ISTITUZIONI DI ANALISI MATEMATICA
CORSO DEL PROF. FERRUCCIO COLOMBINI
UNIVERSITÀ DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DUNEZ

1. Mercoledì 26.9.2012 - Concetti preliminari

In questo corso tutti gli spazi vettoriali saranno su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$.

Definizione 1.1 (**Norma**). *Sia X uno spazio vettoriale; una norma è un'applicazione*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned} \tag{1}$$

tale che:

(1) $\|x\| \geq 0\, \forall x \in X$ *ed* $\|x\| = 0 \iff x = 0$*;*
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|\, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\forall x \in X$*;*
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Le norme servono ad indurre delle distanze e per definizione si ha

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2}$$

Definizione 1.2 (**Spazio di Banach**). *Sia (X, d) uno spazio metrico. Esso è uno spazio di Banach se è completo.*

Definizione 1.3 (**Norme equivalenti**). *Siano $\|\cdot\|'$ e $\|\cdot\|''$ norme su X. Esse sono equivalenti se esistono M, L costanti tali che*

$$\|x\|' \leq L\|x\|'' \qquad \|x\|'' \leq M\|x\|'\ \forall x.$$

Esempio 1.1. *Sia $\mathbb{R}$. Esso dotato della norma $\|x\| \doteq |x|$ è uno spazio di Banach.*
Prendiamo $\mathbb{R}^n$. Esso è ancora uno spazio di Banach se dotato delle seguenti norme:

$$\|x\|_{L^p} \doteq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ \text{con}\ 1 \leq p \leq +\infty \qquad \|x\|_\infty \doteq \sup |x_i|$$

Osserviamo che le norme del precedente esempio sono tutte equivalenti.

Esempio 1.2. *Diamo qui altri esempi e controesempi: sia $\mathscr{C}(K)$ con K compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia la seguente norma:*

$$\|f\|_{\mathscr{C}^0} := \max_{x \in K} |f(x)|.$$

Con questa norma $\mathscr{C}(K)$ è uno spazio di Banach. Al contrario, non è uno spazio di Banach, lo spazio $\mathscr{C}([a, b])$ dotato della norma

$$\|f\|_{L^1} := \int_a^b |f(t)| dt$$

ossia con la norma L^1. Invece, dotato di essa, lo è $L^1([a, b])$.
Supponiamo ora di avere $\mathscr{C}^m(\Omega)$ dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è aperto e si prenda anche $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Entrambi non sono spazi di Banach poichè si deve richiedere anche la compattezza ossia che $\exists K \subset \Omega$ dove K è compatto.

Un altro spazio importante col quale si avrà occasione di lavorare sarà

$$\mathscr{C}_0^\infty(\Omega) := \{ f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) |\, \operatorname{supp} f = K \subset\subset \Omega \}.$$

Dire che $f_n \xrightarrow{\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)} f$ significa che $\forall n$ $\operatorname{supp} f_n$ sono tutti nello stesso compatto e che $f_n^j \longrightarrow f^j$ uniformemente $\forall j$.

Supponiamo ora di avere due spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ detti X e Y. Sia $T : X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Ha senso quindi definire la continuità di T.

Definizione 1.4 (Operatori limitati). *L'operatore lineare T è limitato se esiste una costante k tale che*

$$\|Tx\|_Y \leq k\|x\|_X$$

Il seguente teorema lega la limitatezza alla continuità. Ne dimostreremo solo alcune parti.

Teorema 1.1. *Sia $T : X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. Le seguenti sono equivalenti:*

(1) *T è limitato;*
(2) *T è continuo in 0;*
(3) *T è continuo in tutto X.*

Dimostrazione. 1. $\longrightarrow$ 3.
Si ha che

$$\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq k\|x-y\|$$

dove nella prima uguaglianza si è usata la linearità e nella seconda l'ipotesi di limitatezza. Quindi T è lipschitziano e continuo.
2. $\longrightarrow$ 1.
Per assurdo supponiamo che la continuità in 0 non implichi la limitatezza. Quindi esiste una successione $\{x_n\}$ tale che $\|x_n\| = 1\, \forall n$ ma tale che $\|Tx_n\| > n$. Sia $y_n = \frac{x_n}{n}$. Dobbiamo trovare una x_n convergente ma tale che $f(x_n)$ non converga.
Sia $\|y_n\| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ ma $\|Ty_n\| = 1$ e quindi non è continua, il che è assurdo. □

Definizione 1.5 (Norma di un operatore). *Sia*

$$\mathscr{L}(X,Y) := \{T : X \longrightarrow Y | T \text{ è lineare e continuo}\}.$$

Quindi sia $T \in \mathscr{L}(X,Y)$. La norma di un operatore è definita equivalentemente come

nrm

$$\|T\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=R} \frac{\|Tx\|}{R}. \tag{3}$$

Osserviamo che la seconda uguaglianza è dovuta alla linearità di T.

Ma tutte le applicazioni lineari sono continue? Sia, per esempio,

$$X := \{p(x) \text{ in una variabile in } [0,1]\}$$

e su di esso poniamo la norma $\|p(x)\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|$. Prendiamo ora l'operatore $T : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $T(p) = p(2)$. E' un operatore lineare ma non limitato. Come lo mostriamo? Bisogna trovare una successione tale che $\|p_n\|_\infty = 1$ e tale che $T(p_n) = p_n(2) \longrightarrow \infty$. Prendiamo $p_n = x^n$ e i conti tornano. Ma si osservi che questo non dipende dalla non completezza di X (che per Stone-Weierstrass è denso in $\mathscr{C}([0,1])$).

Teorema 1.2. *Siano X, Y spazi normati. Se Y è completo allora $\mathscr{L}(X,Y)$ è completo.*

Dimostrazione. Sappiamo che i due spazi sono normati quindi esiste una norma su $\mathscr{L}(X,Y)$ e di conseguenza è anch'esso normato. Prendiamo $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ successione di Cauchy. Dobbiamo trovare un T tale che $T_n \longrightarrow T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Consideriamo $T_n \in Y$ e vediamo a cosa converge. Si ha che

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X \longrightarrow 0$$

perchè per ipotesi Y è completo e di conseguenza $T_n x \longrightarrow Tx$.
Ma è lineare? Sappiamo che $T_n(x+y) = T_n x + T_n y$ ma anche che $T_n(x+y) \longrightarrow T(x+y) = Tx + Ty$ che è ciò a cui tende $T_n x + T_n y$ per cui, in definitiva anche $T(x+y) \longrightarrow Tx + Ty$.
E' limitata? Chi è $\|T_n\|$? Sia $\varepsilon > 0$ tale che esiste un ν per il quale $\forall\, n,m > \nu \Longrightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Ma abbiamo anche che

$$\|T_n\| = \|T_n - T_\nu + T_\nu\| \leq \underbrace{\|T_n - T_\nu\|}_{<\varepsilon} + \|T_\nu\|$$

dove $\|T_\nu\|$ è una costante fissata. Allora possiamo scrivere che

$$\|T_n\| \leq \max\{\|T_\nu\| + \varepsilon, \|T_1\|, \|T_2\|, \dots, \|T_{\nu-1}\|\}.$$

Questo perchè gli elementi prima di T_ν ce ne sono in numero finito. Quindi possiamo affermare che $\|T_n\| \leq M$.

Ora dobbiamo mostrare che per ogni x, $T_n x \longrightarrow Tx$.
Osserviamo che l'applicazione che manda $x \mapsto \|x\|$ è uniformemente continua e che $\|x\| \leq \|x-y\| - \|y\|$ da cui si ha che $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$ quindi tale applicazione è anche lipschitziana con costante uguale a 1. Allora $\|T_n x\| \longrightarrow \|Tx\|$. Inoltre poichè sappiamo che $\|T_n\| \leq M \Rightarrow \|Tx\| \leq M\|x\|$. E' rimasta un ultima cosa da mostrare ossia che

$$\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \longrightarrow 0.$$

Sottoliniamo che si tratta della norma dello spazio duale e questo motiva la maggiorazione che faremo tra breve con il maxlim. Per ipotesi T_n è di Cauchy e quindi $\forall\, \varepsilon \,\exists\, \nu | n, m \geq \nu \Rightarrow \|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Fissiamo x, n sia maggiore di ν e $m \longrightarrow \infty$. Avremo che

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$$

ma

$$\|T_n x - T_m x\| \longrightarrow \|T_n x - Tx\| \leq \max\lim_{m\to\infty} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon\|x\|.$$

La penultima disuguaglianza è motivata dal fatto che a priori non sappiamo se $T_n x$ converge a Tx in $\mathscr{L}(X,Y)$. abbiamo trovato che $\forall\, n \geq \nu\, \|T_n - T\| \leq \varepsilon$. □

2. Venerdì 28.9.2012 - Duali e proprietà degli spazi di Hilbert

Sia X uno spazio di Banach. Il suo duale è definito come

$$X^* := \mathscr{L}(X, \mathbb{K}) \tag{4}$$

e per l'ultimo teorema visto, anche se X non è di Banach, X^* lo è comunque. Vediamo degli esempi.

Esempio 2.1. *Sia $\mathscr{C}(K)$ con K compatto. Fissiamo un $\bar{x} \in K$ e prendiamo $T(f) = f(\bar{x})$. T in realtà è la delta di Dirac e si indica come*

$$T(f) := \delta_{\bar{x}}(f).$$

Essa è continua perchè $|T(f)| \leq \max_{x\in K} |f(x)|$ inoltre $\|\delta\| = 1$.
Prendiamo, adesso, l'operatore su $\mathscr{C}([a,b])$ che ad una funzione associa il suo integrale ossia tale che

$$T(f) = \int_a^b f(t)dt$$

E' un operatore continuo dato che è limitato:

$$|T(f)| \leq \left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq |b-a|\|f\|_{L^\infty}.$$

Ancora un altro esempio: sia lo spazio $\mathscr{C}^m(K)$ con K compatto e tale che sia la chiusura di un aperto (ovviamente limitato). Ancora una volta fissiamo $\bar{x} \in K$. Abbiamo l'operatore

$$T(f) := \sum_{\alpha\leq m} c_\alpha \partial^\alpha f(\bar{x}) = \sum_{\alpha\leq m} c_\alpha (\partial^\alpha \delta_{\bar{x}})(f). \tag{5}$$

Quindi $T \in \mathscr{C}^m(K)^*$.

Sia ora X un generico spazio di Banach, che certamente avrà un duale X^*. Si tenga presente, nel seguito, le proprietà dell'applicazione J alla quale rimandiamo e che sarà trattata successivamente. Ci chiediamo ora chi sia $(X^*)^*$. per capirlo, al solito, fissiamo $\bar{x} \in X$ e $\forall\, T \in X^*$ facciamo $T(\bar{x})$. Usando un linguaggio un pò improprio, si ha che il fatto di applicare tutti i T ad $\bar{x}$ è in se un'applicazione ossia

$$\begin{aligned} X^* &\longrightarrow \mathbb{K} \\ T &\longmapsto T(\bar{x}) \end{aligned}$$

dove si può benissimo definire $\bar{x}^{**}(T) := T(\bar{x})$. Come facciamo a vedere se $\bar{x}^{**} \in X^{**}$?[1] Vediamo se è lineare e continuo. La linearità si ha per costruzione dato che

$$\bar{x}^{**}(T+S) = (T+S)(\bar{x}) = T(\bar{x}) + S(\bar{x}).$$

Per quanto concerne la limitatezza si ha che

$$|\bar{x}^{**}(T)| = |T(\bar{x})| \leq \|T\|\|\bar{x}\|$$

[1] Osserviamo che gli elementi di $(X^*)^*$ sono tutti della forma x^{**} se lo spazio X è riflessivo.

quindi è limitato e si ha anche che[2] $\|\bar{x}^{**}\| \leq \|\bar{x}\|$.

Passiamo a richiamare i concetti essenziali sugli spazi di Hilbert.

Definizione 2.1 (**Prodotto scalare**). *Sia H uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. L'applicazione $(,) : H \times H \longrightarrow \mathbb{K}$ è un prodotto scalare se gode delle seguenti proprietà:*

(1) $(x,x) \geq 0 \forall\, x$ *e* $(x,x) = 0 \iff x \equiv 0$*;*
(2) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)\ \forall\, x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ *ed* $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$*;*
(3) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

Sappiamo già che si definisce la norma come $\|x\| := (x,x)^{\frac{1}{2}}$. Vediamo ora una disuguaglianza che le lega.

Teorema 2.1 (**Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz**). *Sia X spazio vettoriale dotato di prodotto scalare. Allora $\forall\, x, y \in X$ vale*

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \tag{6}$$

Dimostrazione. Dividiamo in due parti la dimostrazione. Nella prima dimostreremo il teorema nel caso reale, nella seconda in quello complesso riconducendoci al primo.
Supponiamo che $(x,y) \in \mathbb{R}$. Si ha che

$$\|x - \lambda y\|^2 = (x - \lambda y, x - \lambda y) = \|x\|^2 - 2\lambda(x,y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

E' un'equazione di secondo grado in λ. E' diretto arrivare alla tesi.
Adesso supponiamo di essere in $\mathbb{C}$. Allora $\mathbb{C} \ni (x,y) := e^{i\vartheta}|(x,y)|$. Sia $x' = e^{-i\vartheta}x$. Adesso si ha che

$$(x', y) = (e^{-i\vartheta}x, y) = e^{-i\vartheta}(x,y) = e^{-i\vartheta}e^{i\vartheta}|(x,y)| = |(x,y)| \in \mathbb{R}.$$

Per la prima parte della dimostrazione, il teorema vale anche su $\mathbb{C}$. □

Dalle definizioni date, segue subito che uno spazio vettoriale H dotato di prodotto scalare è anche uno spazio normato. Le prime due proprietà della norma sono evidenti; per quanto riguarda la disuguaglianza triangolare è facile vedere che

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y) + (y,x) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x,y)| \leq \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Diamo due risultati importanti, ma non li dimostreremo.

Proposizione 2.1 (**Identità del parallelogramma**). *Sia H dotato di prodotto scalare. Allora $\forall\, x, y \in H$*

par
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \tag{7}$$

Teorema 2.2 (**Caratterizzazione di spazi normati**). *La (7) vale se e solo se H è dotato di prodotto scalare.*

Definizione 2.2 (**Spazio di Hilbert**). *H spazio vettoriale è uno spazio di Hilbert se possiede un prodotto scalare ed è completo con la norma che ne deriva.*

Osservazione 2.1. *Sia H e fissiamo $x \in H$. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} T_x : H &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto (y,x) \end{aligned}$$

è tale che

$$|T_x y| \leq \|x\|\|y\| \iff \|T_x\| \leq \|x\|.$$

Quindi abbiamo trovato che andando da H al suo duale H^* le norme si conservano.

Definizione 2.3 (**Ortogonalità**). *Diremo che $x \perp y$ se $(x,y) = 0$. Inoltre resta definito*

$$X^{\perp} := \{y \in H | (x,y) = 0\} \tag{8}$$

il quale è un sottospazio chiuso di H.

---

[2] In realtà sussiste l'uguaglianza e lo vedremo come conseguenza di un corollario del teorema di Hahn - Banach.

Sia $M \subset H$. Allora in generale

$$M^{\perp} := \{y | (x,y) = 0 \, \forall \, x, y \in M\} = \bigcap_{x \in M} X^{\perp}$$

ed anche in questo caso, poichè l'intersezione di chiusi è un chiuso e l'intersezione di spazi vettoriali è uno spazio vettoriale, siamo di fronte ad un sottospazio chiuso.

Teorema 2.3 (Teorema di minima norma). *Sia H uno spazio di Hilbert e sia M un sottospazio chiuso e convesso. Allora esiste unico $\bar{x} \in M$ tale che $\forall \, x \in M \Rightarrow \|\bar{x}\| \leq \|x\|$.*

Dimostrazione. Partiamo dall'unicità. Supponiamo l'esistenza di

$$\delta = \inf\{\|x\| | x \in M\}$$

e prendiamo $x, y \in M$. Per l'identità del parallelogramma abbiamo

par2

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2. \tag{9}$$

Poniamo $\|x\| = \|y\| = \delta$ e quindi troviamo che la (9) è maggiorata da $\frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \delta^2 = 0$ e quindi

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = 0 \iff x = y.$$

Adesso dimostriamo l'esistenza, sapendo che è unico. Sia $\{x_n\} \in M$ una successione tale che $\|x_n\| \longrightarrow \delta$. Si ha

$$\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x_m\|^2 - \delta^2$$

e per $n \to \infty$ si arriva a $\frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{2}\delta^2 - \delta^2 \longrightarrow 0$ per $n, m \to \infty$. Questo ci dice che $\|x_n - x_m\| \longrightarrow 0$ quindi $\{x_n\}$ è di Cauchy; poichè per ipotesi siamo in uno spazio completo allora la successione è convergente ossia $x_n \longrightarrow \bar{x} \in M$ dove $\bar{x}$ è in M perchè è supposto chiuso per ipotesi. □

Teorema 2.4 (Teorema delle proiezioni). *Sia H uno spazio di Hilbert ed M un sottospazio chiuso. Allora esistono*

$$P : H \longrightarrow M \qquad Q : H \longrightarrow M^{\perp}$$

tali che

(1) $x = Px + Qx \, \forall \, x \in H$;
(2) *se* $x \in M$ *allora* $Px = x \iff x = 0$;
(3) $\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\|, y \in M\}$;
(4) $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$;
(5) *P e Q sono lineari e continue.*

Dimostrazione. Prendiamo $x \in H$ ed $x + M = \{x + y | y \in M\}$ che non è un sottospazio ma è convesso e chiuso. Per il teorema precedente esiste x di norma minima e lo chiamiamo Qx. Ora definiamo $Px = x - Qx$. Poichè $Qx \in x + M \Rightarrow Px = x - Qx \in M$. Ma $Qx \in M^{\perp}$? Fissiamo $0 \neq y \in M$ e tale che $\|y\| = 1$. Dobbiamo mostrare che $(Qx, y) = 0$. Si ha

$$\|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = \|Qx\|^2 - \bar{\alpha}(Qx, y) - \alpha(y, Qx) + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

Adesso semplifichiamo togliendo i $\|Qx\|$ e scegliamo $\alpha = (Qx, y)$. Si ha allora che $0 \leq -2|\alpha|^2 + |\alpha|^2 = -|\alpha|^2 \Rightarrow |\alpha|^2 \leq 0$. Questo ci porta a dire che $\alpha = (Qx, y) = 0$ ossia che $Qx \in M^{\perp}$.
Per quanto riguarda l'unicità, sapendo che $x = Px + Qx$ supponiamo che sia anche $x = x' + x''$ così da arrivare all'assurdo:

$$Px + Qx = x' + x'' \iff \underbrace{Px - x'}_{\in M} = \underbrace{x'' - Qx}_{\in M^{\perp}} \Longrightarrow 0 = 0.$$

Sulla linearità si tratta di dimostrare che

$$P(\alpha x + \beta y) + Q(\alpha x + \beta y) = \alpha Px + \alpha Qx + \beta Py + \beta Qy.$$

Ma abbiamo che

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y) \Longrightarrow 0 = 0$$

dove nell'ultima implicazione come nella parte precedente, si è sfruttato il fatto di poter scomporre x in somma di elementi di M e di $M^{\perp}$. □

Corollario 1. *Sia M sottospazio chiuso in H spazio di Hilbert con $M \neq H$. Allora esiste un $y \neq 0$ tale che $y \in M^{\perp}$.*

Dimostrazione. Grazie al teorema precedente sappiamo che $H = M \oplus M^{\perp}$. Basta prendere $x \ni M$ e osservare che $x = Px + Qx$ con Qx che non può essere nullo. Quindi esiste $y = Qx$. □

3. Martedì 2.10.2012 - Teorema di Riesz e Basi ortonormali

Teorema 3.1 (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia H uno spazio di Hilbert ed $L \in H^*$. Allora $\exists! y \in M$ sottospazio chiuso tale che $Lx = (x, y)\ \forall\, x \in H$.*

Dimostrazione. (ESISTENZA) Sia $L \neq 0$ ed $M = \ker(L) := \{x | Lx = 0\}$. Esso è un chiuso perchè L è continua ed è un sottospazio perchè L è lineare. Allora (per il corollario precedente) esiste un $z \neq 0$ in $M^{\perp}$. Sia $y = \alpha z$ (quindi $y \in M^{\perp}$) con $\alpha \in \mathbb{C}$. Vogliamo che

$$Ly = (y, y) = \alpha\bar{\alpha}(z, z)$$

ma $Ly = \alpha Lz \Longrightarrow Lz = \bar{\alpha}(z, z) \Longrightarrow \alpha = \frac{\overline{Lz}}{(z,z)}$. Sia ora per ogni $x \in H$

$$x' = x - \frac{Lx}{(y, y)} y \doteq x - x'' \Longrightarrow x = x' + x'' \Longrightarrow x'' \in M^{\perp}.$$

E x'? Si ha che $Lx' = 0$ e quindi $x' \in M$. Di conseguenza

$$(x, y) = (x', y) + (x'', y) = \frac{Lx}{(y, y)}(y, y) = Lx \Longrightarrow Lx = (x, y).$$

(UNICITA') Per assurdo supponiamo che $Lx = (x, y') = (x, y'')\ \forall\, x$. Allora

$$(x, y' - y'') = 0\ \forall\, x$$

il che è assurdo. □

Definizione 3.1 (Ortonormalità). *Siano H uno spazio di Hilbert e $\{q_i\} \in H$. Tali punti sono ortonormali se*

$$(q_i, q_j) = \delta_{ij}.$$

Lemma 3.1. *Sia un numero finito N di punti ortonormali $\{q_i\}_{1,\dots,N}$ (coefficienti di Fourier) in H spazio di Hilbert. Allora $\forall\, x \in H$ si ha*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{N} |(x, q_i)|^2 \tag{10}$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{N} (x, q_i) q_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} \overline{(x, q_i)}(x, q_i) - \sum_{i=1}^{N} (x, q_i)(q_i, x) + \sum_{i=1}^{N} (x, q_i)\overline{(x, q_i)} =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{N} |(x, q_i)|^2 \geq 0$$

e questo conclude. □

Teorema 3.2. *Sia $\{q_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonornale (con cardinalità al più infinita numerabile). Allora $\forall\, x \in H$*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i \in I} |(x, q_i)|^2$$

dove la somma degli α_i (si noti che sono maggiori o uguali a 0) è da intendere come

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \doteq \sup \left\{ \sum_{i \in J} \alpha_i, J \subset I, J < \infty \right\}.$$

Dimostrazione. Ovvia grazie al lemma di Zorn. □

Adesso arriva un notevole risultato sulla convergenza della serie di Fourier. Prima di procedere, però, bisogna osservare che per poter parlare di convergenza è necessario presupporre la presenza di un ordinamento.

