1y_2'' - y_1''y_2 + p_1(x)\underbrace{y_1y_2' - y_1'y_2}_{W} = 0$$

il che ci permette di ricavare $p_1(x)$:

$$-p_1(x) = \frac{y_1y_2'' - y_1''y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2} = \frac{d}{dx}\log W = \frac{d}{dx}\log\left(y_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right). \tag{66}$$

Adesso abbiamo due casi.

(1) $(r_1 \neq r_2)$. Allora $y_1, y_2 \in \mathscr{F}$ e quindi

$$\frac{y_2}{y_1} \in \mathscr{F} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} \in \mathscr{F} \Longrightarrow y_1^2\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} \in \mathscr{F} \Longrightarrow p_1 \in \mathscr{F}$$

e quindi ha al più un solo polo in x_0.
E per quanto riguarda $p_2(x)$? Sostituendo in

$$y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1 = 0$$

troviamo

$$-p_2(x) = \frac{y_1''}{y_1} + p_1(x)\frac{y_1'}{y_1}$$

ma $p_1(x)$ e $\frac{y_1'}{y_1}$ stanno in $\mathscr{F}$ quindi loro hanno al più un polo semplice e il loro prodotto al più un polo doppio; stesso discorso per $\frac{y_1''}{y_1}$ e quindi $p_2(x)$ ha al più un polo doppio.

(2) $(r_1 = r_2)$. Si ha ancora che

$$-p_1(x) = \frac{d}{dx}\log\left(y_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right)$$

e sostituendo y_2 troviamo che

$$-p_1(x) = \frac{d}{dx}\log\left(y_1^2\frac{d}{dx}(H\log(x-x_0)+\varphi)\right) = \\ = \frac{d}{dx}\log\left(\frac{y_1^2}{x-x_0}[H + (x-x_0)\varphi']\right).$$

Adesso

$$y_1 \in \mathscr{F} \qquad y_1^2 \in \mathscr{F} \qquad \frac{y_1^2}{x-x_0} \in \mathscr{F} \qquad (x-x_0)\varphi' \in \mathscr{F}$$

ma possiamo scrivere il seguente prodotto di oggetti in $\mathscr{F}$

$$(x-x_0)\left(\frac{H}{x-x_0} + \varphi'\right)$$

e quindi $p_1(x) \in \mathscr{F}$. Per $p_2(x)$ vale lo stesso ragionamento.

□

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$)(CS). Supponiamo, per semplicità, che $x_0 = 0$; sappiamo per ipotesi che $p_1(x)$ ha al più un polo semplice in 0 e $p_2(x)$ ne ha al più uno doppio e quindi essi saranno della forma

$$\begin{cases} p_1(x) = \frac{A(x)}{x} \\ p_2(x) = \frac{B(x)}{x^2} \end{cases}$$

con A e B regolari nelkl'origine. Questo significa che essi avranno uno sviluppo in serie di Taylor

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

in un certo disco $|x| < a$. Osserviamo che i coefficienti a_n e b_n sono costanti assegnate dato che l'equazione differenziale è assegnata.
Abbiamo

$$x^2 y'' + A(x) x y' + B(x) y = 0$$

e poniamo che

$$y = x^r \sum_{\substack{n=0 \\ c_0 \neq 0}}^{\infty} c_n x^n$$

con r e c_n costanti da determinare. A questo punto troviamo

$$\begin{aligned} y' &= r x^{r-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n + x^r \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (r+n) x^{r+n-1} \\ &\Longrightarrow x y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (r+n) x^{r+n} \end{aligned}$$

ed analogamente

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) c_n x^{r+n-2} \Longrightarrow x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) c_n x^{r+n}.$$

Sostituendo nell'equazione troviamo

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) c_n x^n + x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) c_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) + x^r \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = 0$$

con gli elementi della prima serie che chiamiamo (I), quelli del prodotto della seconda per la terza chiamati (II) e quelli del prodotto di quarta e quinta chiamati (III). Riordinando i termini troviamo che

$$(III) = (b_0 + b_1 + b_2 x^2 + \dots)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} b_{n-m} c_m \right) x^n$$

e analogamente per (II) si ha

$$(II) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_{n-m} c_m (r+m) \right) x^n.$$