Teorema 3.3. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{q_i\}$ un sistema ortonormale. Allora la serie di Fourier converge ossia*

$$x' = \sum_{i \in I} (x, q_i) q_i.$$

La convergenza la si avrà buttando i termini tali che $(x, q_i) = 0$, ordinandoli e infine facendo

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} (x, q_i) q_i = x'$$

Dimostrazione. Sia $i \in I$ e supponiamo (è il caso interessante) che il numero dei $(x, q_i) \neq 0$ sia un'infinità numerabile. Osserviamo che nel caso della serie con un numero finito di termini, essa converge. Ordiniamo i termini e per dimostrare che il limite esiste dimostriamo che è di Cauchy. Si ha con $k \geq h$ che

$$\|x_k - x_h\|^2 = \sum_{i,j=h+1}^{k} ((x, q_i) q_i, (x, q_j) q_j) = \sum_{i=h+1}^{k} |(x, q_i)|^2 \longrightarrow 0$$

e questo accade in virtù di Bessel (prossimo teorema). Abbiamo trovato che la serie è di Cauchy e, poichè siamo in un Hilbert, converge. Inoltre l'elemento x' è unico dato che $x = (x - x') + x'$ dove i termini a destra appartengono rispettivamentead M e ad $M^{\perp}$. Di conseguenza, per l'unicità di tale scrittura, x' è unico e non dipende dall'ordinamento. □

Definizione 3.2 (**Sistema ortonormale completo**). *Sia H uno spazio di Hilbert. Il sistema ortonormale $\{q_i\}_{i \in I}$ è completo se $\nexists \{p_j\}_{j \in J}$ ortonormale e tale che $\{q_i\}_{i \in I} \subsetneq \{p_j\}_{j \in J}$. Equivalentemente se $\nexists x \neq 0$ tale che $(x, q_i) = 0 \, \forall i$. La presenza di un sistema ortonormale completo assicura che $\overline{M} = H$, dove M è lo spazio generato dal sistema stesso.*

Sia $\mathscr{F}$ una famiglia di sistemi ortonormali. In essa è possibile dare un ordinamento (parziale) ossia

$$\{p_i\} \prec \{q_j\} \iff \{p_i\} \subset \{q_j\}.$$

Teorema 3.4. *Sia H spazio di Hilbert e $\{q_i\}_{i \in I}$ sistema ortonormale. Allora sono equivalenti:*

(1) $\{q_i\}_{i \in I}$ *è completo;*
(2) $\forall\, x \in H$ *si ha* $x = \sum_{i \in I} (x, q_i) q_i$*;*
(3) *(Parseval)* $\forall\, x, y \in H$ *si ha* $(x, y) = \sum_{i \in I} (x, q_i) \overline{(y, q_i)}$*;*
(4) *(Bessel)* $\forall\, x \in H$ *si ha* $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x, q_i)|^2$.

Dimostrazione. (1. $\longrightarrow$ 2.) Sappiamo che

$$x' = \sum_{i \in I} (x, q_i) q_i$$

con $x - x' \in M^{\perp}$. Questo perchè possiamo scrivere $x = (x - x') + x'$ con $x \in M$. Ma per ipotesi il sistema è completo e quindi $\overline{M} = H$ e di conseguenza $M^{\perp} = \{\emptyset\}$. Arriviamo a $x - x' \equiv 0 \iff x = x'$.
(2. $\longrightarrow$ 3.) Una volta ordinate le serie siamo in grado di scrivere

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} (x, q_i) q_i \qquad y_k = \sum_{i=1}^{k} (y, q_i) q_i.$$

Ma sappiamo anche che $x_k \to x$ ed $y_k \to y$. vorremmo dimostrare che $(x_k, y_k) \to (x, y)$. Si ha

$$|(x_k, y_k) - (x, y)| \leq |(x_k - x, y)| + |(x, y - y_k)| \longrightarrow 0$$

ma allora

$$(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^{k} (x, q_i) \overline{(y, q_i)} \underbrace{(q_i, q_i)}_{=1}.$$

(3. $\longrightarrow$ 4.) Basta scegliere x nella dimostrazione appena ultimata.
(4. $\longrightarrow$ 1.) Se per assurdo, $\{q_i\}$ non fosse un sistema completo allora ciò significherebbe che $\exists \bar{y} | (q_i, \bar{y}) = 0 \, \forall\, i$, ma allora l'uguaglianza di Bessel non varrebbe più per tutti gli $x \in H$ il che è assurdo. □

Esempio 3.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{q_i\}_{i\in I}$. E' compatta $\overline{B(0,1)}$?*
No. Per dimostrare la compattezza si deve prendere una successione, vedere se è limititata. Se ciò avviene essa ammette una sottosuccessione convergente e quindi la compattezza c'è. Nel nostro caso prendiamo proprio il sistema ortonormale e osserviamo che $d(q_i, q_j) = \sqrt{2}$ e quindi non può convergere.

4. Mercoledì 3.10.2012 - Esercizi teorici e Teorema di Hahn - Banach

Esempio 4.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e $\{q_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormale completo. Siano dei δ_i tali che $\sum_i \delta_i < +\infty$ e*

$$K := \left\{ x \in K | x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n q_n, |x_n| < \delta_n \right\}.$$

K è compatto?
Per dimostrarlo utilizzeremo un processo diagonale al fine di trovare una sottosuccessione convergente. Vediamo di che si tratta. Sia una successione $\{x^k\} \in K$. Allora

$$x^k = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^k q_n.$$

Blocchiamo il primo termine di ogni elemento della successione ossia prendiamo $\{x_1^k\}$: si tratta per ipotesi di una successione limitata dato che $|x_1^k| \le \delta_1 \Rightarrow \exists x_1^{k_1}$ sottosuccessione convergente ed abbiamo $x_1^{k_1} \longrightarrow \bar{x}_1$. ora prendiamo $x_2^{k_1}$ ed anche in questo caso $|x_2^{k_1}| \le \delta_2 \Rightarrow \exists x_2^{k_2} \longrightarrow \bar{x}_2$. Quindi in generale prenderemo $\forall h$ un $x_h^{k_h} \longrightarrow \bar{x}_h$ e convergerà anche a tutti quelli prima dell'h-esimo. Non ci resta che creare una successione diagonale: prendo il primo di $x_1^{k_1}$, il secondo di $x_2^{k_2}$ e così via.
Ma non è finita: non solo le successioni devono convergere ma devono farlo anche in norma:

$$\|x^{k_k} - \bar{x}\| = (Bessel) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{k_k} - \bar{x}_n|^2.$$

Adesso fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\exists \nu \Rightarrow \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |\delta_n|^2 < \varepsilon$. Di conseguenza avremo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{k_k} - \bar{x}_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\nu} |x_n^{k_k} - \bar{x}_n|^2 + \sum_{n=\nu+1}^{\infty} |x_n^{k_k} - \bar{x}_n|^2 \le \nu\varepsilon + 4\varepsilon^2 \longrightarrow 0.$$

Esempio 4.2. *Sia H uno spazio di Hilbert ed M un suo sottospazio chiuso. Chi è $(M^\perp)^\perp$? Si ha*

$$H = M \oplus M^\perp \text{ ma } H = M^\perp \oplus M^{\perp\perp} \Longrightarrow M^{\perp\perp} = M.$$

Esempio 4.3 (Un controesempio). *Sappiamo che dato uno spazio di Hilbert, in un suo sottospazio chiuso esiste un elemento di norma minima. Questo, tuttavia, non vale per gli spazi di Banach. Per esempio, prendiamo $\mathscr{C}([0,1])$ e*

$$K := \left\{ f : Lf = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt - \int_{\frac{1}{2}}^{z} f(t)dt \equiv 1 \right\}.$$

Se $\|f\| \le 1 \Rightarrow Lf \le 1$. La funzione giusta (la più piccola) è

$$f := \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -1 & x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ma questa funzione non è continua e di conseguenza non appartiene allo spazio da noi considerato. Proviamo ad aggiustarla un pò: sia f_n definita come

$$f_n := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} \\ -1 - \frac{1}{n} \end{cases}$$

ma ora abbiamo $\|f_n\| = 1 + \frac{1}{n}$. Ciò ci porta ad affermare che non esiste un elemento di norma minima.

Esempio 4.4. *Lo spazio $\mathscr{C}([0,1])$ non è nemmeno uno spazio di Hilbert.*
Come si può dimostrare? Ci viene in aiuto l'identità del parallelogramma: siano $f(t) = t$ e $g(t) = 1 - t$. Allora

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \Longrightarrow 1 + 1 = 2 + 2 \Longrightarrow 2 = 4$$

che è palesemente falso.

Esempio 4.5. *Sia X uno spazio normato e T un operatore lineare su $K := \{x | T(x) = \alpha\}$ con α fissato. Allora*

$$K \text{chiuso} \Longleftrightarrow T \text{continuo}.$$

Che la continuità implicasse la chiusura già lo sapevamo. Dimostriamo l'altro senso. Fissiamo $\mathbb{R} \ni \alpha > 0$ ed un $x_0 \notin K$ ossia tale che $T(x_0) < \alpha$. Per ipotesi K è chiuso e quindi $H^{\complement}$ è aperto. Allora[3] *$\exists B(x_0, \rho) \in K^{\complement}$.*
Affermiamo che $\forall\, x \in B(x_0, \rho) \Rightarrow T(x) < \alpha$.
Per assurdo sia $x_i \in B(x_0, \rho)$ tale che $T(x_1) > \alpha$. Sia $\varphi(t)$ il nostro operatore applicato alla combinazione convessa $tx_1 + (1-t)x_o \subset B(x_0, \rho)$ ossia

$$\varphi(t) = T(tx_1 + (1-t)x_0).$$

Scopriamo che $\varphi(0) < \alpha$ e $\varphi(1) > \alpha$. Cosa sta succedendo?
Per la linearità abbiamo $\varphi(t) = tT(x_1) + (1-t)T(x_0)$. Vogliamo trovare il $\bar{t}$ per cui $\varphi(\bar{t}) \equiv \alpha$ quindi si ha

$$t(T(x_1) - T(x_0)) = \alpha - T(x_0) \Longrightarrow \bar{t} = \frac{\alpha - T(x_0)}{T(x_1) - T(x_0)}.$$

Poichè sia numeratore che denominatore sono positivi certamente si tratta di un tempo positivo ed inoltre $0 < \bar{t} < 1 \Rightarrow \exists\, \bar{t}$ tale che $\varphi(\bar{t}) = \alpha$. E questo è assurdo.
La dimostrazione è conclusa, ma sfruttiamo l'occasione per un piccolo nuovo calcolo. Se prendiamo z tale che $\|z\| = 1$ è vero che $T(x_0 + \rho z) < \alpha$? Si ha

$$|T(\rho z)| \leq |T(x_0) - T(x_0 - \rho z)| \leq 2\alpha \Longrightarrow \|T(z)\| = \frac{1}{\rho}\|T(\rho z)\| \leq \frac{2\alpha}{\rho} \Longrightarrow \|T\| \leq \frac{2\alpha}{\rho}.$$

Esempio 4.6. *Sia X uno spazio normato ed M un sottospazio chiuso ed $y \notin M$. Sia*

$$N := \{x + \alpha y | \alpha \in \mathbb{K}, x \in M\}.$$

Dimostrare che N è chiuso.
Al solito, supporremo una successione convergente e dimostreremo che l'elemento a cui converge sta nel suo stesso spazio. Sia $z_n = x_n + \alpha_n y$ convergente a un certo z e ci chiediamo com'è fatta α_n. Avremo due casi.

(1) *($|\alpha_n| < +\infty$).In questo caso $\exists\, \alpha_{n_k} \longrightarrow \bar{\alpha}$. allora è lecito scrivere $x_{n_k} = (x_{n_k} + \alpha_{n_k} y) - \alpha_{n_k} y$, ma il termine tra parentesi è proprio z_n che converge a z per ipotesi, mentre l'ultimo termine non sappiamo a cosa convergerà. Ma sappiamo che sicuramente $x_{n_k} \longrightarrow \bar{x} \in M$ dato che M è chiuso per ipotesi. Allora $z = \bar{x} + \bar{\alpha} y \Longrightarrow N$ è chiuso.*
(2) *L'alternativa è che $|\alpha_n| \longrightarrow +\infty$ e di conseguenza*

$$\frac{z_n}{\alpha_n} = \frac{x_n}{\alpha_n} + y \longrightarrow 0 \Longrightarrow -\frac{x_n}{\alpha_n} \longrightarrow y$$

e questo è assurdo perchè $-\frac{x_n}{\alpha_n} \in M$ mentre $y \notin M$.

Esempio 4.7. *Sia X uno spazio normato ed M un suo sottospazio chiuso, sia $y \notin M$ ed*

$$N := \{x + \alpha y | x \in M, \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Infine sia T tale che $T(x + \alpha y) = \alpha$. Dimostriamo che T è continuo.
Sappiamo che continuità e limitatezza si implicano a vicenda quindi lavoriamo su quest'ultima e supponiamo, per assurdo, che T non sia limitato. Allora può esistere una $x_n + \alpha_n y$ tale che $\|x_n + \alpha_n y\| = 1$ ma $|x_n + \alpha_n y| = |\alpha_n| \longrightarrow +\infty$. Si ha che

$$\left\| \frac{x_n}{\alpha_n} + y \right\| \longrightarrow 0 \Longrightarrow -\frac{x_n}{\alpha_n} \longrightarrow y$$

e questo è assurdo perchè $-\frac{x_n}{\alpha_n} \in M$ che è chiuso ed $y \notin M$.

E adesso siamo arrivati al teorema sul prolungamento di una funzione, anche detto di Hahn - Banach.

[3]Gli aperti negli spazi metrici sono palle.

Teorema 4.1 (**Hahn - Banach**)**.** *Sia X uno spazio vettoriale normato, M un sottospazio e $T : M \longrightarrow \mathbb{K}$ un operatore lineare continuo. Allora esiste un'estensione $S : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineare e continua tale che*

$$S_{|M} = T \qquad \|S\| = \|T\|.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in due parti. Nella prima supporremo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mentre nella seconda saremo sui complessi e ci ricondurremo alla prima.

(1) (a) Siano le coppie (N, S) dove $N \subset X$ è un sottospazio ed $M \subset N$. Sia anche S lineare e continua e tale che $S_{|M} = T$ e $\|S\| = \|T\|$. Dotiamo le coppie di un ordinamento: diremo che $(N_1, S_1) \prec (N_2, S_2)$ se $N_1 \subset N_2$ ed $S_{2|_{N_1}} = S_1$. Prendiamo una catena C e costruiamo, dato che certamente ne possiede uno, un suo maggiorante. Sia

$$N = \bigcup_i N_i$$

che è ancora un sottospazio $\forall\, x \in N$ per $x \in N_i \Rightarrow S(x) := S_i(x)$. Abbiamo che

$$|S(x)| = |S_i(x)| \leq \|T(x)\|.$$

Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale $(\overline{N}, \overline{S})$ e dobbiamo mostrare che $\overline{N} = X$.

(b) Supponiamo per assurdo che così non sia. Fissiamo un $y \notin \overline{N}$ e consideriamo $N := \{x + \lambda y, x \in \overline{N}, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Se $T \equiv 0$ è banale. Prendiamo, per semplicità, T tale che $\|T\| = 1$. Adesso vogliamo estendere T su N. Sia $G(x + \lambda y) = T(x) + \lambda\gamma$ con γ fissato. G è lineare e $G_{|\overline{N}} = T$ (cioè con $\lambda = 0$).
Scegliendo bene γ riusciamo a controllare $\|G\|$. Questo perchè, vogliamo arrivare a dismostrare che

$$|T(x) + \lambda\gamma| \leq \|x + \lambda y\| \quad \forall\, x \in \overline{N}, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$$

ossia che G è continuo. Adesso mandiamo $x \mapsto -\lambda x$ e di conseguenza troviamo

$$|T(-\lambda x) + \lambda\gamma| \leq \| - \lambda x - \lambda y\| \quad \forall\, x \in N, \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff | - T(x) + \gamma| \leq \|x - y\| \iff -\|x - y\| \leq -T(x) + \gamma \leq \|x - y\| \iff$$

hb1 (11)
$$T(x) - \|x - y\| \leq \gamma \leq T(x) + \|x - y\|.$$

Dimostrare la (11) significa ridursi a vedere che

$$\sup_X \big(T(x) - \|x - y\|\big) \leq \gamma \leq \inf_X \big(T(X) + \|x - y\|\big)$$

e lo vediamo così: siano $x', x'' \in M$, allora

$$T(x') - T(x'') = T(x' - x'') \Longrightarrow \|T(x') - T(x'')\| \leq \|T\|\|x' - x''\| = \|x' - x''\| \leq \|x' - y\| + \|x'' - y\|$$

quindi

$$\|T(x')\| - \|x' - y\| \leq \|T(x'')\| + \|x'' - y\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sup_M \big(\|T(x')\| - \|x' - y\|\big) \leq \gamma \leq \inf_M \big(\|T(x'')\| + \|x'' - y\|\big)$$

per Dedekind. Quindi abbiamo esteso T e questo è assurdo perchè contrasta con il lemma di Zorn.

(2) Adesso finalmente la seconda ed ultima parte della dimostrazione. Da ora in poi $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La dimostrazione avverrà due piccoli lemmi indipendenti.

(a) Sia F un operatore su X (generico, non quello del teorema) spazio vettoriale normato su $\mathbb{C}$. Allora F è lineare e continuo.
Si ha $F(x) = u(x) + iv(x)$ con $u, v : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dove u e v sono $\mathbb{R}$-lineari. Si ha che

$$u(ix) + iv(ix) = F(ix) = (\text{linearità}) = iF(x) = iu(x) - v(x) \iff$$

$$\iff v(x) = -u(ix)$$

e di conseguenza $F(x)$ è $\mathbb{C}$-lineare se è della forma $F(x) = u(x) - iu(ix)$. Questo significa che estendere un operatore $\mathbb{C}$-lineare comporta farlo sulla sua parte reale, cosa che sappiamo fare grazie a quanto visto sopra.

(b) Sulla norma di F cosa si può dire? Abbiamo che

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| \leq |F(x)| \Longrightarrow \|u\| \leq \|F\|.$$

Adesso prendiamo $\mathbb{C} \ni \alpha$, con $|\alpha| = 1$ e soprattutto tale che $\alpha F(x) = F(\alpha x) = |F(x)|$. Allora avremo

$$|F(x)| = |F(\alpha x)| = |u(\alpha x)| \leq \|u\| \|\alpha x\| = \|u\| \|x\| \Longrightarrow \|F\| \leq \|u\| \ \forall\, x$$

e poichè abbiamo visto che valgono entrambi i segni di disuguaglianza, allora

$$\|F\| = \|u\|$$

ossia anche nel caso complesso, la norma dell'operatore è in realtà quella della sua parte reale, per la quale, vale la prima parte della dimostrazione. Questo significa che, tornando al teorema, abbiamo una T $\mathbb{C}$-lineare su M e per la prima parte della dimostrazione esiste $U : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare tale che $U_{|M} = T$ e $\|U\| = \|\operatorname{Re} T\|$.

□

Teorema 4.2 (Hahn-Banach generalizzato). *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ed M un suo sottospazio. Sia $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare. Supponiamo che $\exists\, p$ seminorma (definita in (7.1)) tale che $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfi le seguenti relazioni:*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall\, x, y \in X$;
2. $p(\lambda x) = \lambda p(x)\ \forall\, \lambda \geq 0$;
3. $|F(x)| \leq K p(x)\ \forall\, x \in M$.

Allora esiste S su X tale che $S_{|M} = F$ e $|S(x)| \leq K p(x)\ \forall x \in X$.

5. Venerdì 5.10.2012 - Conseguenze di Hahn - Banach e topologia debole

Teorema 5.1. *Sia X uno spazio normato e $0 \neq x_0 \in X$. Allora $\exists\, F \in X^*$ tale che $\|F\| = 1$ e $F(x_0) = \|x_0\|$.*

Dimostrazione. Prendiamo $M := \{\lambda x | \lambda \in \mathbb{K}\}$, il quale è un sottospazio. In esso $F(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$ per definizione e per il teorema di Hahn - Banach F si estende a tutto X. Calcoliamo la norma di F:

$$\|F\| := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\| \Longrightarrow \|F(\lambda x_0)\| \leq \|F\| |\lambda| \|x_0\| \Longrightarrow \|F\| = 1.$$

□

Corollario 2. *Siano $x \in X$ ed $x^{**} \in (X^*)^*$. Con la F del precedente teorema si ha*

$$x^{**}(F) = \overline{F}(x) = \|x\|.$$

Allora

$$\|x^{**}\| = \|x\|.$$

Definizione 5.1 (Iniezione canonica). *Si ha l'applicazione*

$$\begin{array}{rcc} J : X & \longrightarrow & (X^*)^* \\ x & \longmapsto & x^{**} \end{array} \tag{12}$$

dove $\forall\, F \in X^*$ si ha $x^{**}(F) := F(x)$.

L'applicazione J è lineare, limitata ed iniettiva. In particolare vediamo questa sua ultima proprietà: siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $J(x_1) = J(x_2)$; allora

$$0 = \|x_1^{**} - x_2^{**}\| = \|x_1 - x_2\| \Longrightarrow x_1 \equiv x_2$$

Corollario 3. *Sia X uno spazio normato e M un suo sottospazio chiuso. Sia $\bar{x} \notin M$. Allora $\exists\, F \in X^*$ tale che $F_{|M} \equiv 0$ ed $F(\bar{x}) = 1$.*

Dimostrazione. Sia $N = \bar{x} + M$ il quale è un sottospazio chiuso. (Esempio 4.6). Definisco $F(x + \lambda \bar{x}) = \lambda$. Allora F è definita su tutto N. Allora per il teorema di Hahn - Banach si estende su X. □

Fra le conseguenze del teorema di Hhan-Banach vediamo alcune sue conseguenze di natura geometrica.

Lemma 5.1 (Funzionale di Minkowski, gauge di un convesso). *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ e sia C un aperto convesso tale che $0 \in C$. Posto*

$$p(x) := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\}$$

allora esso è tale che

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \, \forall \, x, y \in X$ *ed* $p(\lambda x) \leq \lambda p(x) \, \forall \, \lambda > 0$;
(2) $p(x) \leq M\|x\|$;
(3) $C = \{x : p(x) < 1\}$.

Dimostrazione. Prendiamo $x, y \in X$ e fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che si possa dividere per qualcosa di maggiore di $p(\cdot)$ così da avere

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \qquad \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C.$$

Ma, per ipotesi, C è convesso e quindi

$$t\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \leq 0.$$

Ora scegliamo un tempo t tale che

$$\frac{t}{p(x)+\varepsilon} = \frac{1-t}{p(y)+\varepsilon} \Longrightarrow t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \Longrightarrow 0 \leq t \leq 1.$$

Con una serie di calcoli troviamo che

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C \Longrightarrow p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

Adesso passiamo a dimostrare la seconda. Possiamo prende una palla $B(x_0, \rho) \subseteq C$ e scegliamo $\tilde{p}\frac{x}{\|x\|}$. Si ha che $\tilde{<}p$ e inoltre $x \setminus \frac{\|x\|}{\tilde{p}} \in C$ cioè siamo sul bordo. Si ha che

$$p(x) \leq \frac{\|x\|}{\rho}$$

e questo conclude la dimostrazione della seconda proprietà. Passiamo alla terza. Sia $x \in C$ tale che $\forall \, \varepsilon > 0 \, (1+\varepsilon)x \in C$. Ma questo significa che

$$\frac{\frac{x}{1}}{1+\varepsilon} \longrightarrow p(x) < 1.$$

Viceversa, supponiamo $p(x) = \inf \alpha < 1$; di conseguenza esiste un $\alpha < 1$ tale che $\frac{x}{\alpha} \in C$, ma C è convesso e quindi vi apparterranno anche tutti i

$$t\frac{x}{\alpha} + (1-t)\frac{x}{\alpha} \quad \forall \, t \in [0,1].$$

□

hbg

Proposizione 5.1 (Hahn-Banach geometrico). *Sia X uno spazio vettoriale normato e sia C un aperto convesso e $x_0 \notin C$. Allora esiste $F \in X^*$ tale che $F(x) < F(x_0) \, \forall \, x \in C$.*

Dimostrazione. Sia $M := \{\lambda x_0\}$ e $G : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $G(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$. Si ha che per tutti gli $x \in M$, $G(x) \leq p(x)$ perchè G è lineare e se $\lambda > 0$ allora

$$\lambda G(x_0) = G(\lambda x_0) \leq p(\lambda x_0) = \lambda p(x_0).$$

Ma se $\lambda < 0$ si ha $G(\lambda x_0) < 0$ mentre $p(\lambda x_0) \geq 0$. Adesso, quindi, utilizziamo il teorema di Hahn - Banach generalizzato: allora esiste una $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare e tale che $F\big|_M = G$ e $F(x) \leq p(x) \, \forall \, x$. Resta da mostrare che F è continua. Se $F(x) > 0$ già sappiamo che $|F(x)| \leq M\|x\|$ mentre se $F(x) < 0 \Longrightarrow F(-x) \leq M\|-x\| = M\|x\|$ e quindi per tutti i λ, $F \in X^*$ ed è limitato e quindi continuo. □

Questo lemma è necessario alla dimostrazione dei prossimi due risultati, che per il momento enunciamo soltanto. La dimostrazione verrà data in seguito.

hbg1

Teorema 5.2 (Hahn-Banach: prima forma geometrica). *Sia X uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$ e siano A, B convessi tali che $A \neq \varnothing \neq B$ e $A \cap B = \varnothing$, in più A sia aperto. Allora esistono $T \in X^*$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $T(x) \leq \alpha \, \forall \, x \in A$ e $T(x) \geq \alpha \, \forall \, x \in B$ ossia esiste un iperpiano $T(x) = \alpha$ che separa i due convessi.*

hbg2 **Teorema 5.3 (Hahn-Banach: seconda forma geometrica).** *Sia X uno spazio vettoriale normato su $\mathbb{R}$ e siano A, B convessi tali che $A \neq \emptyset \neq B$ e $A \cap B = \emptyset$. Sia A chiuso e B compatto. Allora esistono $T \in X^*, \alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\forall\, x \in A,\ T(x) \leq \alpha - \varepsilon \qquad \forall\, x \in B,\ T(x) \geq \alpha + \varepsilon$$

E' giunto il momento di parlare della topologia debole, ma soprattutto della sua utilità. Anticipiamo qual'è la filosofia che vi è dietro tutti gli indebolimenti che di qui in poi vedremo. Per dirla in parole povere, nella topologia della norma abbiamo troppi aperti e questo rende meno facile il poter affermare che uno spazio è compatto o meno. L'obiettivo sarà mantenere solo gli aperti utili a mantenere continue ben precisi tipi di applicazioni tramite topologie meno fini, che quindi abbiano meno aperti di quella usuale con cui abbiamo lavorato fino ad ora.
Supponiamo di avere X insieme, Y_i spazi topologici e delle $T_i : X \longrightarrow Y_i$. Chiamiamo τ la topologia meno fine che ci renda continue tutte le T_i; di conseguenza, preso V_i intorno di $T_i(\bar{x})$ si ha che $T_i^{-1}(V_i)$ è un intorno di $\bar{x}$. Per costruire questa topologia bisogna fare l'intersezione finita e poi l'unione, al più numerabile, di questi intorni, così da avere come base degli aperti:

$$\mathscr{B} := \left\{ \bigcup \bigcap_i T_i^{-1}(V_i) \right\}.$$

Teorema 5.4. *Sia la topologia τ di cui sopra. Allora*

$$x_n \xrightarrow{\tau} \bar{x} \iff T_i(x_n) \longrightarrow T_i(\bar{x})\, \forall\, i \in I.$$

Dimostrazione. Che la convergenza degli x_n implicasse quella dei $T_i(x_n)$ già lo sapevamo. Dimostriamo il viceversa: prendiamo U un intorno di $\bar{x}$, il quale, sarà fatto come abbiamo detto sopra. Sappiamo che per ogni i si ha che $T_i(x_n) \longrightarrow T_i(\bar{x})$. Fissiamo i, per esempio $i = 1$. Allora $T_1(x_n) \longrightarrow T_1(\bar{x})$ è continua ossia $\exists\, \nu_1$ tale che per $n \geq \nu_1 \Rightarrow T_1(x_n) \in V_{i_1}$. Faccio questa cosa per tutti gli i (sono in numero finito) e prendo $\nu = \max_i\{\nu_i\}$. Questo conclude la dimostrazione. □

Sia adesso X uno spazio di Banach e X^* il suo duale. Anche su quest'ultimo vogliamo esplicitare il sistema fondamentale di intorni che renda σ la topologia meno fine fra quelle che conservano la continuità $\forall\, T \in X^*$ con $T : X_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$. Come facciamo? Fissiamo un $\bar{x} \in X$ e cerchiamo, anche in questo caso, un sistema fondamentale di intorni, i quali, anche se siamo in uno spazio normato, non saranno più palle, dato che la topologia non è più quella della norma. . Si avrà

$$U(\bar{x}) = U(\bar{x}, T_1, \ldots, T_n, \varepsilon) := \{x \in X : |T_i(x) - T_i(\bar{x})| \leq \varepsilon\}.$$

Sia ora $U(\bar{x})$ e prendo $x_1 \in U(\bar{x})$. Ci chiediamo se esiste un $U(x_1) \subset U(\bar{x})$. La risposta è si: basta prendere $\rho = \varepsilon - \max_{i=1\ldots N} |T_i(\bar{x}) - T_i(x_1)|$. Questa è la topologia debole $\sigma(X, X^*)$ in X.

Definizione 5.2 (Topologia debole). *La topologia debole $\sigma(X, X^*)$ è la topologia meno fine che rende continui i $\{T_i\}$ nella costruzione appena vista con X spazio di Banach ed $Y_i = \mathbb{R}$.*

Definizione 5.3. *Si indica la convergenza debole con la seguente notazione*

$$x_n \rightharpoonup x \iff \forall\, T \in X^*\ T(x_n) \longrightarrow T(x).$$

Esempio 5.1. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{q_i\}$ un sistema ortonormale. Si ha che le q_i non convergono a nulla in norma perchè non si tratta di una successione di Cauchy, ma $q_i \rightharpoonup 0$. Si dimostra grazie all'identificazione di Riesz: applicare una T è equivalente a fare un prodotto scalare. Quidni bisogna mostrare che*

$$(q_i, x) \longrightarrow (0, x) = 0$$

e si vede facilmente perchè sappiamo che

$$\sum_{i \in I} |(q_i, x)|^2 \leq \|x\|^2 \Longrightarrow \textit{gli } a_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow (q_i, x) \longrightarrow 0.$$

6. Martedì 9.10.2012 - Teorema di Banach - Steinhaus e topologia $*$-debole

Teorema 6.1 (B-S: dell'uniforme limitatezza). *Sia no X e Y spazi di Banach e siano $\{T_i\} : X \longrightarrow Y$ operatori lineari e continui. Allora vale o la prima o la seconda delle seguenti due affermazioni:*

(1) *se si ha limitatezza puntuale allora si ha limitatezza uniforme ossia se $\forall\, x \in X\ \sup_i \|T_i(x)\|_Y < M \Longrightarrow \sup_i \|T_i\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < +\infty$; ossia;*
(2) *$\exists\, G \subset X$ sottoinsieme denso in X e $\forall\, x \in G \Rightarrow \sup_i \|T_i(x)\| = +\infty$.*

Prima di dimostrarlo ricordiamo il

Teorema 6.2 (**Baire**)**.** *Se X è uno spazio metrico completo e gli aperti U_n sono densi allora*
$$X = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n}.$$

Dimostrazione. (Banach - Steinaus) Prendiamo l'insieme degli $x \in X$ tali che $|T_\alpha(x)| > n$ e lo chiamiamo $V_{\alpha,n}$ ossia
$$V_{\alpha,n} := \{x \in X : |T_\alpha(x)| > n\}$$
. Esso è aperto, essendo controimmagine di un aperto tramite una funzione continua quindi facciamo l'unione
$$\bigcup_{\alpha\in A} V_{\alpha,n} = V_n$$
dove almeno per un α si ha $T_\alpha(x) > n$. Osserviamo che V_n è unione di aperti e quindi è ancora un aperto. Adesso finalmente, si ha
$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n := \left\{x : \sup_{\alpha\in A} |T_\alpha(x)| = +\infty\right\}.$$
Adesso abbiamo due casi, che si distinguono sul fatto che V sia o meno denso in X.

(1) Supponiamo esista un n tale che V_n non è denso in X ossia $\exists\, x_0, \rho$ tali che $\|x\| \le \rho \iff x_o + x \notin V_n$ o ancora, equivalentemente, che $\exists\, B(x_0, 2\rho)$ tale che $B(x_0, 2\rho) \cap V_n = \emptyset$, $\forall\, n$. E' come dire che $\|T_\alpha(x_0)\| \le n$ ed $\|T_\alpha(x_0 + x)\| \le n$.
Si ha che
$$\|T_\alpha(x)\| = \|T_\alpha(x_0 + x) - T_\alpha(x_0)\| \le \|T_\alpha(x_0 + x)\| + \|T_\alpha(x_0)\| \le 2n.$$
(2) Se invece $\forall\, n V_n$ è denso in X, per il teorema di Baire (che vale grazie al fatto che X è di Banach) si ha che $\cap_{n\in\mathbb{N}} V_n = G$.

□

Teorema 6.3. *Sia X spazio normato. Allora vale:*

condeb
$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow \|x_n\| \le M \tag{13}$$

Dimostrazione. La filosofia della dimostrazione è di passare ai funzionali per poter utilizzare il teorema di Banach - Steinaus. Inoltre sfrutteremo il fatto che, come conseguenza del teorema di Hahn - Banach, $\|x^{**}\| = \|x\|$. Sia $\{x_n^{**}\} \in X^{**}$. Quindi basterà mostrare che $\|x_n^{**}\| \le M$, indipendente da n. Si ha $\forall\, F \in X^*$ che $x_n^{**}(F) := F(x_n) \longrightarrow F(x)$ ossia $x_n \rightharpoonup x$, ma $(F(x_n))_n$ è una successione di numeri convergente e quindi è limitata. Questo è equivalente a dire che $|F(x_n)| \le M\ \forall\, n$ e ciò implica che, in $\mathbb{R}$,
$$\|x_n\| = \|x_n^{**}\| \le M.$$

□

Esercizio 1. *Sia $X = \mathscr{C}([0,1])$ e sia $\delta_{\frac{1}{n}} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ dove $\delta_{\frac{1}{n}}(f) = f(\frac{1}{n})$. Studiare la convergenza debole di tale operatore.*

Proposizione 6.1. *Sia $\{x_n\} \in X$ spazio di Banach dove $x_n \rightharpoonup x$. Inoltre $\{T_n\} \subset X^*$ e tali operatori sono tali che $T_n \longrightarrow T$ in X^*. Allora $T_n(x_n) \longrightarrow T(x)$ ossia*
$$\|T_n - T\|_{X^*} \longrightarrow 0.$$

Dimostrazione. Si ha che
$$|T_n(x_n) - T(x)| \le |T_n(x_n) - T(x_n)| + |T(x_n) - T(x)|$$
ma $|T(x_n) - T(x)| \longrightarrow 0$ perchè è proprio la definizione di convergenza debole. L'altro addendo è $\le \|T_n - T\|\|x_n\|$ dove $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$ e $\|x_n\| \le M$. Questo conclude la dimostrazione. □

Abbiamo già visto un controesempio nel quale $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow \|x_n\| \longrightarrow \|x\|$, ma adesso vedremo che qualcosa si può comunque dire.

Proposizione 6.2. *Vale la seguente:*
$$x_n \rightharpoonup x \Longrightarrow \|x\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|. \tag{14}$$

Dimostrazione. Sappiamo che per tutti i T si ha che $|T(x_n)| \leq \|T\|\|x_n\|$ e che $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ dato che per ipotesi c'è convergenza debole. Allora si ha che

$$|T(x)| \leq \|T\| \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$$

ma osserviamo che $\|x\| = \|x^{**}\| = \sup_{\|T\|=1} |T(x)| = |\bar{T}(x)|$ e di conseguenza

$$\|x\| = |\bar{T}(x)| \leq \underbrace{\|\bar{T}\|}_{=1} \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

□

Adesso vedremo come, nel caso in cui la dimensione dello spazio sia finita, il concetto di convergenza in norma e quello di convergenza debole siano del tutto equivalenti.

Proposizione 6.3. *Sia X di dimensione finita. Allora una successione $\{x_n\} \in X$ converge in norma se e solo se converge debolmente.*

Dimostrazione. Fissato $U(x_0)$ intorno nella topologia della norma, vogliamo trovare

$$V(x_0) = \{x \in X : |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon \ \forall\, i = 1, \dots, n = \dim X\},$$

intorno in quella debole, che sia contenuto in U. Scelta una base di versori di X ($\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$), per ogni x abbiamo $x = \sum_i x_i e_i$. Fissato $r > 0$, sia $B_r(x_0) \subset U$. Osserviamo che le proiezioni $f_i : x \to x_i$ sono funzioni lineari e continue su X. A questo punto abbiamo

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(x_0)| < n\varepsilon \qquad \forall\, x \in V.$$

Scegliendo $\varepsilon = r n^{-1}$ otteniamo $V \subset U$. □

Definizione 6.1 (Stretta convessità). *Sia X uno spazio normato. Esso è detto strettamente convesso se $\forall\, x, y$ tali che $\|x\| = \|y\| = 1$ con $x \neq y$, si ha che*

$$\|tx + (1-t)y\| \leq 1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Proposizione 6.4. *Sia X uno spazio normato. Se la norma è indotta da un prodotto scalare allora X è strettamente convesso.*

Dimostrazione. Si ha, osservando che $|(x,y)| < 1$, che

$$\|tx + (1-t)y\|^2 = t^2 + 2t(1-t)(x,y) + (1-t)^2 \leq t^2 + 2t - 2t^2 + 1 + t^2 - 2t < 1.$$

□

Adesso sia X^* e mettiamo anche su di esso la topologia debole $\sigma(X^*, X^{**})$. Come saranno fatti i suoi intorni? Siano $\phi_i \in X^{**}$. Allora avremo

$$U(\overline{F}, \phi_1 \dots \phi_n, \varepsilon) := \{F \in X^* : |\phi_i(F) - \phi_i(\overline{F})| \leq \varepsilon\}.$$

Su X^* possiamo mettere una topologia ancora meno fine.

Definizione 6.2 (Topologia $*$-debole). *Su X^* definiamo come sistema fondamentale di intorni della topologia $\sigma(X^*, X)$ gli insiemi della forma*

$$U(\overline{F}) := U(\overline{F}, x_1 \dots x_n, \varepsilon) := \{|x_i^{**}(F) - x_i^{**}(\overline{F})| = |F(x_i) - \overline{F}(x_i)| \leq \varepsilon\}.$$

E' la topologia meno fine su X^* che rende continui gli $\{x_i^{**}\}$ nella costruzione precedente in cui lo spazio di partenza è X^* ed $Y_i = \mathbb{R}$

Definizione 6.3 (Convergenza $*$-debole). *Si dice che*

$$F_n \overset{*}{\rightharpoonup} F$$

se $\forall\, x\, F_n(x) \longrightarrow F(x)$. Inoltre la convergenza $*$-debole di una successione di funzionali implica per essi che $\|F_n\| < M$ ossia per Banach - Steinhaus sono equilimitate in norma.