Adesso mettendo insieme i pezzi, troviamo che l'equazione assume la forma

$$(I) + (II) + (III) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (r+n)(r+n-1) c_n + \sum_{m=0}^{n} \left[(r+m) a_{n-m} + b_{n-m} \right] c_m \right\} x^n = 0. \tag{67}$$

Per far si che questo accada si deve avere

$$(r+n)(r+n-1) c_n + \sum_{m=0}^{n-1} [(r+m) a_{n-m} + b_{n-m}] c_m + [(r+n) a_0 + b_0] c_n = 0$$

ossia

$$[(r+n)(r+n-1) + (r+n) a_0 + b_0] c_0 = - \sum_{m=0}^{n-1} [(r+m) a_{n-m} + b_{n-m}] c_m$$

dove la costante c_0 possiamo pensarla come quella costante per cui una soluzione è tale a meno di una costante moltiplicativa e quindi $c_0 \neq 0$.
Introducendo le funzioni ausiliarie

$$\begin{cases} f_0(\xi) = \xi(\xi-1) + a_0\xi + b_0 \\ \vdots \\ f_\nu(\xi) = a_\nu\xi + b_\nu \end{cases}$$

possiamo riscrivere tutto come

$$f_0(r+n)c_n = -\sum_{m=0}^{n-1} f_{n-m}(r+m)c_m.$$

A questo punto si ha

fucaus

$$\begin{cases} n = 0 \Longrightarrow f_0(r)c_0 = 0 \Longrightarrow f(r) = 0 \\ n = 1 \Longrightarrow f_0(r+1)c_1 = -f_1(r)c_0 \\ n = 2 \Longrightarrow f_0(r+2)c_2 = -f_2(r)c_0 - f_1(r+1)c_1 \end{cases} \tag{68}$$

Dal fatto che $f_0(r) = 0$ possiamo ricavare r andando a sostituire nell'equazione differenziale così da avere

indeq

$$\boxed{\begin{cases} r(r-1) + a_0 r + b_0 = 0 \\ r^2 + (A(0)-1)r + B(0) = 0 \end{cases}} \tag{69}$$

dove la seconda di queste equazioni è detta Equazione dell'Indice; le sue radici sono r_1 e r_2. Li chiamiamo in modo da avere $\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2$ per comodità e poniamo $s = r_1 - r_2$ così da avere $\operatorname{Re} s \geq 0$.
Bisogna dimostrare che dato r_1, la nostra y, scritta in serie di Taylor, abbia raggio di convergenza non nullo.
Le (68) ci danno i c_n e per farlo dobbiamo dimostrare che $f_0(r+n) \neq 0 \ \forall\, n$. Ma

$$f_0(r_1+n) = (r_1+n)(r_1+n-1) + a_0(r_1+n) + b_0$$

e osserviamo che r_1 e r_2 sono tali che $f_0(\xi) = 0$. Questo ci porta a dire he

$$f_0(\xi) = (\xi - r_1)(\xi - r_2)$$

e quindi

$$f_0(r_1+n) = (r_1+n-r_1)(r_1+n-r_2) = n(n+s) \neq 0.$$

Allora f_0 è sempre non nullo perchè $\operatorname{Re} s \geq 0$.
Passiamo al raggio di convergenza: avevamo detto che $A(x)$ e $B(x)$ sono rgolari in $|x| \leq a$. Consideriamo $0 < \rho \leq a$ e per la formula integrale di Cauchy si ha che in $|x| \leq \rho$ vale

$$A^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|x|=\rho} \frac{A(x)}{x^{n+1}}\,dx \Longrightarrow a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|x|=\rho} \frac{A(x)}{x^{n+1}}\,dx$$

e di conseguenza si ha

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|x|=\rho} \frac{|A(x)|}{|x|^{n+1}}|dx| \leq (\text{nel disco } |A(x)| \leq M) \leq \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}}\oint_{|x|=\rho}|dx| \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

Analogamente troviamo

$$|b_n| \leq \frac{N}{\rho^n}$$

e di conseguenza, per ogni ν possiamo scrivere

$$|f_\nu(\xi)| \leq |a_\nu||\xi| + |b_\nu| \leq \frac{1}{\rho^\nu}(M|\xi| + N).$$