Osservazione 6.1. *Sappiamo che, a priori, $X \subset X^{**}$, di conseguenza la topologia $*$-debole $\sigma(X^*, X)$ è meno fine della debole sul duale ossia della $\sigma(X^*, X^{**})$; quindi ha meno aperti di essa che, a sua volta, ne ha meno di quella forte.*

E adesso una nuova questione. Supponiamo di avere X spazio di Banach e $\dim X = +\infty$. Sia $S := \{x : \|x\| = 1\}$; sappiamo che S è chiuso dato che è l'inverso di 1 tramite un'applicazione continua. La domanda ora è: è chiuso anche nella topologia debole? La risposta ce la da il seguente teorema.

Teorema 6.4. *S non è chiuso nella topologia debole e la sua chiusura è*

$$\overline{S^{\sigma}} = \{x : \|x\| \le 1\}.$$

Dimostrazione. Fissiamo un x_0 tale che $\|x_0\| < 1$ e prendiamo un suo intorno

$$V := \{x : |T_i(x) - T_i(x_0)|_{i=1\dots N} < \varepsilon\}$$

dove i $T_i \in X^*$. Prendiamo adesso un $y_0 \neq 0$, ma tale che $T_i(y_0) = 0\,\forall\, i$. Osserviamo che un tale y_0 esiste a causa della dimensione infinita dello spazio: se ho $T = (T_1, \dots, T_n)$ tale che $T : X \longrightarrow \mathbb{K}^n$, essa è suriettiva. Se un tale elemento non esistesse essa sarebbe anche iniettiva e quindi invertibile e ciò sarebbe assurdo perchè $\dim \mathbb{K}^n = n$ mentre $\dim X = +\infty$.
Torniamo a noi e prendiamo $(x_0 + t y_0) \in V\,\forall\, t$. Si ha

$$f(t) = \|x_0 + t y_0\| \ge \|t y_0\| - \|x_0\| = |t|\|y_0\| - \|x_0\|$$

. Osserviamo che $f(0) = \|x_0\| < 1$ per la scelta di x_0 mentre $\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$. Allora esiste un t tale che

$$\|x_0 + t y_0\| = 1.$$

□

Osservazione 6.2. *Sia*

$$B := \{x : \|x\| < 1\}.$$

Per B sappiamo che è aperto nella topologia della norma. Purtroppo non è così per quella debole, perchè per qualsiasi $x_o \in B$ che si scelga, in ogni suo intorno cadranno infiniti punti con $\|x\| \equiv 1$ e quindi non è aperto.

Avviamoci al discutere questioni di compattezza di spazi prodotto infinito.
Supponiamo di avere su degli X_i, spazi topologici, una $\phi \in \prod_{i\in I} X_i$ tale che $\phi_i \in X_i\,\forall\, i$. Grazie al teorema di Tychonov si ha che se tutti gli gli X_i sono compatti allora lo è anche il loro prodotto (che può essere al più numerabile). Questo ci servirà per dimostrare il prossimo risultato.

Teorema 6.5 (**Banach - Alaoglu**). *Sia la topologia $*$-debole $\sigma(X^*, X) \doteq \sigma^*$. Allora*

$$\Sigma := \{T : \|T\| \le 1\}$$

è compatta in X^* per σ^*.

Dimostrazione. Al variare di $x \in X$ prendiamo

$$S = \prod_{x\in X} S_x = \prod_{x\in X} \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \le \|x\|\}.$$

Gli S_x sono compatti e con la topologia prodotto lo è anche S. Ma vediamo di capire chi è S: vedremo che sussiste una relazione uno a uno tra i suoi elementi e quelli di X^*.
Si ha $\phi \in S$ se $\forall\, x \in X \Rightarrow \phi(x) \in S(x)$,cioè , ad ogni elemento di S corrisponde un'applicazione tale che $\forall\, x \in X \Rightarrow |\phi(x)| \le \|x\|$ dove $\phi : X \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si ha per $T \in \Sigma$ se $|T(x)| \le \|T\|\|x\| \le \|x\|$. Ma nella topologia prodotto τ_{Π},. se $\bar{\phi} \in S$, allora (fissati $x_1, \dots, x_n$ ed ε) un suo intorno U sarà, formalmente, tale che

$$|\phi_{x_i} - \bar{\phi}_{x_i}| = |\phi(x_i) - \bar{\phi}(x_i)| < \varepsilon\,.$$

Ma questi erano gli intorni di una topologia già incontrata...
In effetti è la topologia $*$-debole e si ha

$$\tau_{\Pi|_{\Sigma}} \equiv \sigma^* \Longrightarrow \Sigma \subset S. \tag{15}$$

La situazione quindi è la seguente: S è compatto in τ_{Π} per Tychonov e contiene Σ che ha come topologia indotta quella $*$-debole. Quindi per dimostrare che Σ è compatta dobbiamo verificare che è un chiuso (essendo sottoinsieme di un compatto) ossia che è la chiusura di S ossia che

$$\overline{\Sigma} = \Sigma.$$

Sia $\phi \in \overline{\Sigma}$ e ci chiediamo se $\phi \in \Sigma$ ed in particolare se ϕ è lineare. Fissiamo x ed y. L'obiettivo è valutare $\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)$; adesso fissiamo ε e prendiamo un intorno $U(\phi) \in S$. Questo intorno, ricordiamo, dovrà dipendere anche da $x, y, x+y$. Allora

$$U(\phi, x, y, x+y, \varepsilon) \cap \Sigma \neq \varnothing \iff \exists\, T \in X^* : \|T\| < 1$$

con T che dovrà appartenere anche ad U oltre che a Σ. Allora dire che $T \in U$ è equivalente a dire che $|\phi(x+y) - T(x+y)| < \varepsilon$. Allora si ha che

$$\begin{aligned} |\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)| &= |\phi(x+y) - T(x+y) - \phi(x) + T(x) - \phi(y) - T(y)| \leq \\ &\leq |\phi(x+y) - T(x+y)| + |T(x) - \phi(x)| + |T(y) - \phi(y)| \leq \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned} \tag{16}$$

□

7. Martedì 16.10.2012 - Seminorme e spazi di Fréchet

Sia $\mathscr{C}(\Omega)$ con Ω aperto. Vogliamo dare una nozione di convergenza per una successione f_n su ogni compatto $K \subset \Omega$, ma non c'è una norma che lo permetta. Vediamo cosa si può fare. Prendiamo $K \subset\subset \Omega$ e definiamo

$$p_i(x) := \max_{x \in K_i} |f(x)|$$

dove i compatti sono tali che $K_i \subseteq \mathring{K}_{i+1}$ e $\Omega = \cup_i K_i$ (ossia si tratta di un'esaustione in compatti).

semin **Definizione 7.1** (**Seminorma**). *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Allora le p_i sono seminorme se:*[4]

(1) $p_i(x+y) \leq p_i(x) + p_i(y)$;
(2) $p_i(\lambda x) = |\lambda| p_i(x)$ *e* $p(0) = 0$;
(3) $\forall\, i\ p_i(x) = 0 \Longrightarrow x \equiv 0$.

Osservazione 7.1. *Osserviamo che le seminorme sono definibili anche per un insieme di indici I di cardinalità arbitraria, ma di fatto ci interesserà solo il caso in cui I è numerabile.*

Non è restrittivo considerare le seminorme tali che $p_i \leq p_{i+1}$. Basta definire $q_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$ e automaticamente sono crescenti, ma non equivalenti; questo non rappresenta un problema dato che esse inducono la stessa topologia.[5] Inoltre, che senso ha dare un intorno? Gli intorni ora saranno dei

$$U(\bar{x}, p_1, \ldots, p_n, \varepsilon) := \{x : p_i(x - \bar{x}) < \varepsilon, i = 1 \ldots N\}$$

e per avere quelli giusti prendiamo la seminorma massima così da trovare

$$U(\bar{x}, p, \varepsilon) := \{x : p(x - \bar{x}) < \varepsilon\}.$$

Per quanto riguarda la nozione di convergenza, in presenza di seminorme, si dice che $x \longrightarrow \bar{x}$ se $\forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, i\, \exists\, \bar{n} : p_i(x - \bar{x}) < \varepsilon$ per $n \geq \bar{n}$. Adesso possiamo definire, tra l'altro, una distanza che induce la stessa topologia. Sia

$$d(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}.$$

Si osservi che in virtù del teorema di Lebesgue, valido in questo caso per la presenza della misura che conta i punti, possiamo maggiorare la distanza con 2^{-i}; come conseguenza, dire che $x \longrightarrow \bar{x}$ è equivalente a dire che $d(x, \bar{x}) \longrightarrow 0$.

Definizione 7.2 (**S.L.C.M.**). *Uno spazio vettoriale X è detto spazio localmente convesso metrizzabile (numerabile) se esiste una famiglia di seminorme p_i su di esso. In più richiediamo che $p_i \subset p_{i+1}$.*

Definizione 7.3 (**Spazi di Fréchet**). *Uno spazio di Frèchet è uno spazio vettoriale X, metrizzabile, localmente convesso e completo.*

---

[4] Si presti attenzione alla terza condizione: il fatto che debba valere per tutti gli indici crea il distinguo tra la nozione di norma e quella di seminorma.

[5] $\{p_i\}_{i \in I} \equiv \{q_j\}_{j \in J} \iff \begin{cases} \forall\, i\, \exists\, \bar{j} : \forall\, x \Rightarrow p_i \leq C_1 q_{\bar{j}} \\ \forall\, j\, \exists\, \bar{i} : \forall\, x \Rightarrow q_j \leq C_2 p_{\bar{i}} \end{cases}$

Facciamo alcuni esempi. Prendiamo un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Lo si può vedere come unione di compatti ossia

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \qquad k_i \subset\subset K_{i+1}$$

e per esempio si può prendere $K_i := \{x : d(x, \Omega^{\complement}) \geq \frac{1}{i}\} \cap \overline{B(0,i)}$

Osservazione 7.2. *Sia $\mathscr{C}(\Omega)$. Per questo spazio il problema è che non riusciamo a renderlo uno spazio di Banach; di conseguenza l'unica alternativa è porre su di esso delle seminorme:*

$$p_i(f) := \max_{x \in K_i} |f(x)| \text{ ossia } p_i(f) := \|f\|_{\mathscr{C}^{\infty}(K_i)}.$$

E' uno spazio completo e quindi ogni successione di Cauchy converge uuniformemente sui compatti ossia $f_{k_{|K_i}} \longrightarrow f$ sui K_i. Quindi si tratta di uno spazio di Fréchet.

Osservazione 7.3. *Sia $\mathscr{C}^k(\Omega)$. Esso è uno spazio di Fréchet con le seminorme*

$$p_i(f) := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^{\alpha} f\|_{\mathscr{C}^{\infty}(K_i)}.$$

Se invece consideriamo $\mathscr{C}^{\infty}(\Omega)$, le seminorme adatte sono

$$p_i(f) := \sum_{|\alpha| \leq i} \|\partial^{\alpha} f\|_{\mathscr{C}^{\infty}(K_i)}$$

quindi le p_i sono tali che $\partial^{\alpha} f_n \longrightarrow \partial^{\alpha} f$ uniformemente: fissato un K_i, su di esso vi sarà convergenza uniforme fino all'ordine di derivazione i-esimo. Anche lui è uno spazio di Fréchet.

Osservazione 7.4. *Sia $L^p_{loc}(\Omega)$. Esso è lo spazio delle funzioni misurabili su Ω tali che $\forall K \subset\subset \Omega$ $f \in L^p(K)$ con $1 \leq p < +\infty$. per esempio la funzione $f = \frac{1}{x} \in L^1_{loc}((0,+\infty))$ ma $\notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e per vederlo basta prendere un compatto attorno allo zero. Detto questo, ricordiamo che anche qui si hanno le seminorme, che in questo caso saranno*

$$p_i(f) := \|f\|_{L^p(K_i)}.$$

Infine, dato che sono completi tutti i $L^p(K_i)$ $\forall i$, allora, lo è anche L^p_{loc}: presa una successione $\{f_n\}$ di Cauchy in L^p_{loc} si ha che per ogni K compatto fissato f_n è di Cauchy in $L^p(K)$, dunque converge ad una certa $f \in L^p(K)$, quindi $f \in L^p_{loc}$. Di conseguenza L^p_{loc} è uno spazio di Frèchet.

Osservazione 7.5. *Si ha lo spazio di Schwartz:*

$$\mathscr{S} := \left\{\varphi \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha \, \forall \beta \; x^{\beta} \partial^{\alpha} \varphi(x) \longrightarrow 0 \text{ se } |x| \to +\infty\right\}$$

dove, si dice che, φ e tutte le sue derivate sono a decrescenza rapida. Sceglieremo come seminorme le

$$p_i(\varphi) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq i \\ |\beta| \leq i}} \|x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})^n}.$$

Si ha che $\varphi \in \mathscr{S}$ se e solo se $\forall i$ $p_i(\varphi) < +\infty$. Facciamo una rapida stima: si ha

$$\|x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi\|_{L^1(\mathbb{R})^n} = \int_{\mathbb{R}^n} |x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi| dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{n+1} \frac{|x^{\alpha} \partial^{\beta} \varphi|}{(1+|x|)^{n+1}} dx \leq C_n p_{i+n+1}(\varphi)$$

dove

$$C_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{n+1}} < +\infty.$$

Quindi $\forall \varphi \in \mathscr{S} \Longrightarrow \varphi \in L^1$ ossia $\mathscr{S} \subset L^1$. Inoltre si può dimostrare che se $\varphi \in \mathscr{S}$ allora $\varphi^2 \in \mathscr{S}$ dunque, alla luce di quanto appena detto, $\mathscr{S} \subset L^2$.

Rienunciamo il teorema (5.2) e (5.3) che dimostreremo grazie alla proposizione (5.1).

Teorema 7.1 (Hahn-Banach: I forma geometrica). *Sia X uno spazio normato e siano $A \neq \emptyset \neq B$ convessi tali che $A \cap B = \emptyset$, con A aperto (è sufficiente richiedere che sia aperto uno solo dei due convessi). Allora esiste $T \in X^*$ tale che $T(x) \leq \alpha \; \forall x \in A$ e $T(x) \geq \alpha \; \forall x \in B$.*

Dimostrazione. Prendiamo
$$C = A - B = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$
e si ha che C è aperto (si tratta in effetti di A traslato) e che è convesso perchè
$$t(x_1 - y_1) + (1-t)(x_2 - y_2) = \underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in A} - \underbrace{ty_1 + (1-t)y_2}_{\in B}$$
dato che per ipotesi sia A che B sono convessi. Si ha, inoltre, che $0 \notin C$ perchè se così fosse allora potremmo scrivere $0 - 0 \in C$ con il primo in A e il secondo in B, ma è impossibile perchè per ipotesi $A \cap B = \emptyset$. Adesso applichiamo il lemma[6] a $x_0 = 0$ così da avere $0 = T(0) > T(z)\ \forall z \in C$ ma osserviamo che i $T(z)$ sono del tipo $T(x-y)$ quindi si ha
$$T(x) < T(y)\ \forall x \in A, \forall y \in B \Longrightarrow \sup_{x \in A} T(x) \le \alpha \le \inf_{y \in B} T(y)$$
e con questo il teorema è dimostrato. □

Teorema 7.2 (Hahn - Banach: II forma geometrica). *Siano A, B convessi non vuoti tali che $A \cap B = \emptyset$, con A chiuso e B sia compatto. Allora $\exists\, T \in X^*$, $\exists\, \alpha$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tali che*
$$\forall x \in A\ T(x) \le \alpha - \varepsilon \qquad \forall x \in B\ T(x) \ge \alpha + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Prendiamo
$$A_\varepsilon := \{x \in X : d(x, A) < \varepsilon\} = A + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} (x + B(0, \varepsilon))$$
e B_ε in modo analogo. Si ha che entrambi sono aperti convessi e affermiamo (lo dimostreremo immediatamente) che $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$. Se non fosse vero, allora $\forall n$ avremmo $A_{\frac{1}{n}} \cap B_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$. Questo significa che, presi $x_n \in A_{\frac{1}{n}}$ e $y_n \in B_{\frac{1}{n}}$ allora
$$x_n + \rho_n = y_n + \sigma_n \Longrightarrow \|x_n - y_n\| = \|\rho_n - \sigma_n\| < \frac{2}{n}$$
ma B è compatto per ipotesi ossia se $y_n \in B \Longrightarrow y_{n_k} \longrightarrow \bar{y}$ con $\bar{y} \in B$. In questo caso allora convergerebbe ad un $\bar{y} \in A$ il che è assurdo. Quindi l'intersezione di A e B è vuota. Allora possiamo applicare il teorema (7.1): esiste una $T \in X^*$ tale che $\forall x \in A$ e $\forall y \in B$ e per ogni z tale che $\|z\| < 1$ vale
$$T(x + \varepsilon z) \le \alpha \le T(y + \varepsilon z).$$
Questo implica che
$$\sup_{\|z\|<1} T(x + \varepsilon z) = T(x) + \varepsilon \|z\| \qquad \inf_{\|z\|<1} T(y + \varepsilon z) = T(y) - \varepsilon \|z\|$$
Ma allora
$$T(x) + \varepsilon \|z\| \le \alpha \le T(y) - \varepsilon \|z\|$$
che è proprio quello che volevamo dimostrare. □

Sia $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Avevamo mostrato che nella topologia debole $\sigma(X, X^*)$ si aveva $\Sigma \subset \overline{S}$ dove $\Sigma := \{x : \|x\| \le 1\}$. Alla luce del teorema appena dimostrato si ha proprio l'uguaglianza: si prende Σ come il chiuso A e prendiamo $B = \{x_0\}$ con $\|x\| > 1$ che, poichè è un solo punto, è banalmente chiuso e compatto. Quindi il teorema è applicabile e di conseguenza A e B sono separabili e per farlo basta prendere un intorno $U(x_0, T, \varepsilon) \ge \alpha + \varepsilon$.
Morale della favola: la palla unitaria è chiusa nella topologia debole.

Definizione 7.4 (Spazio separabile). *Sia X uno spazio topologico. Esso è separabile se esiste C sottospazio di X che sia denso e numerabile.*

Esempio 7.1 (Separabilità degli l^p). *Tutti gli l^p sono separabili tranne nel caso di l^∞.[7] Vediamo di mostrarlo, per esempio, nel caso di l^1.*
Prendiamo $C := \{x \in l^1 : x_i \in \mathbb{Q}, x_i \equiv 0$ definitivamente$\}$ e prendiamo un $\bar{x} \in l^1$. Fissato ε dobbiamo mostrare che $\exists\, y \in C : \|\bar{x} - y\|_{l^1} < \varepsilon$ ossia che $\sum_{i=\nu+1}^{\infty} |\bar{x}_i| < \frac{\varepsilon}{2}$. Basta prendere
$$y_i = \begin{cases} 0 & i > \nu \\ z_i \in \mathbb{Q} & i \le \nu \end{cases}$$

[6] in realtà si tratta del teorema di Hahn-Banach geometrico.
[7] SUssiste un risultato più generale per cui tutti gli $L^p(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ sono separabili per $1 \le p < +\infty$. (Brezis, pagg.98,99,103.)

con $|z_i - \bar{x}_i| \leq \frac{\varepsilon}{2\nu}$ *e di conseguenza abbiamo*

$$\|\bar{x} - y\|_{l^1} = \sum_{i=1}^{\infty} |\bar{x}_i - y_i| = \sum_{i=1}^{\nu} |\bar{x}_i - y_i| + \sum_{i=\nu+1}^{\infty} |\bar{x}_i - y_i| < \varepsilon.$$

8. Mercoledì 17.10.2012 - Metrizzabilità, separabilità e Teorema dell'applicazione aperta

Andiamo avanti con alcuni risultati riguardanti la separabilità.

Proposizione 8.1. *Lo spazio* $\mathscr{C}^{\infty} := \{x = (x_n)_{n\geq 1} : |x_n| < +\infty \, \forall \, n\}$ *non è separabile.*

Dimostrazione. L'idea, in questo tipo di dimostrazioni, è considerare un qualsiasi sottoinsieme numerabile $C \subset \mathscr{C}^{\infty}$ e mostrare che esiste una palla che non lo interseca: questo dimostra che C non è denso. Sia $x_n = x_1^n, x_2^n, \dots, x_k^n$ e prendiamo $C = \{x_n\}$. Cerchiamo un punto in $\mathscr{C}^{\infty}$ che si distanzi da tutti loro di 1. Sia

$$y_i := \begin{cases} -1 & x_i^i \geq 0 \\ 1 & x_i^i < 0 \end{cases}.$$

Si ha

$$d_{\mathscr{C}^{\infty}}(y_i, x_i^i) := \sup_i |y_i - x_i^n| \geq d_{\mathbb{R}}(y_i, x_i^i) \geq 1.$$

Adesso notiamo alcune cose. Posto $d(x_i^i, y_i) = |y_i - x_i^i|$,

- se $y_i - x_i^i \geq 0 \iff y_i \geq x_i^i \Rightarrow y_i = 1, x_i^i < 0 \Rightarrow 1 - x_i^i > 1$;
- se $y_i - x_i^i < 0 \iff y_i < x_i^i \Rightarrow y_i = -1, x_i^i \geq 0 \Rightarrow 1 + x_i^i \geq 1$.