Adesso, ricordandoci che $f_0(r_1+n) = n(n+s)$ e che quindi

$$|f_0(r_1+n)| = n|n+s| \geq n\operatorname{Re}(n+s) = n(n+\operatorname{Re} s) \geq n^2$$

e considerando che

$$f_0(r_1+n)c_n = -\sum_{m=0}^{n-1} f_{n-m}(r_1+m)c_m$$

e che quindi

$$c_n = -\frac{1}{f_0(r_1+n)} \sum_{m=0}^{n-1} f_{n-m}(r_1+m)c_m$$

troviamo che[4]

$$|c_n| \le -\frac{1}{|f_0(r_1+n)|} \sum_{m=0}^{n-1} |f-n-m(r_1+m)||c_m| \le -\frac{1}{n^2} \sum_{m=0}^{n-1} \left(\frac{(|r_1|+m)M+N}{\rho^{n-m}} \right) |c_m|.$$

Adesso l'ultima quantità scritta può essere espressa come

$$-\frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \underbrace{\frac{(|r_1|+m)M+N}{\rho^{n-m}}}_{=\underbrace{\frac{M|r_1|+N}{n}}_{\le 1}+\underbrace{\frac{mM}{n}}_{\le 1}} \frac{|c_m|}{\rho^{n-m}} \le M|r_1|+M+N = K$$

con K che non dipende da n. Quindi abbiamo trovato che

fuc2

$$|c_n| \le \frac{K}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{|c_m|}{\rho^{n-m}}. \tag{70}$$

Affermiamo adesso che

$$|c_n| \le \left(\frac{K}{\rho}\right)^n |c_0| \tag{71}$$

e lo dimostriamo per induzione. Preliminarmente si noti che se $K \ge 1$ allora $1+K+K^2+\cdots+K^{n-1} \le nK^{n-1}$.

Sia $n=1$. Allora

$$|c_1| < \frac{|c_0|}{\rho} K$$

è vera per la (70). Adesso, quindi, lo supponiamo vero per n e lo dimostriamo per $n+1$.

Si ha

$$|c_{n+1}| < \frac{K}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \frac{|c_m|}{\rho^{n-m+1}} < \frac{K}{n+1} \sum_{m=0^n} \left(\frac{K}{\rho}\right)^m |c_0| \frac{1}{\rho^{n-m+1}} = \frac{K}{(n+1)\rho^{n+1}} |c_0| \sum_{m=0}^{n} K^m \le$$
$$\le \frac{K}{(n+1)\rho^{n+1}} |c_0| (n+1)K^n = \left(\frac{K}{\rho}\right)^{n+1} |c_0|.$$

Se invece abbiamo $K<1$ allora si ha

$$|c_n| \le \frac{K}{n} \sum \cdots \le \frac{1}{n} \sum \ldots$$

e ci si riduce a dimostrare che

$$|c_n| < \frac{1}{\rho^n} |c_0|$$

nello stesso modo che abbiamo appena visto.

A questo punto sfruttiamo la disuguaglianza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K}{\rho}\right)^n |c_0||x|^n = |c_0| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K|x|}{\rho}\right)^n$$

che converge se

$$\frac{K|x|}{\rho} < 1 \iff |x| < \frac{\rho}{K}$$

e quindi il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ è $\ge \frac{\rho}{K}$.

Morale della favola: abbiamo trovato che il raggio di convergenza è non nullo e che

$$y_1 = x^{r_1} \varphi_1(x).$$

Ma non abbiamo ancora finito: dobbiamo lavorare con r_2 ora. Supponiamo che $s \notin \mathbb{N}$ e ricordiamoci che $f_0(r_2+n) = n(n+s)$. Di conseguenza, se $s=0$ ritroviamo ancora y_1 però questo non va bene perchè vogliamo che y_1 e y_2 siano linearmente indipendenti.Un altro caso da escludere è $s=n$ perchè da un certo punto in poi avremo i coefficienti tutti nulli e anche questo non vogliamo che accada.

[4]Nella prossima sommatoria daremo agli f_{n-m} la forma trovata per gli f_v.

Per r_1 avevamo utilizzato il fatto che $|f_0(r_1+n)| \geq n^2$ mentre ora, invece, $|f_0(r_2+n)| = n|n-s| \ngeq n^2$. Ma possiamo rimediare considerando la successione

$$\frac{1}{|1-s|}\ ,\ \frac{2}{|2-s|}, \ldots, \frac{n}{|n-s|} \longrightarrow 1.$$

Poichè la serie è limitata superiormente allora possiamo prendere

$$S := \sup\left\{\frac{n}{|n-s|}\right\} < +\infty$$

e adesso si ha che

$$n|n-s| = \frac{n^2}{\frac{n}{|n-s|}} \geq \frac{n^2}{S}$$

e quindi abbiamo trovato una disuguaglianza equivalente. A questo punto, con dei calcoli simili a quelli già visti ritroviamo che

$$|c_n| \leq \frac{KS}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{|c_m|}{\rho^{n-m}}$$

e ripetendo i calcoli già fatti, anche ora riusciamo ad arrivare ad

$$y_2 = x^{r_2}\varphi_2(x).$$

Adesso dobbiamo capire come abbiamo scelto c_0 nel caso di r_2; sicuramente non nulla; è uguale a quella presa per r_1?
Abbiamo

$$y_1 = x^{r_1}(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots) = c_0x^{r_1} + c_1x^{r_1+1} + c_2x^{r_1+2} + \ldots$$
$$y_1' = r_1c_0^{r_1-1} + (r_1+1)c_1x^{r_1} + \ldots$$
$$y_2 = x^{r_2}(c_0^* + c_1^*x + c_2^*x^2 + \ldots)$$
$$y_2' = r_2c_0^*x^{r_2-1} + \ldots$$

e provando a calcolarci $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ troviamo che la sua espressione è

$$W = r_2c_0c_0^*x^{r_1+r_2-1} + \cdots - r_1c_0c_0^*x^{r_1+r_2-1} + \cdots = (r_2-r_1)c_0c_0^*x^{r_1+r_2-1} + \ldots$$

e quindi scopriamo che possiamo prendere $c_0 = c_0^*$.
Supponiamo ora, invece, che $s \in \mathbb{N}$. Cerchiamo una funzione del tipo

$$y_2(x) = y_1(x)[H\log x + \varphi(x)] \tag{72}$$

e quindi studiamo il rapporto $\frac{y_2}{y_1}$ per arrivare a quel che cerchiamo. Sappiamo che se y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, per il teorema di Liouville, si ha che

$$W(x) = Ce^{-\int p_1(x)dx}$$

ma abbiamo anche che

$$W(x) = y_1y_2' - y_1'y_2 = y_1^2\frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = y_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

e quindi, uguagliando le due scritture troviamo che

$$y_1^2\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = Ce^{-\int p_1(x)dx} = Ce^{-\int\frac{A(x)}{x}dx}.$$

Ma abbiamo lo sviluppo in serie

$$\frac{A(x)}{x} = \frac{a_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1} \Longrightarrow \int\frac{A(x)}{x}dx = a_0\log x + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \ldots \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow e^{-\int\frac{A(x)}{x}dx}\underbrace{e^{-a_0\log x}}_{=x^{-a_0}}\cdot\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n\right).$$

Quindi

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{y_1^2}x^{-a_0}\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n\right) \tag{73}$$

ma

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \Longrightarrow y_1^2 = x^{2r_1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)^2$$

e di conseguenza

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = Cx^{-2r_1-a_0}\frac{\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}x^n\right)}{\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)^2}$$

dove le due serie a rapporto hanno coefficienti noti e sono regolari e non nulle nell'origine e quindi possiamo considerarle come una funzione che abbia uno sviluppo in serie di Taylor del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n \qquad \alpha_0 = \frac{1}{c_0^2} \neq 0.$$

Ma adesso ci ricordiamo che per l'equazione dell'indice si ha $r_1 + r_2 = -(a_0 - 1)$ e quindi

$$-a_0 = r_1 + r_2 - 1 \Longrightarrow -a_0 - 2r_2 0 r_1 - r_2 - 1 = -(1+s)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{C}{x^{1+s}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n. \tag{74}$$