Allora potremo sicuramente prendere una palla tale che $B(y, \frac{1}{2}) \cap C = \varnothing$. □

Proposizione 8.2. *Sia* X *uno spazio vettoriale normato e* $M \neq X$ *un sottospazio non denso. Allora* $\exists F \in X^*$ *tale che* $F \neq 0$ *ma* $F_{|_M} = 0$.

Dimostrazione. Sappiamo che $M \neq X \Rightarrow \exists x_0 \notin M$ e possiamo applicare il teorema di Hahn - Banach (II forma geometrica) con $A = \overline{M}$ (sottospazio vettoriale $\Rightarrow$ convesso), $B = \{x_0\}$ (è un punto e quindi è compatto) perchè $x_0 \notin M \Rightarrow A \cap B = \varnothing$. Allora esiste $F \in X^*, \exists \alpha$ tali che $F(x) \leq \alpha \leq F(x_0) \, \forall \, x \in M$. Quindi adesso abbiamo F, ma F limitata su M e poichè si deve avere $\lambda F(x) < \alpha \, \forall \, \alpha$ allora $F(x) = 0 \, \forall \, x \in M$. □

Definizione 8.1 (**Insiemi filtranti**)**.** *Sia* X *uno spazio con una famiglia più che numerabile di norme. L'insieme* I *è filtrante se in esso c'è un ordinamento parziale ossia se* $\forall \, i_1, i_2 \in I \, \exists \, j \in I$: $i_1 < j < i_2$.

Osserviamo che uno spazio X di questo tipo è ancora uno spazio topologico convesso, ma in genere non metrizzabile perchè non ha più una famiglia numerabile di norme, ma più che numerabile.

Esempio 8.1. *Sia* A *un insieme infinito qualunque. Prendiamo* $I := \{B : B \subseteq A, B \text{ finito}\}$ *come insieme filtrante perchè se* B_1, B_2 *sono finiti lo è anche* $B_1 \cup B_2$.

Esempio 8.2. *Sia* $\mathscr{F} := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}\}$. *E' uno spazio vettoriale e ci mettiamo la seminorma*

$$p_B(f) = \sum_{x \in B} |f(x)|.$$

Resta da verificare che essa lo sia.

(1) *Per la subadditività abbiamo che*

$$p_b(f+g) = \sum_{x \in B} |(f+g)(x)| \leq \sum_{x \in B} |f(x)| + \sum_{x \in B} |g(x)| = p_B(f) + p_B(g);$$

(2) *per la linearità si ha*

$$p_B(\lambda f) = \sum_{x \in M} |\lambda f(x)| = \lambda \sum_{x \in M} |f(x)| = \lambda p_B(f);$$

(3) *(*$\Longrightarrow$*) se* $p_B(f) = 0 \, \forall \, B \in \mathscr{F}$, *poichè* $B \subseteq A$ *possiamo prendere* $B = \{a\}$ *con* $a \in A$. *Allora* $p_{\{a\}}(f) = |f(a)| = 0 \, \forall \, a \in A \iff f \equiv 0$. *Il viceversa è ovvio.*

Quindi è una seminorma. E come saranno fatti gli intorni di un fissato $\bar{f}$? Si fissa un B, finito per definizione, e un ε tali che

$$U(\bar{f},B,\varepsilon)=\left\{f:\sum_{x\in B}|f(x)-\bar{f}(x)|<\varepsilon\right\}.$$

Osserviamo che si è scelto di fissare B perchè, dato un insieme filtrante I, esiste un $J=\bigcup_j i_j$ che maggiora tutti gli $i\in I$ e quindi possiamo scegliere proprio $B=J$.
Affermiamo che la topogia indotta τ è proprio quella della convergenza puntuale ossia quella tale che $f_n \xrightarrow{\tau} \bar{f} \iff \forall\, x\in A\; f_n(x)\longrightarrow \bar{f}(x)$.
Dimostriamo il ($\Longrightarrow$). Fissato $\varepsilon>0$ sia $U(\bar{f},B,\varepsilon)$ un intorno di $\bar{f}$; per ipotesi esiste un ν tale che $\forall\, n\geq\nu\Rightarrow\sum_{x\in B}|f_n(x)-\bar{f}(x)|<\varepsilon$. Ma $B\subseteq A$ è finito e quindi possiamo prendere $B=\{a\}$ con $a\in A$ così da avere che $|f_n(a)-\bar{f}(a)|<\varepsilon\;\forall\, a\in A\iff f_n(x)\longrightarrow\bar{f}(x)\;\forall\, x\in A$.
Dimostriamo il ($\Longleftarrow$) ossia che preso un intorno $U(\bar{f},B,\varepsilon)$ di $\bar{f}$, esiste un ν tale che per ogni $n\geq\nu$ si abbia $f_n\in U$. Per ipotesi sappiamo che $\forall\, x\in A$ si ha $f_n(x)\longrightarrow\bar{f}(x)$. Fissiamo un intorno $U(\bar{f})=U(\bar{f},B,\varepsilon_k)$ di $\bar{f}$, dove il numero dei B è k. Per ipotesi abbiamo che $\forall\, x\in B$ si ha $|f_n(x)-\bar{f}(x)|<\frac{\varepsilon}{k}\;\forall\, n\geq\nu\Rightarrow\sum_{x\in B}|f_n(x)-\bar{f}(x)|<k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon\iff f_n\xrightarrow{\tau}\bar{f}$.

Teorema 8.1. *Sia X uno spazio di Banach.*

$$X^* \text{ separabile} \Longrightarrow X \text{ separabile}.$$

Osservazione 8.1. *Osserviamo ancor prima di dimostrare il toerema, che il viceversa non è vero. Come controesempio si consideri $X=l^1$ che è separabile mentre $X^*=l^\infty$ non lo è.*[8]

Dimostrazione. Sia $\{F_n\}\subset X^*$ famiglia densa di X^*. Ci assicura la sua esistenza il fatto che X^* è separabile per ipotesi. Abbiamo $\|F_n\|:=\sup_{\|x\|=1}|F_n(x)|$ e per ogni n riusciamo a trovare un x_n tale che $\|x_n\|=1$ ed $F_n(x_n)\geq\frac{1}{2}\|F_n\|$. Osserviamo che questo si può sempre avere grazie alla definizione di norma. Prendiamo $x_n:=t_ne^{i\vartheta}$ e poniamo $L=<\{x_n\}>$ ossia lo spazio da essi generato composto da combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{R}$. L non è numerabile ma possiamo considerare

$$L_0=\left\{\beta_i\in\mathbb{Q}:\sum_{i=1}^{k}\beta_i x_i\right\}$$

che invece lo è, essendo unione numerabile di insiemi numerabili. Si ha che L_0 è denso in X perchè ogni elemento di L è approssimabile da uno di L_0.
Adesso sia $F\in X^*$ e supponiamo[9] che $F(x)=0\;\forall\, x\in L\Rightarrow F\equiv 0\Rightarrow\overline{L}=X$ e quindi è denso in X. Infine fissato $\varepsilon>0$ esiste F_n tale che, visto che è denso, $\|F-F_n\|<\varepsilon$ quindi

$$\frac{1}{2}\|F_n\|\leq|F_n(x_n)|\leq\underbrace{|(F_n-F)(x_n)|}_{\leq\|F_n-F\|\|x\|\to 0}+\underbrace{|F(x_n)|}_{=0\,\forall\, x\in L}\Longrightarrow\|F_n\|\leq 2\varepsilon\|F\|\equiv 0\Longrightarrow F=0.$$

□

Esempio 8.3. *Sia $g\in L^q$ e definiamo l'applicazione in $(L^p)^*$ tale che*

$$\begin{array}{ccc} L^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int fg\,dx \end{array}.$$

Si ha che, per Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}} fg\,dx\leq\left(\int_{\mathbb{R}} f^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}} g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\qquad f\in L^p, g\in L^q$$

e di conseguenza $L^q\subseteq(L^p)^*$, nel senso che $\forall\, g\in L^q$ corrisponde un elemento di $(L^p)^*$ nel modo che abbiamo visto.

---

[8]Dimostriamo che $(l^1)^*=l^\infty$: si procede prendendo, per ogni $a\in l^\infty$ fissato e con $b\in l^1$, l'operatore $T_a(b)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n$. E' facile vedere che $T_a\in\mathscr{L}(l^1,\mathbb{K})$. Resta da vedere che la corrispondenza $a\longleftrightarrow T_a$ è biunivoca. L'iniettività è evidente: se $T_{a_1}=T_{a_2}$ allora $a_1=a_2$; per la suriettività si definisce $\forall\, T\in\mathscr{L}(l^1,\mathbb{K})$ $a_n:=T(e_n)$, si mostra che T e T_a coincidono su ogni $b\in l^1$.

[9]Useremo un risultato: sia X uno spazio di Banach; allora $G\subset X$ è un sottoinsieme denso se e solo se $\forall\, F\in X^*$ vale $F(G)\equiv 0$.

Esempio 8.4. *Supponiamo di prendere $g \in L^\infty$. Al solito, prendiamo l'applicazione tale che*

$$\begin{array}{ccc} L^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int fg\,dx \end{array}$$

e con calcoli simili a quelli dell'esempio precedente si arriva al fatto che

11 (17) $$\boxed{L^\infty \subset (L^1)^*}$$

Osserviamo che

$$\int |fg|dx \leq \sup|g| \int |f|dx \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}.$$

Inoltre si ha proprio $(L^1)^* = L^\infty$.

Esempio 8.5. *Mostriamo che*

(18) $$\boxed{l^1 \subset (\mathscr{C}^\infty)^*}$$

Si ha che se $\bar{y} \in l^1$, allora consideriamo un'applicazione T tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^\infty x_n \bar{y}_n \end{array}.$$

Abbiamo che

$$|T(x)| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n \bar{y}_n| \leq \|x\|_{\mathscr{C}^\infty} \|\bar{y}\|_{l^1} \in \mathbb{R}.$$

Adesso, invece, mostriamo che

(19) $$\boxed{(\mathscr{C}^\infty)^* \not\subset l^1}$$

Sia $T \in (\mathscr{C}^\infty)^*$ applicazione tale che $T(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n \bar{y}_n$. Vogliamo provare che esiste almeno un T che non proviene da nessun l^1. Sia

$$C := \left\{ x \in l^\infty : \exists \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ed osserviamo che $C \subset l^\infty$ perchè $(x_n) \in X \subseteq \mathscr{C}^\infty \iff |x_n| < +\infty \ \forall\, n$. Prendiamo

$$C^0 := \{x \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}.$$

Per costruzione si ha che $C^0 \subset C$, inoltre si ha

$$\begin{array}{ccc} l : C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lim x_n \end{array} \implies |l(x)| \leq \sup_n |x_n| := \|x_n\|_{l^\infty} < +\infty.$$

Presa l, per il teorema di Hahn - Banach esiste φ che prolunga l su tutto l^∞ e tale che $\varphi\big|_C = l$ con $\|\varphi\| = \|l\| = 1$. Adesso mostriamo che tale φ non può appartenere ad l^1. Se, per assurdo, così fosse, allora esisterebbe $g \in l^1$ tale che

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^\infty f(i)g(i) = \sum_{i=1}^\infty f_i g_i \ \forall\, f \in l^\infty,$$

ma se prendiamo $f \in C$ allora $\varphi(f) = \sum_{i=1}^\infty f_i g_i$, mentre se venisse da l^1, per il fatto che ristretta a C deve coincidere con l'applicazione l, si doveva avere $\varphi(f) = \lim_{i\to\infty} f_i$.
Adesso prendiamo $f := l_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 in i-esima posizione. allora abbiamo

$$\begin{cases} \varphi(l_i) = \lim_{i\to\infty} l_i = \underline{0} \\ \varphi(l_i) = \sum_{i=1}^\infty = g_i \end{cases} \implies g_i \equiv 0 \ \forall\, i \implies g = 0$$

e questo è assurdo.

Teorema 8.2 (Teorema dell'applicazione aperta). *Siano X, Y spazi di Banach con $T : X \longrightarrow Y$ applicazione lineare, continua e suriettiva. Allora T è un'applicazione aperta, ossia manda aperti in aperti.*

Dimostrazione. Nella dimostrazione basterà far vedere che esiste S tale che $B(0,S) \subset T(B(0,1))$ oppure che $B(0,rS) \subset T(B(0,r))$. Si ricordi che B è una palla aperta. Osserviamo che, per definizione in spazi metrici, un aperto V è tale se per ogni suo punto x_0 esiste una palla che contiene x_0 ed è interamente contenuta in V. Adesso siano

$$S_k := \left\{x : \|x\| < 2^{-k}\right\} \qquad X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kS_0$$

ma T è suriettiva per ipotesi e di conseguenza si avrà

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} (T(kS_1)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(S_1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(S_1)}.$$

Ma dobbiamo ricordarci che Y è uno spazio di Banach, quindi metrico completo e di conseguenza avremo anche

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\mathring{T}(S_1)$$

e per il teorema di Baire almeno uno dei $\overline{kT(S_1)}$ deve necessariamente avere parte interna non vuota (altrimenti l'unione ci darebbe l'insieme vuoto). Supponiamo che uno di questi sia $\overline{T(S_1)}$; allora presi $\bar{y} \in Y, \eta > 0$ si ha che[10]

$$B(\bar{y},\eta) \subset \overline{T(S_1)} \Longrightarrow B(0,\eta) \subset \overline{T(S_1)} - \bar{y} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{T(S_1)} - \bar{y} \subset \overline{T(S_1)} - \overline{T(S_1)} := \{x_1 - x_2 : x_i \in \overline{T(S_1)}\} \subset 2\overline{T(S_1)} = \overline{T(S_0)}$$

e quindi al momento ci ritroviamo con le seguenti inclusioni:

$$B(0,\eta) \subset \overline{T(S_1)} - \bar{y} \subset \overline{T(S_0)}$$

e quindi dobbiamo ancora mostrare che

$$B\left(0,\frac{\eta}{2}\right) \subset T(S_0) = T(B(0,1))$$

che è la palla a cui pensavamo all'inizio. Si ha $y \in B(0,\frac{\eta}{2}) \iff \|y\| < \frac{\eta}{2} \Rightarrow y \in \overline{T(S_1)}$. Questo si ha perchè

$$B(0,\eta) \subset \frac{\overline{T(S_0)}}{2} \iff B\left(0,\frac{\eta}{2}\right) \subset \overline{T(S_1)}$$

ma $y \in \overline{T(S_1)} \iff \exists x_1 \in S_1 = \{x : \|x\| < \frac{1}{2}\}$ e tale che $\|y - T(x_1)\| < \frac{\eta}{4}$. E, ancora, questo succede se e solo se

$$y - T(x_1) \in B\left(0,\frac{\eta}{4}\right) \subset \overline{T(S_2)} = \frac{\overline{T(S_1)}}{4}.$$

Iterando la procedura, troviamo che $\forall\, n$ si ha che

$$x_n \in S_n = \{\|x\| < 2^{-n}\} \text{ ed è tale che } \|y - T(x_1) - \cdots - T(x_{n-1}) - T(x_n)\| < \frac{\eta}{2^{n+1}}.$$

Inoltre, visto che

$$B\left(0,\frac{\eta}{2^n}\right) \subset \overline{T(S_n)} \qquad \text{ed} \qquad \|x\| < 2^{-n}$$

e di conseguenza la serie degli $\{x_n\}$ è convergente in norma e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \bar{x} \Longrightarrow \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \equiv 1 \Longrightarrow \bar{x} \in B(0,1).$$

Dobbiamo ancora vedere cosa succede una volta che entra in gioco T:

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \xrightarrow{n\to\infty} T(\bar{x}) \text{ e } \left\|y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_n\right)\right\| < \frac{\eta}{2^{n+1}} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow T(\bar{x}) = y.$$

Morale della favola: abbiamo dimostrato che $\forall\, y \in B(0,S) = B(0,\frac{\eta}{2})\ \exists\, \bar{x} \in B(0,1)$ tale che $T(\bar{x}) = y$ allora $B(0,S) \subset T(B(0,1))$. □

Corollario 4. *Sia $T : X \longrightarrow Y$ lineare, continua e invertibile. Allora T^{-1} è continua.*

[10]Notiamo che la notazione $\overline{T(S_1)} - \overline{T(S_1)} := \{x_1 - x_2 : x_i \in \overline{T(S_1)}\}$ ha un significato puntuale.

Dimostrazione. Per le ipotesi che abbiamo, sappiamo che $B(0,S) \subset T(B(0,1))$ se e solo se y è tale che $\|y\| < S \iff \|T^{-1}(y)\| < 1$. Ma allora

$$\|T^{-1}\| = \sup_{\|y\|=S} \frac{\|T^{-1}(y)\|}{\|y\|} < \frac{1}{S}$$

e di conseguenza l'operatore è limitato e quindi è continuo. □

Corollario 5. *Sia X uno spazio vettoriale e siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su di esso. Supponiamo che X abbia struttura di spazio di Banach con entrambe le norme e supponiamo, inoltre, che esista una costante C tale che $\|x\|_2 \leq C\|x\|_1$. Allora esiste $\tilde{C}$ tale che $\|x\|_2 \leq \tilde{C}\|x\|_1$.*

Dimostrazione. Sia l'applicazione $T = Id : X_{\|\cdot\|_1} \longrightarrow X_{\|\cdot\|_2}$. Essa è continua, lineare e invertibile; di conseguenza è continua $T^{-1} : X_{\|\cdot\|_2} \longrightarrow X_{\|\cdot\|_1}$ e quindi esiste $\tilde{C}$ tale che $\|x\|_1 \leq \tilde{C}\|x\|_2$. □

Esempio 8.6 (Controesempio). *Sia $X = \mathscr{C}([a,b])$. Di conseguenza qui abbiamo che*

$$\|\cdot\|_{L^1} \leq (b-a)\|\cdot\|_{L^\infty}$$

ma il viceversa non è vero perchè X, dotato per esempio della norma L^2, non è uno spazio di Banach.

Definizione 8.2 (Grafico). *Sia $T : X \longrightarrow Y$ lineare con $X, Y, X \times Y$ spazi normati. Il grafico di T é*

$$\Gamma := \{(x,y) \in X \times Y : y = T(x)\}. \tag{20}$$

Inoltre, l'operatore T si dice chiuso se Γ è chiuso in $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ dove

$$\|\cdot\|_{X\times Y} := \max(\|x\|_X, \|y\|_Y).$$

9. Venerdì 19.10.2012 - Teorema del grafico chiuso

La seguente definizione specificherà meglio cos'è un operatore chiuso.

Definizione 9.1 (Operatore chiuso). *Sia $T : X \longrightarrow Y$ un operatore lineare. T è chiuso se $x_n \xrightarrow{X} \bar{x}$ e $T(x_n) \xrightarrow{Y} \bar{y}$ allora $T(\bar{x}) = \bar{y}$ ossia quando una successione sul grafico Γ converge ad un elemento del grafico stesso.*

Teorema 9.1 (Teorema del grafico chiuso). *Siano X, Y spazi di Banach e T un operatore chiuso . Allora T è continuo.*

Dimostrazione. Lo spazio X è normato per ipotesi e lo dotiamo della norma $|||x||| = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$. Dimostriamo ora che X è completo con tale norma. Sia $\{x_n\}$. Si ha

$$|||x_n - x_m||| = \|x_n - x_m\|_X + \|T(x_n) - T(x_m)\|_Y$$

ma X e Y per ipotesi sono spazi di Banach e quindi se $x_n \longrightarrow \bar{x}$, anche $T(x_n) \longrightarrow \bar{y}$. Poichè per ipotesi l'operatore è chiuso si ha che $\bar{y} = T(\bar{x})$ e di conseguenza

$$|||x_n - \bar{x}||| = \|x_n - \bar{x}\|_X + \|T(x_n) - T(\bar{x})\|_Y \longrightarrow 0$$

e quindi lo spazio è ancora completo. Adesso osserviamo che $\|x\|_X \leq |||x|||$, ma per il corollario (5) della sezione precedente esiste una costante C tale che

$$|||x||| \leq C\|x\|_X \iff \|x\|_X + \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X \iff \|T(x)\|_Y \leq C$$

quindi è limitato e di conseguenza è continuo. □

Proposizione 9.1. *Siano X, Y spazi di Banach e T lineare tra essi. Si ha che $\forall\ \varphi \in Y^*$ continua, $\varphi \circ T$ è continua. Allora T è continua.*

Dimostrazione. Mostriamo che è chiusa così la continuità sarà garantita per il teorema del grafico chiuso. Prendiamo $x_n \longrightarrow \bar{x}$ e $T(x_n) \longrightarrow \bar{y}$. Si ha che $\varphi\, T(x_n) \longrightarrow \varphi\, T(\bar{x})$; ma $\forall\ \varphi \in Y^*$ si ha che $\varphi\, T(x_n) \longrightarrow \varphi(\bar{y})$. Ma allora $\varphi(\bar{y}) = (\varphi\, T)(\bar{x})\ \forall\ \varphi$.
Questo è equivalente a dire che $\varphi(\bar{y} - T(\bar{x})) = 0\ \forall\ \varphi$ e per un corollario del teorema di Hahn - Banach $\bar{y} - T(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \bar{y} = T(\bar{x})$. □

Proposizione 9.2. *Sia H uno spazio di Hilbert e $T : H \longrightarrow H$ tale che $(x, T(y)) = (T(x), y)\ \forall\ x, y \in H$. Allora T è continua.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varphi \in H^*$. Esiste, per Riesz, $a \in H$ tale che $\varphi(z) = (z, a)\ \forall z \in H$. Quindi $\varphi(T(x)) = (T(x), a) = (x, T(a))$ per ipotesi. Osserviamo che l'applicazione tale che $x \longmapsto (x, T(a))$ è continua e per la proposizione precedente è continua anche T. □

Definizione 9.2 (Ortogonale in Banach). *Sia X uno spazio di Banach e sia M un suo sottospazio. E' definito il sottospazio ortogonale ad M come*

$$M^{\perp} := \{F \in X^* : F(x) = 0\ \forall x \in M\}. \tag{21}$$

$M^{\perp}$ è un sottospazio chiuso.