Adesso sfruttiamo il fatto che $s \in \mathbb{N}$, lo portiamo all'intermo della serie così da avere

$$\frac{\alpha_0}{x^{1+s}} + \frac{\alpha_1}{x^s} + \frac{\alpha_2}{x^{s-1}} + \dots + \frac{\alpha_sx^s}{x^{1+s}} + \alpha_{s+1} + \alpha_{s+2}x + \dots.$$

Integrando termine a termine ora troviamo che

$$\frac{y_2}{y_1} = C\left(-\frac{\alpha_0}{sx^s} - \frac{\alpha_1}{(s-1)x^{s-1}} + \dots - \frac{\alpha_{s-1}}{x} - \alpha_s\log x + \dots + \tilde{C}\right)$$

dove $\tilde{C}$ è la costante d'integrazione. Adesso possiamo vedere che $\frac{y_2}{y_1} = C\alpha_s\log x$ più una serie di Laurent di una certa funzione $\psi(x)$, che nella peggiore delle ipotesi avrà un polo nell'origine. Quindi la H che cercavamo è $H := C\alpha_s$ e finalmente

$$y_2 = y_1(H\log x + \psi(x)).$$

Abbiamo concluso, a parte alcune osservazioni. Se $s > 0$ allora, escluso il logaritmo, si ha che $\psi(x)$ ha un polo di ordine s come mostra il termine $-\frac{\alpha_0}{sx^s}$. Se invece $s = 0$ allora lo sviluppo in di Laurent è in realtà uno sviluppo in serie di Taylor e la funzione è regolare in 0. □

20. Mercoledì 12.12.2012 - Singolarità fuchsiane all'infinito e l'Equazione Differenziale Ipergeometrica

Supponiamo di avere l'equazione

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x) = 0 \tag{75}$$

e posto $x = \frac{1}{\xi}$ si ha singolarità fuchsiana in 0. Operando il cambio di variabile si ha

$$\frac{dy}{dx} = -\xi^2\frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\xi^2\left(\xi^2\frac{dy}{d\xi}\right) = \xi^2\left(\xi^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi\frac{dy}{d\xi}\right) = \xi^4\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi^2\frac{dy}{d\xi}$$

e quindi l'equaizione diventa

$$\xi^4\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2\xi^3\frac{dy}{d\xi} = p_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\left(-\xi^2\frac{dy}{d\xi}\right) + p_2\left(\frac{1}{\xi}\right)y = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{\xi} - \frac{1}{\xi^2}p_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\right)\frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{\xi^4}p_2\left(\frac{1}{\xi}\right)y = 0.$$

Essa deve essere fuchsiana in 0 e quindi p_1 deve avere almeno uno zero semplice nell'origine e p_2 ne deve possedere almeno uno doppio.

Supponiamo ora di avere una fu nzione totalmente fuchsiana e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n punti singolari al finito; sia ora $p_n(x) = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$. Adesso osserviamo che se si è in presenza di una generica funzione $f(x)$ con un polo di ordine k allora essa avrà uno sviluppo di Taylor del tipo

$$f(x) = \frac{A_k}{(x-\alpha_j)^k}$$

più il resto della serie di Taylor. Quindi troviamo che se l'equazione è totalmente fuchsiana allora p_1 e p_2 sono funzioni razionali del tipo

$$p_1(x) = \frac{Q_{n-1}(x)}{p_n(x)} \qquad p_2(x) = \frac{R_{2n-2}(x)}{p_n^2(x)}$$

quindi Q_{n-1} è un polinomio di grado $\leq n-1$ e R_{2n-2} è un polinomio di grado $\leq 2n-2$.
Passiamo ora all'equazione differenziale ipergeometrica.

Proposizione 20.1 (**Equazione differenziale ipergeometrica).** *Si tratta di un'equazione totalmente fuchsiana del secondo ordine con tre singolarità nei punti* $(0,1,+\infty)$; *inoltre essa dipende da tre paramentri* $a, b, c \in \mathbb{C}$. *Essa ha la seguente forma:*

edi1

$$\boxed{x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0} \tag{76}$$

de i coefficienti sono quindi

$$p_1(x) = \frac{c-(a+b+1)x}{x(1-x)} \qquad p_2(x) = -\frac{ab}{x(1-x)}. \tag{77}$$

Cerchiamo adesso delle soluzioni esplicite per la nostra nuova equazione. Ricordiamoci che, in un intorno di $x=0$ avevamo $p_1(x) = \frac{A(x)}{x}$ e quindi in questo caso

$$A(x) = \frac{c-(a+b+1)x}{1-x}$$

e per $B(x)$ troviamo che

$$B(x) = -\frac{abx(1-x)}{(1-x)^2}.$$

Di conseguenza, dalla forma assunta da $A(x)$ deduciamo che $a_0 = C$ e da quella assunta da $B(x)$ che $b_0 = 0$.
Quindi l'equazione dell'indice diventa

$$r(r-1) + cr = 0 \iff r(r+c-1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1-c \end{cases}.$$

Adesso abbiamo due casi:
(1) se $c \notin \mathbb{Z}$ allora i due integrali sono linearmente indipendenti;
(2) se $c \in \mathbb{Z}$ allora uno dei due integrali avrà un termine di tipo logaritmico. Sarà quello con $\mathrm{Re}(1-c) \leq 0$ ossia con $c \geq 1$. Inoltre sappiamo che esso sarà del tipo

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con $r = 0$ se $c \notin \mathbb{Z}$ oppure $c \neq 0, -1, -2, \ldots$.

A questo punto

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$$

con $k_0 = 1$. Adesso andando a sostituire nelle funzioni ausiliarie

$$\begin{cases} f_0(r) = 1 \\ f_0(r+1)k_1 = -f_1(r) \\ f_0(r+2)k_2 = -f_2(r) - f_1(r+1)k1 \\ \vdots \end{cases}$$

e ricordando che $f_0(\xi) = \xi(\xi + c - 1)$, troviamo che

$$f_0(1)k_1 = -f_1(0)$$

fino ad arrivare ad[5]

$$\begin{aligned} A(x) &= [c-(a+b+1)x]((1+x+x^2+\ldots) = c + c(1+x+x^2+\ldots) - (a+b+1)(x+x^2+\ldots) = \\ &= c + (c-a-b-1)(x+x^2+\ldots) \end{aligned}$$

[5] A questo punto sfruttiamo il fatto che $f_\nu(\xi) = a_\nu \xi + b_\nu$ dove a_ν e b_ν stanno nello sviluppo di Taylor di $A(x)$.

quindi abbiamo trovato che se $\nu > 1$ allora si ha l'indice $a_\nu = c - a - b - 1$ è fissato e non dipende da ν.
Per $B(x)$ si ha

$$B(x) = -\frac{abx}{1-x} = -abx(1 + x + x^2 + \dots) = -ab(x + x^2 + \dots).$$

Quindi per ogni ν si ha

$$f_\nu(\xi) = (c - a - b - 1)\xi - ab.$$

Adesso, tornando a noi, abbiamo

$$\begin{aligned} f_0(n)k_n &= n(n + c - 1)k_n + ab - \sum_{h=1}^{n-1} [(c - a - b - 1)h - ab]k_h = \\ &= ab + \sum_{h=1}^{n-1} [ab + h(a + b + 1 - c)]k_h = (\pm h^2) = ab + \sum_{h=1}^{n-1} [(a + b)(b + h) - h(c + h - 1)]k_h \end{aligned}$$

Adesso possiamo ricavare che l'ultima quantità scritta è tale che $\forall\ n$

$$k_n = \frac{(a)_n (b)_n}{n!(c)_n}$$

dove abbiamo utilizzato i Simboli di Pochhammer definiti come

$$\begin{cases} (a)_0 = 1 \\ (a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) \end{cases} . \tag{78}$$