Si osservi che tale definizione è ben posta anche se siamo in assenza di un prodotto scalare. Questa è una generalizzazione del concetto di ortogonalità negli spazi di Hilbert.

Proposizione 9.3. *Sia $N \subset X^*$. Si ha*

$$N^{\perp^*} := \{x \in X : F(x) = 0\ \forall F \in N\}.$$

Allora

$$(M^{\perp})^{\perp^*} = \overline{M} \tag{22}$$

Dimostrazione. Sappiamo già che $M^{\perp}$ è un sottospazio chiuso. Per assurdo, supponiamo che $\overline{M} \subsetneq (M^{\perp})^{\perp^*}$ ossia stiamo supponendo che esista un x_0 tale da non appartenere al primo, ma appartenere al secondo. Questo implica l'esistenza di un funzionale F che li separa ossia un $F \in X^*$ tale che $F(x) < \alpha < F(x_0)\ \forall x \in \overline{M}$. Il problema è che $\overline{M}$ è un sottospazio e quindi non si può avere $F(x) < \alpha$ per tutti gli x che gli appartengono. L'unica alternativa è che $F \equiv 0\ \forall x \in M \Rightarrow F \in M^{\perp}$ e per ipotesi $x_0 \in (M^{\perp})^{\perp^*}$ ossia $F(x_0) = 0$ e questo è assurdo. □

Teorema 9.2. *Lo spazio X è separabile se e solo se $B_{X^*} = \{F : \|F\| \leq 1\}$ è metrizzabile in $\sigma(X^*, X)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo il ($\Longrightarrow$).[11] Vogliamo definire una distanza su X; poichè è separabile per ipotesi, esiste una successione $\{x_n\}$ densa in B_X. Poniamo $\forall\, F, G \in B_{X^*}$ la seguente distanza.

$$d(F, G) = \sum_{n=1}^{\infty} |(F - G)(x_n)| 2^{-n}$$

e osserviamo che il termine nel modulo è minore di 2 perchè i funzionali stanno in B_{X^*}. Fatto questo, prendiamo

$$U = B(F_0, \rho) = V(F_0, y_1, \dots, y_k, \varepsilon) = \{F \in B_{X^*} : |F(y_j) - F_0(y_j)| < \varepsilon\}.$$

L'obiettivo è mostrare che per ogni intorno di un tipo ne deve per forza esistere uno di un altro tipo e infine mostrare che coincidono. Quindi dobbiamo mostrare che $\forall V\ \exists U \subset V$; possiamo supporre che gli $y_j \in B_X$ ossia che abbiamo $\|y_j\| \leq 1$.
Adesso, per ogni i prendiamo $\|y_i - x_{n_i}\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ e consideriamo un $F \in U$ così da avere che

$$|(F - F_0)(y_i)| \leq \underbrace{|(F - F_0)(y_i - y_{n_i})|}_{\leq 2\frac{\varepsilon}{4}} + |(F - F_0)(x_{n_i})| = A.$$

Adesso, noi sappiamo che $\sum 2^{-i} |(F - F_0)(x_{n_i})| < \rho$ e che quest'ultimo non lo abbiamo ancora scelto: noi vogliamo che la serie sia minore di ε così che ogni addendo possa esserlo. Allora ogni singolo elemento sarà tale che

$$|(F - F_0)(x_{n_i})| \leq \rho 2^i$$

che è controllabile anche se diverge, perchè a noi interessa solo per $i \leq k$. Quindi troviamo ρ:

$$\rho 2^k \leq \frac{\varepsilon}{2} \iff \rho \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Adesso, tornando alle nostre maggiorazioni, abbiamo che

$$A \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e questo significa che ora siamo in V. Abbiamo mostrato che $U \subset V$. Resta da controllare l'inclusione opposta.

---

[11] Ricordiamo che esiste un risultato duale: lo spazio X^* è separabile se e solo se B_X è metrizzabile nella topologia $\sigma(X, X^*)$.

Adesso, fissiamo $U = B(F_0, \rho)$ e per V possiamo scegliere noi i punti multipli di $\{x_m\}$ (dato che la successione è densa). con $F \in V$ abbiamo che

$$d(F, F_0) = \sum_{n=1}^{\infty} |(F - F_0)(x_n)| 2^{-n} < \varepsilon + \varepsilon < \rho \Longrightarrow \varepsilon = \frac{\rho}{2}$$

e quindi k è tale che $2^{-k+1} < \frac{\rho}{2}$. Ne consegue che $V \subset U$. Adesso, poichè abbiamo dimostrato le due inclusioni, si ha che $V = U$.
Ora dimostriamo il ($\Longleftarrow$). Prendiamo $U_n = B(0, \frac{1}{n})$ in X^* ovvero

$$B\left(0, \frac{1}{n}\right) := \left\{F : d(F, 0) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Abbiamo che $\forall\, n\, \exists\, V_n$ intorno di 0 in $\sigma(X^*, X)$ cioè $V_n \subset U_n$ (perchè la topologia è metrizzabile). Avremo

$$V_n = U_n(0, x, \varepsilon_n, X \in A_n) = \{F \in X^* : |F(x) - F(0)| < \varepsilon_n, X \in A_n\}$$

dove si noti che la scrittura $X \in A_n$ sta ad indicare che X deve possedere un numero finito di punti. Adesso prendiamo

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

e ci chiediamo se è denso in X.
Partiamo dall'osservare che poichè $V_n \subset U_n \Rightarrow \cap V_n \subset \cap U_n = \{\varnothing\}$. Allora se $F(x) = 0\ \forall\, x \in D \Rightarrow F \in \cap V_n \Rightarrow F \equiv 0 \Rightarrow D$ è denso in X. □

Corollario 6. *Sia X uno spazio di Banach separabile ed $\{F_n\}$ una successione limitata in X^*. Allora esiste F_{n_k} tale che*

$$F_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} F$$

ossia $F \in B_{X^*}(0, R)$ (sappiamo che ora X è metrizzabile).

Definizione 9.3 (**Spazio riflessivo**). *Uno spazio X è riflessivo se $J(X) = X^{**}$ ossia è suriettiva.*

10. Martedì 23.10.2012 - Spazi L^p e loro duali, Teorema di Borel

Parliamo di alcune questioni riguardanti gli spazi L^p.

Definizione 10.1 (**Funzioni assolutamente continue**). *Sia $f : [a, b]$. Allora $f \in \mathscr{AC}([a, b])$ se $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta$ tale che $\forall\ (x_i', x_i'')$ disgiunti, se si ha che*

$$\sum_i |x_i' - x_i''| \le \delta \Longrightarrow \sum_i |f(x_i') - f(x_i'')| < \varepsilon.$$

Definizione 10.2 (**Funzioni a variazione limitata**). *Si dice che $f \in \mathscr{BV}([a, b])$ se $\forall\ a = x < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ si ha*

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le M.$$

Osservazione 10.1. *Si ha che*

$$f \in \mathscr{AC}([a, b]) \Longrightarrow f \in \mathscr{BV}([a, b]) \tag{23}$$

e questo è vero perchè

$$f \in \mathscr{AC} \iff \exists\, g \in \mathscr{C}^1 : f(x) = \int_a^x g(t)\,dt + f(a)$$

Lemma 10.1. *Sia $g \in L^1([0, 1])$ e supponiamo esista M tale che $\forall\ f \in L^p$ si ha che*

$$\left| \int f g\, dx \right| \le M \|f\|_{L^p}.$$

Allora $g \in L^q$ e $\|g\|_{L^q} \le M$ per $1 \le p < +\infty$.

Dimostrazione. Iniziamo dal caso in cui si ha $p > 1$. Poniamo la successione

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & |g| < n \\ 0 & |g| \geq n \end{cases}$$

e definiamo

$$f_n(x) = |g_n(x)|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sgn} g(x)$$

e di conseguenza abbiamo che

$$\|f_n\|_{L^p} = \left(\int |f_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int |g_n|^q dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|g_n\|_{L^q}^{\frac{q}{p}}$$

ma bisogna osservare che $|g_n|^q = f_n g_n$ perchè $f_n g_n = |g_n|^{\frac{q}{p}+1}$. Adesso si ha $f_n g_n = f_n g$ e questo implica che

$$\|g_n\|_{L^q}^q = \int f_n g dx \leq M\|f_n\|_{L^p} = M\|g_n\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} \Longrightarrow \|g_n\|_{L^q} \leq M \Longrightarrow$$

$$\int |g_n|^q dx \leq M^q \text{ ma } |g_n|^q \longrightarrow |g|^q$$

per $n \to \infty$; quindi per Fatou

$$\int |g|^q \leq M^q \iff \|g\|_{L^q} \leq M.$$

E questo conclude la dimostrazione del primo caso.
Resta da vedere cosa succede se $p = 1$. L'obiettivo è mostrare che $g \in L^\infty$. Fissiamo ε e prendiamo $E := \{x : |g(x)| > M + \varepsilon\}$ e poniamo

$$f(x) = \chi_E(x) \operatorname{sgn} g(x)$$

e per come è stata posta $f(x)$ si ha che

$$\|f\|_{L^1} = m(E) \iff M\|f\|_{L^1} = Mm(E) \geq \left|\int f g dx\right| \geq (M+\varepsilon)m(E) \Longrightarrow m(E) \equiv 0$$

ossia $E = \{\emptyset\}$ e quindi $g \in L^\infty$. □

Teorema 10.1 (Riesz). *Sia $F \in (L^p)^*$ con $1 \leq p < +\infty$ e $[a,b] < +\infty$. allora $\exists! g \in L^q$ tale che*

$$F(f) = \int f g \quad \forall f \in L^p$$

e inoltre $\|F\|_{(L^p)^*} = \|g\|_{L^q}$.

Dimostrazione. Sia $[a,b] = [0,1]$ e $\chi_S := \chi_{[0,S]}$. Abbiamo $F(\chi_S) = \phi(S) \in \mathscr{AC}$ perchè presi (S_i', S_i'') tali che $\sum_{i=1}^n |S_i' - S_i''| < \delta$ allora si avrà sicuramemte $\sum_{i=1}^n |\phi(S_i') - \phi(S_i'')| = F(f)$ con f definita come

$$f = \sum_{i=1}^n (\chi_{S_i'} - \chi_{S_i''}) \operatorname{sgn}(\phi(S_i') - \phi(S_i'')).$$

Da come è definita f segue che $F(f) \leq \|F\|\|f\|_{L^p}$ ma

$$\|f\|_{L^p}^p = \sum_{i=1}^n |S_i' - S_i''| < \delta$$

e quindi $\|F\|\|f\|_{L^p} \leq \|F\|\delta^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ e quindi $\phi \in \mathscr{AC}$. Dato per assunto questo, ne consegue che esiste $g \in L^1([0,1])$ tale che

$$\phi(S) = \int_0^S g(t)dt = \int_0^1 g(t)\chi_S(t)dt.$$

Prendiamo ora una funzione a scalino $\psi = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{S_i}$. Allora

$$F(\psi) = \sum_{i=1}^n c_i F(\chi_i) = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^1 g\chi_{S_i} = \int_0^1 g\psi dx$$

.
Vediamo il caso in cui $f \in L^\infty$: allora riusciremo a trovare ψ_n funzioni a scalino tali che $\psi_n \longrightarrow f$ q.o.
$\psi_n| \leq \|f\|_{L^\infty}$. Allora

$$|f - \psi_m|^p \longrightarrow 0$$

quasi ovunque. Quindi si ha che $\|f-\psi_n\|^p \le 2\|f\|^p_{L^\infty}$. Quindi per il teorema di Lebesgue si vede che $\|f-\psi_n\|_{L^p} \longrightarrow 0$. Adesso, quindi, per F abbiamo

$$|F(f)-F(\psi_n)| = |F(f-\psi_n)| \le \|f\|f-\psi_n\|_{L^p} \longrightarrow 0$$

ma d'altra parte a cosa converge $F(\psi_n)$? Ancora utilizzando Lebesgue (con $\psi_n \longrightarrow gf$ puntualmente con le $\psi_n \le n$ e $g \in L^1$) si mostra che

$$F(\psi_n) = \int g\psi_n dx \longrightarrow \int gf dx$$

ossia $F(\psi_n) \longrightarrow F(f) \longrightarrow \int fg$. Si conclude dicendo che

$$F(f) = \int gf dx \quad \forall f \in L^\infty.$$

Infine, si ha che $|F(f)| \le \|F\|_{(L^p)^*}\|f\|_{L^p}$ ma, a priori, non abbiamo intervalli di misura finita e sappiamo farlo stimare solo in L^∞ ossia come

$$\left|\int fg dx\right| = |F(f)|.$$

Di conseguenza possiamo stimare con la norma di f in L^p e questo implica che $g \in L^q$ e quindi $\|g\|_{L^q} \le \|F\|_{(L^p)^*}$.
Passiamo al caso in cui $f \in L^p$. Le funzioni a scalino qui sono dense o, per essere più formali, $\forall \varepsilon > 0\, \exists \psi \in L^p$ tale che $\|f-\psi\|_{L^p} < \varepsilon$. Sappiamo che $F(f) = \int fg dx$ e possiamo stimare nel seguente modo:

$$\left|F(f) - \int fg dx\right| \le |F(f)-F(\psi)| + \left|\int g\psi dx - \int gf dx\right| \le \|F\|\|f-\psi\|_{L^p} + \|g\|_{L^q}\|f-\psi\|_{L^p} < \varepsilon.$$

□

Osserviamo che

$$((L^p)^*)^* = (L^q)^* = L^p$$

e quindi è uno spazio riflessivo, ossia sono uguali nel senso di isomorfi.

Teorema 10.2. *Siano X, Y_i, Z spazi topologici.Supponiamo di avere degli $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$ continui perchè ipotizziamo su X la topologia meno fine che li rende tali. Sia $\psi : Z \longrightarrow X$. Allora ψ è continua se e solo se $\forall\ i\ \ \varphi_i \circ \psi$ è continua.*

Dimostrazione. Dimostriamo il $(\Longleftarrow)$.Dire che φ è continua implica che gli aperti $U \subset X$ saranno del tipo

$$\bigcup\bigcap \varphi^{-1}(W_i)$$

dove i W_i sono gli aperti dei vari Y_i e quindi abbiamo

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup\bigcap \psi^{-1}\varphi^{-1}(W_i) = \bigcup\bigcap(\varphi_i \circ \psi)^{-1}(W_i)$$

e quindi qualunque aperto si prenda, la sua immagine è un aperto. □

Teorema 10.3 (Kakutani). *Sia X uno spazio di Banach. Allora X è riflessivo se e solo se $\overline{B(0,1)} := \{x : \|x\| \le 1\}$ è compatta nella topologia $\sigma(X, X^*)$.*

Dimostrazione. Sapevamo già che era compatta in X^* per la topologia $\sigma(X^*, X)$. Dimostriamo il $(\Longrightarrow)$. Prendiamo la palla chiusa B_X e $J : X \longrightarrow X^{**}$. Poichè X è riflessivo allora

$$J(B_X) = B_{X^{**}}$$

che sappiamo essere compatta in X^{**} per il teorema di Banach - Alaoglu nella topologia *-debole $\sigma(X^{**}, X^*)$. Dobbiamo mostrare che

$$J^{-1} : X^{**}_{\sigma(X^{**},X^*)} \longrightarrow X_{\sigma(X,X^*)} \tag{24}$$

è continua e quindi che manda compatti in compatti. Prendiamo $F : X \longrightarrow \mathbb{K}$ così da avere $FJ^{-1} : X^{**} \longrightarrow F(x) = x^{**}(F)$ che è continua. Per il teorema appena dimostrato, lo è anche J^{-1}. □

Proposizione 10.1. *Sia X uno spazio di Banach riflessivo e $\{x_n\}$ una successione limitata. Allora esiste*

$$x_{n_k} \overset{\sigma(X,X^*)}{\rightharpoonup} x.$$

Teorema 10.4 (Borel). *Sia $a_n \in \mathbb{R}$. Allora esiste $f \in \mathscr{C}^\infty$ tale che $f^{(k)}(0) = a_k$.*

Dimostrazione. L'idea è che

$$f(x) = \sum_n f_k(x) = \sum_n a_n \frac{x^n}{n!} \varphi(\lambda_n x)$$

dove $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ e sceglieremo λ in modo che la serie sia uniformemente convergente con tutte le sue derivate. Si ha

$$\frac{d^k}{dx^k} f_n(x) = \frac{a_n}{n!} \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} n(n-1)\dots(n-p+1) x^{n-p} \lambda_n^{k-p} \varphi^{k-p}(\lambda_n x) \le n! \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{d^k}{dx^k} \right| \le \frac{|a_n|}{n!} \sum n! n! \frac{2^{n-p}}{\lambda_n^{n-p}} \lambda_n^{k-p} \| \varphi^{k-p} \|_{L^\infty} \le |a_n| n! \frac{2^n}{\lambda_n} M_n \qquad M_n = \sum_{j=0}^{n} \| \varphi^j \|_{L^\infty}.$$

se adesso prendiamo $\lambda_n = \max\{1, |a_n| n! 4^n M_n\}$ si ha che

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} \right| \le 2^{-n} \quad \forall\, x.$$

Infine, dato che $n \ge k+1$, una volta fissato k, da $n = k+1$ in poi la serie convergerà uniformemente con le sue derivate e quindi è $\mathscr{C}^\infty$.
Adesso abbiamo

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{a_n}{n!} \left(x^n \varphi(\lambda_n x)\right)^{(k)} + \frac{a_k}{k!} (x^k \varphi(\lambda_n x))^{(k)} + \sum_{k+1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left(x^n \varphi(\lambda_n x)\right)^{(k)} |_{x=0}$$

dove il primo termine è nullo perchè $\varphi(0) = 1$ e derivando si annulla, il secondo è $\frac{k!}{k!} \varphi(0) a_k = a_k$ e l'ultimo termine diventa identicamente nullo a causa delle successive derivazioni. □

11. Mercoledì 24.10.2012 - Distribuzioni: esempi e prime proprietà

Definizione 11.1 (**Spazio delle funzioni test**). *Si definisce lo spazio delle funzioni test come*

D (25)
$$\mathscr{D} = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty : \operatorname{supp}\varphi \subset\subset \Omega\}.$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *è un aperto*[12].
Sia K *compatto contenuto in* Ω. *Lo spazio*

$$\mathscr{D}_K := \{\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subseteq K\}$$

è uno spazio di Frèchet con seminorma

$$n_p = \sum_{|\alpha| \le p} \| D^\alpha \varphi(x) \|_{L^\infty}$$

ed inoltre

$$\mathscr{D} = \bigcup_{K \subset \Omega} \mathscr{D}_K.$$

Osservazione 11.1. *Si ricordi bene questo: supponiamo di prendere una famiglia numerabile di compatti* $K_n = \{x : d(x, \Omega^\complement) \ge \frac{1}{n}\} \cap \{|x| \le n\}$. *Allora*

$$\bigcup_{K \subset \Omega} \mathscr{D}_K = \bigcup_{K_n \subset \Omega} \mathscr{D}_{K_n}.$$

Osservazione 11.2. *Possiamo anche considerare lo spazio* $\mathscr{E} = \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ *se dotato delle seminorme*

(26)
$$n_p(\varphi) := \sum_{|\alpha| \le p} \sup_{x \in K_p} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

E' possibile ora definire il concetto di convergenza in $\mathscr{D}(\Omega)$.