Ma dobbiamo dimostrarlo...
Lo faremo per induzione. Sia $n = 0$; allora $k_0 = 1$ e $k_1 = \frac{ab}{c}$. Adesso posto vero per n, dimostriamolo per $n + 1$: si ha

$$(n+1)(c+n)k_{n+1} = ab + \sum_{h=1}^{n} [(a+h)(b+h) - h(c+h-1)] \cdot \frac{(a)_h (b)_h}{h!(c)_h}$$

ma $(a + h)(a)_h = (a)_{h+1}$ e $(b + h)(b)_h = (b)_{h+1}$ e quindi l'ultima quantità scritta è uguale a

$$ab + \sum_{h=1}^{n} \frac{(a)_{h+1}(b)_{h+1}}{h!(c)_h} - \sum_{h=1}^{n} \frac{(a)_h (b)_h}{h!(c)_{h-1}}$$

che fa $-ab$ se $h = 1$. Osserviamo che questa è una somma telescopica e quindi rimane oltre al termine per $h = 1$ solo l'utlimo ossia

$$\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{n!(c)_n}.$$

Quindi

$$(n+1)(c+n)k_{n+1} = \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{n!(c)_n} \Longrightarrow k_{n+1} = \frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(n+1)!(c)_{n+1}}.$$

Alla fine di tutto abbiamo trovato

edi2
$$\boxed{y = {}_2F_1(a, b, c, x)) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}} \tag{79}$$

21. Giovedì 13.12.2012 - Soluzioni esplicite e loro rappresentazione euleriana

Abbiamo visto che, per l'equazione ipergeoemetrica, se $c \in \mathbb{N}$, alllora abbiamo un modo algoritmico per calcolarci la soluzione. Avevamo trovato y_1 ma abbiamo più in generale

edi3
$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= {}_2F_1(a, b, c, x) \\ y_2(x) &= x^{1-c}\ {}_2F_1(a - c + 1, b - c + 1, 2 - c, x) \end{aligned}} \tag{80}$$

dove osserviamo che x^{1-c} è polidroma.
Al cambiare dei parametri la funzione ${}_2F_1$ descrive y_1 e y_2 anche in un intorno di 1 e di $+\infty$. Come lo mostriamo?
Sia la sostituzione tale che $x \longmapsto 1 - x$ che manda gli intorni di $x = 1$ in quelli di $x = 0$. Allora troviamo

edi4
$$\boxed{\begin{aligned} y_1(x) &= {}_2F_1(a, b, a + b - c + 1, 1 - x) \\ y_2(x) &= (1 - x)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c - a, c - b, c - a - b + 1, 1 - x) \end{aligned}} \tag{81}$$

Se invece operiamo la sostituzione $x = \frac{1}{t}$ riusciamo a trovare due integraliin un intorno di $x = +\infty$; ponendo $y = t^a u$ per $|t| < 1$ troviamo

edi5 (82)
$$\boxed{\begin{array}{l} y_1(x) = t^a \ {}_2F_1(a, a-c+1, a-b+1, t) \\ y_2(x) = t^b \ {}_2F_1(b, b-c+1, b-a+1, t) \end{array}}.$$

Teorema 21.1 (Rappresentazione euleriana di ${}_2F_1$)**.** *Sia* $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. *Allora vale la seguente espressione:*

edi6 (83)
$$\boxed{{}_2F_1(a,b,c,x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \cdot \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a} dt \qquad |x| < 1}$$

Prima di dimostrare il teorema premettiamo alcune osservazioni.

Osservazione 21.1. *Poichè la funzione* ${}_2F_1$ *è simmetrica in a e b allora anche l'integrale sarà simmetrico in a e b.*
Inoltre, attraverso questa formula abbiamo l'estensione analitica della funzione.

Dimostrazione. Si osservi che l'integrale è una funzione di x olomorfa in $|1-x| < \pi$. Ricordando che
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$
possiamo scrivere
$$(1-tx)^{-a} = (t \in [0,1), |x| < 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-tx)^k$$
e sostituendo all'interno dell'integrale troviamo
$$\int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tx)^a} dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-a}{k} (-tx)^k dt$$
ma notiamo che
$$(-1)^k \binom{-a}{k} = \frac{(-a)(-a+1)\dots(-a+k-1)}{k!} = \frac{(-a)_k}{k!}.$$
Di conseguenza abbiamo
$$\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} t^k x^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{b+k-1}(1-t)^{c-b-1} dt.$$
Adesso, con $\operatorname{Re} x > 0$ e $\operatorname{Re} y > 0$, interviene la funzione Beta di Eulero che ricordiamo è
$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$
Sfruttando il fatto che
$$(b)_k = \frac{\Gamma(b+k)}{\Gamma(b)}$$
ricaviamo che
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{x^k}{k!} \frac{\Gamma(b+k)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+k)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k \frac{x^k}{k!} \frac{(b)_k \Gamma(b)\Gamma(c-b)}{(c)_k \Gamma(c)} = \\ &= \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} = \\ &= {}_2F_1. \end{aligned}$$
□

Osservazione 21.2. *Supponiamo di avere*
$$\begin{cases} \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0 \\ \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0 \end{cases}$$
e si nota che
$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{(1+tx)^b} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{a-b-1}}{(1-tx)^a} dt$$
cioè che la simmetria in a e in b di ${}_2F_1$ *ha come conseguenza la simmetria anche per l'integrale.*

Diamo adesso una seconda dimostrazione del teorema, la quale fa uso di tecniche più elementari.

Dimostrazione. Sia

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{(1-tx)^b}dt = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}du\int_0^1 \frac{t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}}{(1-tx)^b}dt.$$

Possiamo vedere tutto come

iii

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left(\frac{t}{1-t}\right)^a\left(\frac{u}{(1-u)(1-tx)}\right)^b[(1-u)(1-t)]^c\frac{dtdu}{ut(1-u)(1-t)}. \tag{84}$$

Sfruttando la (84) vogliamo arrivare a dire che la prima quantità scritta è simmetrica in a e in b. Poichè la (84) è una funzione analitica, ci basta vederlo nell'intervallo $[0,1]$.
Siano adesso

$$T := \frac{t}{1-t} \qquad U := \frac{u}{(1-u)(1-tx)}.$$

Ne segue che

$$t = \frac{T}{1+T} \qquad \frac{u}{1-u} = (1-tx)U$$

$$u = \frac{(1-tx)U}{1+(1-tx)U} = \frac{\left(1-\frac{Tx}{1+T}\right)U}{1+\left(1-\frac{Tx}{1+T}\right)} = \left(\frac{1}{T}\right) = \frac{U(1+T(1-x))}{1+T+U+TU(1-x)}.$$

A questo punto osserviamo che

$$(1-t)(1-u) = \frac{1}{1+T}\frac{1+T}{1+T+uT(1-x)} = \frac{1}{1+T+U+UT(1-x)}$$

e lo jacobiano è

$$\frac{d(t,u)}{d(T,U)} = \frac{1}{1+T}\frac{1+T(1-x)}{1+T+U+TU(1-x)}.$$

Adesso la curva $T = \frac{t}{1-t}$ è un'iperbole equilatera e con $t \in [0,1)$ si ha che $T \longrightarrow +\infty$ per $t \to 1$. Lo stesso ragionamento vale per

$$\frac{u}{1-u} = (1-tx)U.$$

Tornando all'integrale troviamo che

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{T^aU^b}{[1+T+U+TU(1-x)]^c}\frac{1+T(1-x)}{(1+T)[1+T+U+TU(1-x)]^2}dTdU.$$

□

Diamo, infine, un breve cenno alle formule di contiguità di Gauss. Abbiamo visto che ad ${}_2F_1(a,b,c,x)$ sono contigue le sei possibili funzioni ${}_2F_1(a\pm1, b\pm1, c\pm1, x$ e le formule di contiguità danno una relazione tra la ${}_2F_1$ e due a scelta tra le sei contigue. In totale abbiamo $\frac{6\cdot5}{2} = 15$ formule di contiguità.

Esempio 21.1. *Vediamo la formula di contiguità tra* ${}_2F_1(a,b,c,x)$ *e* ${}_2F_1(a,b,c\pm1,x)$. *Essa è*

$$c[c-1-(2c-a-b-1)x]\ {}_2F_1 + (c-a)(c-b)x\ {}_2F_1(c+1) - c(c-1)(1-x)\ {}_2F_1(c-1) = 0. \tag{85}$$

INDICE

FINE[6]
md

[6] Le presenti sono frutto della pazienza e della voglia di riordinare i propri appunti di uno studente, il quale, non garantisce sulla bontà di ciò che vi è in esse scritto. Certamente non sono il migliore strumento di apprendimento presente in giro ma...magari possono tornare utili a qualcuno...