Definizione 11.2 (**Convergenza in** $\mathscr{D}$). *Sia* $\{\varphi_n\} \in \mathscr{D}$. *Allora* $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ *se:*

$$\forall\, K \text{ compatto} \subset \Omega \;\; \varphi_n \xrightarrow{\mathscr{C}^\infty(K)} 0$$

cioè

$$\forall\, p, n_p(\varphi) \longrightarrow 0$$

[12] Dire che il supporto di φ è compattamente contenuto ($\subset\subset$) nell'aperto Ω, sta a indicare che esiste K compatto in Ω tale che $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Definizione 11.3 (**Distribuzione**). *Si ha che $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, è detta distribuzione, se $u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continua rispetto alla convergenza in $\mathscr{D}$.*

Osservazione 11.3. *Osserviamo che se $\varphi_n \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} \varphi$ questo sta a significare che:*

(1) $\operatorname{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$;
(2) $\partial^\alpha \varphi_n \longrightarrow \partial^\alpha \varphi$ *uniformemente su K $\forall\, \alpha$.*

Diamo qui un teorema per il quale, la definizione di distribuzione risulterà equivalente ad una seconda, più operativa.

Teorema 11.1. *Sia $u : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(1) $\forall\, \varphi_n \overset{\mathscr{D}(\Omega)}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow \langle u, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$;
(2) $\forall\, K \subset\subset \Omega\ \exists C, \exists p : \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_k$ *(con $\operatorname{supp} \varphi \subseteq K$) si ha*

$$|\langle u, \varphi_n \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \| \partial^\alpha \varphi \|_{L^\infty}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (1. $\longrightarrow$ 2.).
Consideriamo una $\varphi_n \longrightarrow 0$. Questo significa che esiste K tale che $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq K\ \forall\, n$ e che $\partial^\alpha \varphi_n \longrightarrow 0\ \forall\, \alpha$. Osserviamo che le φ_n hanno tutte supporto compatto nello stesso compatto K e di conseguenza

$$|\langle u, \varphi_n \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \| \partial^\alpha \varphi \|_{L^\infty} \longrightarrow 0.$$

Supponiamo, per assurdo, che $\forall\, C\ \forall\, p\ \exists\, \varphi$ che non soddisfa la tesi. allora può esistere K tale che per $C = p = j$ esista φ_j tale che $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ e

$$|\langle u, \varphi_j \rangle| \geq j \sum_{|\alpha| \leq p} \| \partial^\alpha \varphi \|_{L^\infty}.$$

Allora prendiamo $\psi_j = \frac{\varphi_j}{\langle u, \varphi_j \rangle}$ con $|\langle u, \varphi_j \rangle| = 1$. Dalle ipotesi segue che $\psi_j \longrightarrow 0$ in $\mathscr{D}(K)$ e per costruzione ψ_j ha lo stesso supporto di φ_j ossia $\operatorname{supp} \psi_j \subset K \subset\subset \Omega$. Allora

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi_j(x)| < \frac{1}{j} \quad m \forall\, j \geq |\alpha|$$

ossia è vera definitivamente e quindi $\partial^\alpha \psi_j(x) \longrightarrow 0$; ma il fatto che $\psi_j \longrightarrow 0$ uniformemente con tutte le sue derivate, aggiunto al fatto che il supporto di ψ_j è contenuto in K implica che $\langle u, \psi_j \rangle \longrightarrow 0$ il che è assurdo. $\square$

Facciamo alcune osservazioni riguardanti questo teorema. Dalla 2. possiamo dedurre che, al crescere del compatto, possano crescere sia C che p; se esiste un p che vada bene $\forall\, K$ compatto, allora si dice che u è una distribuzione *di ordine finito*. Non è sempre così in generale, perchè fissato K, la distribuzione può essere maggiorata da un numero finito di sue derivate, ma questo numero a priori può crescere.

Esempio 11.1 (**Distribuzione di ordine 0**). *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, ossia tale che $\forall\, K \subseteq \Omega \Rightarrow f \in L^1(K)$, e sia*

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f \varphi \, dx \Longrightarrow |\langle u_f, \varphi \rangle| \leq \| \varphi \|_{L^\infty} \int_K |f| dx \ \forall\, \varphi \in \mathscr{D}_K.$$

Osseviamo che $C_K = \int_K |f| dx$ a priori dipende dal compatto ma per tutti i K va bene $p = 0$: questo significa che u_f è una distribuzione di ordine 0 ossia, seguendo la definizione, è sufficiente stimare tutto con la norma di φ per una costante, senza far entrare in gico le derivate. In generale con una maggiorazione del tipo appena visto, si dimostra che l'ordine di una data distribuzione è minore o uguale di un certo p; in questo caso (essendo $p = 0$) non è quindi necessario mostrare l'altra disuguaglianza.

Esempio 11.2. *Sia $f \in L^1(\Omega)$. Allora*

$$|\langle f, \varphi \rangle| = \left| \int f \varphi \, dx \right| \leq \| f \|_{L^1} \| \varphi \|_{L^\infty}$$

e quindi in questa situazione si ha $C = \| f \|_{L^1}$ e $p = 0$ vanno bene per ogni compatto K.

Esercizio 11.1. *Sia $f \in L^1$ ed $\int f \varphi \, dx = 0$ quasi ovunque $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Dimostrare che $f = 0$ q.o.*

Esempio 11.3 (**Delta di Dirac**)**.** *Sia $a \in \Omega$. Definiamo la delta di Dirac come:*

dirac1
$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a). \tag{27}$$

Inoltre $|\langle \delta_a, \varphi\rangle| = |\varphi(a)| \le \sup|\varphi|$ e di conseguenza è una distribuzione di ordine 0 e $C = 1$ per ogni compatto K.

Esempio 11.4. *Sia $a \in \Omega$ e $\langle u, \varphi\rangle = \partial^\alpha \varphi(a)$. E' una distribuzione? Si vede facilmente che*

$$|\langle u, \varphi\rangle| = |\partial^\alpha \varphi(a)| \le \sum \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_{L^\infty}$$

con α multiindice ed è una distribuzione di ordine $\le |\alpha|$. Per mostrare che sussite l'uguaglianza, bisogna trovare una funzione $\bar{\varphi} \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che

$$|\langle u, \bar{\varphi}\rangle| \ge \sum_{|\beta|<|\alpha|} \|\partial^\beta \bar{\varphi}(x)\|_{L^\infty} \qquad |\langle u, \bar{\varphi}\rangle| \le \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \|\partial^\beta \bar{\varphi}(x)\|_{L^\infty}.$$

Cominciamo a vedere cosa succede quando si vuole derivare una distribuzione. Sia $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ ($f \in L^1_{loc}(\Omega)$). Si ha

$$\langle \partial_{x_i} f, \varphi\rangle = \int_\Omega \partial_{x_i} \varphi \, dx = (\text{ Green }) = \underbrace{\int_{\partial\Omega} f \varphi \nu_i \, d\sigma}_{=0 \text{ supp.cpt.}} - \int_\Omega f \partial_{x_i} \varphi \, dx.$$

Si osservi che l'utilizzo di Gauss - Green è lecito perchè non abbiamo problemi riguardanti la regolarità del bordo dell'aperto Ω, dato che φ è a supporto compatto. In definitiva abbiamo scoperto che

derdis
$$\boxed{\langle \partial_{x_i} u, \varphi\rangle = -\langle u, \partial_{x_i} \varphi\rangle} \tag{28}$$

Osserviamo che, per la delta di Dirac si ha

$$\langle \delta_a^{(\alpha)}, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta_a, \partial^\alpha \varphi\rangle$$

che è, a meno del segno, una distribuzione come nell'esempio (11.4).

Esempio 11.5. *Sia la funzione di Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{cases}. \tag{29}$$

Si ha che $H(x) \in L^1_{loc}$ e che

$$\langle H, \varphi\rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$$

che è ben definita perchè il supporto di φ $\{x > 0\} \subseteq K$. Per quanto riguarda la derivata di H si ha:

$$\langle H', \varphi\rangle = -\langle H, \varphi'\rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = [\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

dove $\varphi(\infty) = 0$ perchè φ è a supporto compatto. Quindi abbiamo scoperto che

H'=d
$$\boxed{H' = \delta} \tag{30}$$

Osservazione 11.4. *Presi $\omega \subset \Omega$ due aperti, è facile vedere che $\mathscr{D}(\omega) \subset \mathscr{D}(\Omega)$. Si mostra che $\mathscr{D}'(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\omega)$.*

Osservazione 11.5. *Sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Possiamo estenderla a $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\tilde{\Omega})$ con $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Invece, si faccia attenzione al fatto che se $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ allora la si può eventualmente restringere a $\mathscr{C}^\infty(\Omega'')$ con $\Omega'' \subseteq \Omega$, ma non possiamo estenderla a $\mathscr{C}_0^\infty$.*
Morale della favola: se abbiamo $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ allora abbiamo a maggior ragione $\mathscr{D}'(\tilde{\Omega})$ con $\tilde{\Omega} \subset \Omega$. Quindi per il fatto di avere le $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ ossia a supporto compatto, le distribuzioni si possono restringere.

Proposizione 11.1 (**Traslazioni**)**.** *Sia $\Omega = \mathbb{R}^n$ ed $a \in \Omega$. Indichiamo una traslazione come $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$. Inoltre vale la seguente proprietà:*

trasl
$$\boxed{\langle \tau_a u, \varphi\rangle = \langle u, \tau_{-a} \varphi\rangle} \tag{31}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\langle \tau_a f, \varphi\rangle &= \int_\Omega \tau_a f \varphi\, dx = \int_\Omega f(x-a)\varphi(x) dx = \\ &= \int_\Omega f(x)\varphi(x+a) dx = \int_\Omega f\tau_{-a}\varphi\, dx = \langle f, \tau_{-a}\varphi\rangle\end{aligned}$$

□

12. Venerdì 26.10.2012 - Nuove proprietà, Parte finita e Parte principale

Definizione 12.1 (Omotetia di una distribuzione). *Sia $u_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ con $\lambda \neq 0$. Si definisce l'omotetia di una distribuzione (in realtà è facile da dimostrare) come:*

omot (32)
$$\boxed{\langle u_\lambda, \varphi\rangle = |\lambda|^n \left\langle u, \varphi_{\frac{1}{\lambda}}\right\rangle}$$

Esempio 12.1 (Distribuzione di ordine infinito). *Sarà una distribuzione per la quale non esiste un p che vada bene per ogni compatto K. Abbiamo che δ_a^m è una distribuzione di ordine m e, per esempio in una sola variabile, ci da $\langle \delta_a^m, \varphi\rangle = \partial^m \varphi(a)$. Consideriamo ora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \partial^n \delta_a \Longrightarrow \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n \delta_a, \varphi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \partial^n \varphi(a)$$

che diverge. Adesso proviamo a prendere una $\{a_n\} \longrightarrow a \in \partial\Omega$ e osserviamo che per un certo K fissato,

$$\left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n \delta_{a_n}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \partial^n \varphi(a_n)$$

è controllabile perchè in esso vi sarà solo un numero finito di elementi della successione, o meglio, $a_n \in K$ solo per un numero finito di indici: se per assurdo così non fosse, allora troveremmo una sottosuccessione a_{n_k} convergente a un punto di $\Omega \neq \partial\Omega$ e quindi verrebbe meno l'unicità del limite stesso.

$$\left| \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \partial^n \delta_{a_n}, \varphi \right\rangle \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left|(-1)^n \partial^n \varphi(a_n)\right|.$$

Esempio 12.2 (Distribuzione di ordine 0). *Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^3$ e di avere $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2_{x,y})$. Sia $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^3)$ tale che*

$$\langle u_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\varphi(x,y,0) dxdy.$$

allora, con $\varphi \in \mathscr{D}_K$ si ha che

$$|\langle u_f, \varphi\rangle| \leq \max_{x\in K} |\varphi| \int_K f(x,y) dxdy$$

Adesso, poichè $\varphi \in \mathscr{D}_K$, possiamo porre

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(\varphi(x) - \sum_{j=0}^m \partial^j \frac{\varphi(0)}{j!} x^j\right) \frac{1}{x^{m+1}} & x \neq 0 \\ \frac{\partial^{m+1}\varphi(0)}{(m+1)!} & x = 0 \end{cases}.$$

Adesso osserviamo che ψ è continua e che

$$|\psi(x)| = \left| \frac{\partial^{m+1}\varphi(\xi) x^{m+1}}{(m+1)!} \right| \leq C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^{m+1}(\mathbb{R})}$$

dove $C = (m+1)^{-1}$. Infine si ha che

$$\lim_{x\to 0} \left(\varphi(x) - \sum_{j=0}^m \partial^j \frac{\varphi(0)}{j!} x^j\right) \frac{1}{x^{m+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\partial^{m+1}\varphi(\xi)x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{x^{m+1}} \longrightarrow \frac{\partial^{m+1}\varphi(0)}{(m+1)!}$$

perchè ξ è in un intorno di 0.

Esempio 12.3 (Valore principale). *Definiamo il valore principale della funzione $\frac{1}{x}$ come scritto di seguito:*

PV (33)
$$\boxed{\left\langle V_p \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx}$$

dove supponiamo $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ *e* $\psi(x)$ *presa come nell'esempio precedente. Fissiamo* $[-M, M] = K$ *compatto di* $\mathbb{R}$ *e al solito prenderemo le* $\varphi \in \mathscr{D}_K$. *Si ha*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(x)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(0)}{x}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)dx\right)$$

con il primo integrale che in realtà è un funzionalew dispari su un dominio simmetrico e di conseguenza fa $\varphi(0)\log|x|\big|_{\varepsilon}^{M} = 0$ *mentre l'altro integrale è stimabile come*

$$\int_{|x|\leq M}\psi(x)dx \leq M\|\varphi\|_{\mathscr{C}^1}.$$

Questo significa che $V_p\frac{1}{x}$ *è una distribuzione di ordine* ≤ 1. *All'ultima stima si è arrivsati osservando che* $|\psi(x)| \leq C\|\varphi\|_{\mathscr{C}^{m+1}}$, *ma* $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0)$ *dove* $\varphi' = \psi$ *e quindi* $\|\psi\|_{L^\infty} \leq \|\psi\|_{\mathscr{C}^1}$.

Esempio 12.4 (**Parte finita).** *Definiamo la parte finita della funzione* $\frac{1}{x^2}$ *come scritto di seguito:*

Pf (34)
$$\boxed{\left\langle P_f\frac{1}{x^2},\varphi\right\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right)}$$

dove abbiamo

$$\psi(x) = \big(\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi''(0)\big)\frac{1}{x^2} \Longrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x).$$

Osserviamo che

$$\|\psi(x)\|_{L^\infty} \leq \sum_{j\leq 2}\|\partial^j\varphi\|_{L^\infty}.$$

Adesso fissiamo M *e prendiamo* $\operatorname{supp}\varphi \subset [-M, M]$. *Abbiamo ora che*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi(0)}{x^2}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\frac{\varphi'(0)}{x}dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq M}\psi(x)dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right) \leq$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}(\underbrace{-\frac{2\varphi(0)}{M} + \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}}_{=-\frac{\varphi(0)}{x}\big|_{|x|=\varepsilon}^{|x|=M}=0} + 2M\sum_{j=0}^{2}\|\partial^j\varphi\|_{L^\infty} - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon})$$

dove osserviamo che il termine sopra graffa è nullo, come abbiamo già riscontrato in precedenza, perchè si tratta di un funzionale dispari su dominio simmetrico. Abbiamo scoperto che $P_f\frac{1}{x^2}$ *è una distribuzione di ordine* 2.

Proposizione 12.1. *Sia* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{\varnothing\})$. *Supponiamo che esistona* m, C *tali che vale*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^m} \quad per\,|x| \leq 1.$$

Allora esiste $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\langle u,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{\varnothing\}).$$

Dimostrazione. Osserviamo, prima di tutto, che presa $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ allora potremmo prendere un compatto attorno allo 0 in cui la φ vale identicamente 1.
Scriviamo

$$\langle u, f\rangle = I_1 + I_2 = \int_{|x|\geq 1} f\varphi\,dx + \int_{|x|\leq 1} f(x)\left[\varphi(x) - \sum_{|\alpha|\leq m-1}\frac{\partial^\alpha\varphi(0)}{\alpha!}x^\alpha\right]dx$$

dove osserviamo che I_1 ha senso perchè per ipotesi $f \in L^1_{loc}$ e il supporto di φ è compatto. Per I_2 si ha che

$$I_2 \leq \sum_{|\alpha|\leq m}\|\partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty}|x|^m.$$

Da questo segue che u è una distribuzione di ordine m. Ma adesso vediamo cosa succede se invece di prendere $|x| \le 1$ prendiamo $|x| \le R$. Nel seguito $u := u_1$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\langle u_1 - u_2, \varphi\rangle &= \int_{1\le|x|\le R} f(x) \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha \, dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m-1} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \int_{1\le|x|\le R} f(x) x^\alpha \, dx = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m-1} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(0)\end{aligned}$$

dove

$$C_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \int_{1\le|x|\le R} f(x) x^\alpha \, dx.$$

Abbiamo trovato che il supporto di $u_1 - u_R$ è combinazione lineare di supporti di delta di Dirac centrati nell'origine. Quindi sia u_1 che u_R sono quelle che volevamo e $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{\varnothing\})$ si ha che $\langle u_1, \varphi\rangle = \langle u_R, \varphi\rangle$ o equivalentemente

$$\langle u_1 - u_R, \varphi\rangle = \left\langle \sum_{|\alpha|\le m-1} C_\alpha \partial^\alpha \varphi(0), \varphi \right\rangle \equiv 0.$$

□

Esempio 12.5. *Supponiamo di avere* $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{\varnothing\})$. *la domanda é: esiste* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ *tale che*

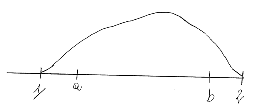
$$\langle u, \varphi\rangle = \int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi(x) dx \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \setminus \{\varnothing\})?$$

O, a parole, esiste una φ *a supporto in un intervallo chiuso e limitato lontano dallo* 0*? La risposta è no ed ora vedremo perchè.*
Se, per assurdo, esistesse, mostreremo che non si può trattare di una distribuzione. Prendiamo una φ_n *tale che* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *e che sia del tipo* $\varphi_n(x) = e^{-n} \varphi(nx)$ *dove*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1, x \ge 2 \\ 1 & a < x < b \end{cases}.$$

Per come l'abbiamo costruita, notiamo che $[a, b]$ *è l'intervallo che contiene tutti i supporti delle* φ_n. *Adesso si calcola che* $D^{(k)} \varphi_n = e^{-n} n^k \varphi^{(k)}(nx)$ *e di conseguenza* $|D^{(k)} \varphi_n(x)| \le e^{-n} n^k \| \partial^k \varphi \|_{L^\infty}$*: questo sta a significare che* $\varphi_n \longrightarrow 0$ *in* $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ *per i seguenti due motivi:*

(1) $\operatorname{supp} \varphi_n \subset [1, 2]\ \forall\, n$;
(2) $D^{(k)} \varphi_n \longrightarrow 0$ *uniformemente.*



Ma allora se u esiste deve essere tale che $\langle u, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$. *Ora abbiamo, per la definizione di u, che*

$$\langle u, \varphi_n \rangle = \int e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} e^{\frac{1}{x^2}} \varphi_n(x)dx \geq ([a,b] \subset [1,2]) \geq \int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} e^{\frac{1}{x^2}} e^{-n} dx \geq$$

$$\geq e^{\frac{n^2}{b^2}} e^{-n} \frac{b-a}{n} \longrightarrow +\infty.$$

Adesso, dato che siamo in $[a,b]$ *si ha che* $\varphi(nx) \equiv 1 \Rightarrow \varphi_n(x) = e^{-n}$.

Adesso passiamo alla moltiplicazione di una distribuzione per una funzione infinitamente derivabile. Supponiamo di avere $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ e di avere l'applicazione seguente:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}' & \longrightarrow & \mathscr{D}' \\ u & \longmapsto & \psi u \end{array}$$

quindi il risultato è ancora una distribuzione, a patto di prendere ψ dove l'abbiamo appena presa. Vale inoltre la seguente identità:

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle \tag{35}$$

e questo perchè se $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega) \Rightarrow \psi\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$. Proviamo ora a quantificare un attimo. Supponiamo di prendere un compatto K, $\varphi \in \mathscr{D}_K$ e al solito $\langle u, \varphi \rangle = \int f \varphi \, dx$. Di conseguenza

$$\langle \psi u, \varphi \rangle = \langle u, \psi \varphi \rangle \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \psi \varphi(x)| \leq \tilde{C} \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

dove queste maggiorazioni sono state ottenute con: C dovuta al fatto che u è una distribuzione e $\tilde{C}$ che contiene tutte le derivate α - esime di ψ.
Questi passaggi indicano che ha senso definire la moltiplicazione di una distribuzione con una $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ e il risultato è ancora una distribuzione.

Definizione 12.2 (Convergenza in $\mathscr{D}'$). *Sia* $\{u_n\} \in \mathscr{D}'(\Omega)$. *Allora avere convergenza ad u significa:*

$$u_n \longrightarrow u \iff \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \ \langle u_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle \quad \textit{puntualmente.}$$

Esempio 12.6. *Sia* $\varphi(x) \geq 0$ *e se* $|x| \geq 1$ *sia* $\psi(x) \geq 0$ *tale che* $\int \psi \, dx \equiv 1$ *(quindi* $\psi \in L^1$*). Prendiamo* $\psi_k(x) = k^n \psi(kx)$. *Allora*

$$\int \psi_k(x) dx = \int k^n \psi(kx) dx$$

con $\psi_k(x) \longrightarrow 0$ *puntualmente fuori dalla palla di raggio* $\frac{1}{k}$ *ossia* $\psi_k \longrightarrow 0$ *q.o. ; si ha che* $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\inf_{|x| \leq \frac{1}{k}} \varphi(x) \leq \int \psi_k \varphi(x) dx \leq \left(\operatorname{supp} \varphi \subset \{|x| \leq \frac{1}{k}\} \right) \leq \sup_{|x| \leq \frac{1}{k}} \varphi(x) \underbrace{\int \psi_k dx}_{=1}$$

ma per $k \to +\infty$ *si ha* $\sup \varphi(x) \longrightarrow \varphi(0)$ *visto che è continua. Di conseguenza*

$$\int \psi_k \varphi \, dx \longrightarrow \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

Teorema 12.1. *Sia* $u_k \longrightarrow u$ *in* $\mathscr{D}'$. *Allora* $\partial^\alpha u_k \longrightarrow \partial^\alpha u$.

Dimostrazione. E' un semplice conto:

$$\langle \partial^\alpha u_k, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u_k, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle.$$

□

13. Martedì 30.10.2012 - Distribuzioni a supporto compatto e loro proprietà

Fino ad ora abbiamo visto, in sostanza, che $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ se per ogni compatto K compattamente contenuto nella regione Ω esistono due numeri, ossia C e p, per ogni funzione test con il proprio supporto contenuto in K, vale

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Ma cos'è di preciso il supporto di una funzione? Fino ad ora la risposta sarebbe stata: la chiusura dell'insieme dove la funzione non è nulla. Ma se, per esempio, $f \in L^1_{loc}$? La definizione perde senso perchè f non è definita puntualmente, ma per classi d'equivalenza.
Costruiamo un supporto.

Tornando alle distribuzioni, sappiamo che data u, possiamo restringerla (con $\omega \subset \Omega$ in modo da avere $u\big|_{\omega} = 0$. Fatto questo prendiamo la famiglia degli aperti ω tali che

$$\left\{\omega \text{ aperti} \,|\, u\big|_{\omega} = 0\right\}$$

e definiamo

$$\omega_0 = \bigcup \omega.$$

Sappiamo che l'unione, anche numerabile, di aperti è un aperto; prendiamo $\varphi \in \mathscr{D}(\omega_0)$ ossia tale da avere $\operatorname{supp}\varphi\, K \subset \omega_0$ con K compatto. Notiamo che essendo un compatto contenuto nell'unione di infiniti aperti allora esiserà un sottoricoprimento finito ossia

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} \omega_i \Longrightarrow \forall\, i\, \exists \psi_i : \operatorname{supp}\psi_i \subset \omega_i$$

dove gli ψ_i sono tali che $\sum_{i=1}^{k} \psi_i = 1$. Adesso si ha

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{i=1}^{k} \psi_i \varphi \right\rangle = \sum_{i=1}^{k} \langle u, \psi_i \varphi \rangle,$$

ma adesso osserviamo che abbiamo supporto in ω_i e quindi l'ultima quantità scritta è nulla.[13] Tutto questo da un senso al voler prendere il più grande aperto dove una funzione test è nulla, e porre

$$\operatorname{supp} u = F \doteq \Omega - \omega_0 = \Omega \cap (\complement \omega_0).$$

Osservazione 13.1. *Osserviamo che se $K = \operatorname{supp} u$ allora $\langle u, \varphi \rangle = 0$ se $\varphi \equiv 0$ non solo su K, ma in un intorno di K.*

3

Definizione 13.1 (**Distribuzioni a supporto compatto**). *E' definito lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto:*

$$\mathscr{E}' := \{u \in \mathscr{D}'(\Omega) |\ \operatorname{supp} u \subset \Omega \text{ è compatto}\} \tag{36}$$

[13] Si noti anche, che $\varphi - \sum \psi_i \varphi = 0$ in un intorno di K.

Teorema 13.1. *Supponiamo di avere u a supporto compatto ossia $u \in \mathscr{E}'$. Allora u è di ordine finito, ossia per ogni K intorno compatto di u ($\operatorname{supp} u \subset \mathring{K}$) $\exists C$ ed $\exists p$ tale che $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ vale $|\langle u, \varphi\rangle| \le C \sum_{|\alpha|\le p} \sup_K |\partial^\alpha \varphi(x)|$.*

Dimostrazione. Fissiamo[14] il supporto di u cioè $K \subset \Omega$ che per ipotesi è compatto. Al solito prendiamo una $\chi \in \mathscr{C}^\infty$ tale che $\chi = 1$ in un intorno del supporto di u e con $\operatorname{supp}\chi \subset K$. Adesso prendiamo $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ e notiamo che $\varphi - \chi\varphi = 0$v in un intorno di $\operatorname{supp} u$ e di conseguenza

$$\langle u, \varphi - \chi\varphi\rangle = 0 \iff \langle u, \varphi\rangle = \langle u, \chi\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Ma poichè u è una distribuzione, fissato K esiste C_1 ed esiste p tali che

$$|\langle u, \psi\rangle| \le C_1 \sum_{|\alpha|\le p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \psi(x)| \quad \forall\, \psi : \operatorname{supp}\psi \subset K$$

cioè per $\forall\, \psi \in \mathscr{D}_K$. Mettendo insieme tutto abbiamo che

$$|\langle u, \chi\varphi\rangle| \le C_1 \sum_{|\alpha|\le p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha (\chi\varphi(x))| \le C \sum_{\alpha\le p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

perchè χ è fissato. La costante è

$$C = C_1 \sum_\alpha \|\partial^\alpha \chi\|_{L^\infty}.$$

□

Esercizio 13.1. *Sapendo che*

$$\lim_{m\to\infty} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} - \log m \right) = C_0 \in \mathbb{R}$$

e questo limite in effetti è la costante di Eulero - Mascheroni, poniamo

$$\langle u, \varphi\rangle = \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{1}{j}\right) - m\varphi(0) - \varphi'(0)\log m \right].$$

E' continua? Ossia è una distribuzione? Usiamo Taylor e scriviamoci $\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + x^2\psi(x)$ con ψ continua e con $\sup|\psi(x)| \le \sum_{|\alpha|\le 2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty}$. Andando a sostituire troviamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \left(\varphi(0) + \frac{1}{j}\varphi'(0) + \frac{1}{j^2}\psi(x) \right) - m\varphi(0) - \varphi'(0)\log m = \\
&= m\varphi(0) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}\varphi'(0) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2}\psi\left(\frac{1}{j}\right) - m\varphi(0) - \varphi'(0)\log m = \\
&= \varphi'(0)\left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} - \log m \right) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2}\psi\left(\frac{1}{j}\right) \longrightarrow C_0\varphi'(0) + C_1
\end{aligned}$$

dove la costante C_1 è dovuta al fatto che

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{j^2}\psi\left(\frac{1}{j}\right) \le C \left\| \partial^\alpha \psi\left(\frac{1}{j}\right) \right\|_{L^\infty} = C_1.$$

Quindi

$$\langle u, \varphi\rangle \le |C_0\varphi'(0) + C_1| \le C \sum_{|\alpha|\le 2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2}$$

quindi è si tratta in effetti di una distribuzione ed abbiamo anche scoperto che è di ordine ≤ 2.
Una nuova domanda: quale il suo supporto? Affermiamo che $\operatorname{supp} u = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{j}\} = S$. Fissiamo $\frac{1}{k}$ e osserviamo che $\langle u, \varphi\rangle = 1$ su $\frac{1}{k}$ per cui deve stare nel supporto. Certamente, poichè il supporto è chiuso, data una successione devo trovarci il suo limite e quindi $0 \in \operatorname{supp} u$.
Si noti infine che se abbiamo $V = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap S = \emptyset$ allora $\langle u, \varphi\rangle = 0$ in V.

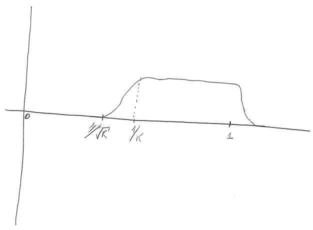
[14] Il disegno fa riferimento all'Osservazione (13.1).

Esercizio 13.2. *Supponiamo di avere*

$$\varphi_k := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \frac{1}{k} \leq x \leq 1 \\ 0 & x \leq \frac{1}{k+1}, x \geq 2 \end{cases}$$

dove u è la stessa dell'esercizio precedente. Abbiamo $\langle u, \varphi_k \rangle = k \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}$*; in particolare vorremmo che su S (e non in un suo intorno) si abbia*

$$|\langle u, \varphi_k \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in S} |\partial^\alpha \varphi_k(x)|.$$



4

Questo non è possibile, anche se tutte le derivate vanno a 0. La morale è che non è possibile fare una maggiorazione del tipo $\frac{C}{\sqrt{k}}$ perchè la stima non vale su un preciso supporto se non nel caso in cui se ne prenda un suo intorno. Adesso un risultato notevole, che non dimostreremo subito, ma che utilizzeremo per caratterizzare le distribuzioni a supporto in un punto. Il risultato è il seguente.

Teorema 13.2. *Sia* $u \in \mathscr{E}'$ *con* $K = \operatorname{supp} u$ *compatto e p l'ordine di u. Se* $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\forall\, x \in K$ *si ha* $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$ *con* $|\alpha| \leq p$ *allora* $\langle u, \varphi \rangle \equiv 0$.

Corollario 7. *Sia* $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ *con ordine p e* $\operatorname{supp} u = \{0\}$. *Allora*

deltastyle

$$u = \sum_{|\alpha| \leq p} C_\alpha \partial^\alpha \delta \tag{37}$$

Dimostrazione. Sia $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $\psi = 1$ in $U(0)$ intorno dello zero; sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. Affermiamo che

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\partial^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha + R(x)$$

dove $R(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$. Adesso notiamo che $\langle u, R(x) \rangle$ sarà qualcosa del tipo $\partial^\alpha R(x) = \partial^\alpha \varphi(0)$ sommato a una parte che va a zero quando deriviamo ψ e più precisamente per $|\beta| \leq p$. Quindi $\partial^\beta R(x) = \partial^\beta \varphi(0) - \partial^\beta \varphi(0) = 0$ e quindi, per il teorema di cui sopra, si avrà

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{\partial^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha \right\rangle = \sum_{|\alpha| \leq p} \underbrace{\frac{1}{\alpha!} \langle u, x^\alpha \psi(x) \rangle}_{C_\alpha} \partial^\alpha \varphi(x) \leq \left\langle \sum_{|\alpha| \leq p} C_\alpha \partial^\alpha \delta, \varphi \right\rangle.$$

Osserviamo infine che C_α non dipende dalla scelta di $\psi(x)$. $\square$

5

14. Mercoledì 31.10.2012 - Proprietà delle $u \in \mathscr{E}'$ e soluzione fondamentale dell'equazione di D'Alambert

Rienunciamo il teorema che avevamo lasciato in sospeso.

Teorema 14.1. *Sia $u \in \mathscr{E}'$ con $K = \operatorname{supp} u$ compatto e p l'ordine di u. Se $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, $\forall\, x \in K$ si ha $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$ con $|\alpha| \le p$ allora $\langle u, \varphi \rangle \equiv 0$.*

Dimostrazione. Prendiamo $K_\varepsilon = \{x \in \Omega \,|\, d(x,K) \le \varepsilon\}$ e definiamo

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in K_{2\varepsilon} \\ 0 & x \notin K_{3\varepsilon} \end{cases}.$$

Al solito, prendiamo $\chi \ge 0$ con supporto $\operatorname{supp} \chi \subset B(0,1)$ e tale che $\int \chi dx = 1$. La procedura consisterà nel regolarizzare g_ε tramite convoluzione con il seguente mollificatore:

$$\chi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Adesso prendiamo

$$\psi_\varepsilon(x) := g_\varepsilon * \chi_\varepsilon(x) = \int g_\varepsilon(x-y)\chi_\varepsilon(y)dy$$

e fissiamo $x \in K_\varepsilon$ e $y \in K_{2\varepsilon}$. Adesso, per come è costruita, su K_ε si ha $\psi_\varepsilon = 1$ e $\psi_\varepsilon = 0$ fuori di $K_{3\varepsilon}$. Si ha, ora,

$$\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x) = \partial^\alpha (g_\varepsilon * \chi_\varepsilon) = g_\varepsilon * \partial^\alpha \chi_\varepsilon = \int g_e(x-y)\,\partial^\alpha \chi_\varepsilon(y)dy =$$
$$= \int g_\varepsilon(x-y)\,\varepsilon^{-|\alpha|} e^{-n} \partial^\alpha \chi_\varepsilon\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

e di conseguenza possiamo fare le seguenti maggiorazioni:

$$|\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x)| \le \underbrace{\|g_\varepsilon\|_{L^\infty}}_{=1} \|\partial^\alpha \chi_\varepsilon\|_{L^1} = \varepsilon^{-\alpha} \|\chi\|_{L^1} \Longrightarrow |\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x)| = C\varepsilon^{-\alpha}.$$

Adesso, sia $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ tale che $\partial^\alpha \varphi(x) = 0$ per $|\alpha| \le p$. Affermiamo che, per $x \in K$ fissato, con $|\beta| \le p$ allora

$$\sup_{x \in K_{3\varepsilon}} |\partial^\beta \varphi(x)| \le C\varepsilon^{p+1-|\beta|}.$$

Lo dimostriamo nei due casi possibili.

(1) ($\beta = 0$). Allora scriviamo

$$\varphi(x) = \sum_{|\gamma|\le p} \frac{\partial^\gamma \varphi(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma + \sum_{|\gamma|=p+1} \frac{\partial^\gamma \varphi(\xi)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma$$

dove le derivate nella prima serie sono tutte nulle per ipotesi, mentre nella seconda, poichè $|x-x_0| < 3\varepsilon$, possiamo stimare tutto con

$$\frac{(3\varepsilon)^{p+1}}{(p+1)!}\|\varphi\|_{\mathscr{C}^{p+1}} = C\varepsilon^{p+1}\|\varphi\|_{\mathscr{C}^{p+1}}.$$

(2) ($\beta \ne 0$). Anche qui si ha

$$|\partial^\beta \varphi(x)| = \sum_{|\gamma|=p-|\beta|} \frac{\partial^\gamma\partial^\beta \varphi(x_0)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma + \sum_{|\gamma|\le p-|\beta|+1} \frac{\partial^\gamma\partial^\beta \varphi(\xi)}{\gamma!}(x-x_0)^\gamma \le$$
$$\le C(3\varepsilon)^{p+1-|\beta|}\|\varphi\|_{\mathscr{C}^{p+1}}.$$

Tornando alla dimostrazione dove l'avevamo lasciata, adesso, poichè φ e $\varphi\psi_\varepsilon$ coincidono in un intorno del supporto, possiamo scrivere $\langle u, \varphi - \varphi\psi_\varepsilon\rangle = 0 \Rightarrow \langle u,\varphi\rangle = \langle u, \varphi\psi_\varepsilon\rangle$ e quindi avremo

$$|\langle u, \varphi\psi_\varepsilon\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le p}\sup_{x\in K_{3\varepsilon}}|\partial^\alpha\varphi\psi_\varepsilon(x)| \le \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\sup_{x\in K_{3\varepsilon}}\left|\partial^\beta\varphi(x) - \partial^{\alpha-\beta}\psi_\varepsilon(x)\right| \le$$
$$\le C\varepsilon^{p+1-\beta}\varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} \le C\varepsilon \longrightarrow 0.$$

□

Osservazione 14.1 (**Sensatezza di $\mathscr{E}'$ ed estensione della dualità).** *Sia $u \in \mathscr{D}'$ e sia* $\operatorname{supp} u = K$ *compatto. Diamo un senso al dire che $u \in \mathscr{E}'$. E' importante osservare che, se $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$, allora a priori $\langle u,\varphi\rangle$ non ha il benchè minimo senso.*
Ma ora proviamo a fissare $\vartheta \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale da essere $\vartheta \equiv 1$ in un intorno del compatto K. Allora possiamo scrivere

$$\langle u,\varphi\rangle_{\mathscr{E}',\mathscr{C}_0^\infty} = \langle u, \vartheta\varphi\rangle$$

e questa è una buona definizione perchè, se prendiamo $\tilde\vartheta \ne \vartheta$, ma ancora tale che $\tilde\vartheta = 1$, in un intorno di K si avrà $\vartheta - \tilde\vartheta = 0$ e di conseguenza $\langle u, (\vartheta-\tilde\vartheta)\varphi\rangle = 0$.

Osservazione 14.2. *Supponiamo di prendere $\tilde K$ intorno compatto di K. Sappiamo che, per definizione, $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si ha*

$$|\langle u,\varphi\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le p}\sup_{x\in\tilde K}|\partial^\alpha\varphi(x)|,$$

ma se prendiamo, come nella precedente osservazione, $\vartheta \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $\vartheta = 1$ su $\tilde K$ allora $\forall\ \varphi \in \mathscr{E}$ si ha ancora che

$$|\langle u,\varphi\rangle| = |\langle u,\vartheta\varphi\rangle| \le C\sum_{|\alpha|\le p}\sup_{x\in\tilde K}|\partial^\alpha\varphi(x)|.$$

Questo cosa significa? Abbiamo esteso la definizione di $\mathscr{D}'$ a $\mathscr{E}'$ sostanzialmente: di conseguenza una $u : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ è continua se vale l'ultima disuguaglianza scritta. Ancora, abbiamo che le distribuzioni a supporto compatto si estendono, quindi, su tutto $\mathscr{E}$.
In generale, questo è vero se, presi due spazi di Fréchet X e Y, con rispettive seminorme n_p ed n_q, allora per l'applicazione $L : X \longrightarrow Y$ sono equivalenti le seguenti asserzioni:

(1) *L è continua in 0;*
(2) *L è continua;*
(3) *$\forall\ q\ \exists\ p$ tale che $n_q(T(x)) \le n_p(x)$.*

Esercizio 14.1. *Un rapido esercizio. Supponiamo di essere in $\mathbb{R}$. Come si comporta $u = x^p\partial^q\delta$? Si ha*

$$\langle x^p\partial^q\delta,\varphi\rangle = \langle\partial^q\delta, x^p\varphi\rangle = (-1)^q\langle\delta,\partial^q(x^p\varphi)\rangle = \begin{cases} 0 & q<p \\ (-1)^q\frac{q!}{p!(q-p)!}p!\langle\delta^{q-p},\varphi\rangle & q\ge p\end{cases}$$

dove nel caso $q<p$ è 0 perchè qualche x è rimasto.

Esercizio 14.2. *Sia $f(x) = \log|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e definiamo*

$$\langle u, \varphi\rangle = \langle \log|x|, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x|\,\varphi\,dx$$

ma si osservi che $u' = \frac{1}{x} \notin L^1_{loc}$. Si dovrebbe, per questo, lavorare con $PV\left(\frac{1}{x}\right)$. Allora

$$\langle (\log|x|)', \varphi\rangle = -\langle \log|x|, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \log|x|\varphi'\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)dx$$

che converge puntualmente a $\log|x|\varphi'(x)$ ed è maggiorata uniformemente rispetto ad ε da $|\log|x||\,|\varphi'(x)| \in L^1$. Inoltre, per il teorema di Lebesgue, tale stima diventa un'uguaglianza. Adesso si ha

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geq\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)dx &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \log|x|\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \log|x|\varphi'(x)dx = \\ &= [\log|x|\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\log|x|\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)dx = \\ &= \log\varepsilon\,\varphi(-\varepsilon) - \log\varepsilon\,\varphi(\varepsilon) - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx\end{aligned}$$

e quindi troviamo che

$$\begin{aligned}\langle (\log|x|)', \varphi\rangle &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx + \log\varepsilon(\varphi(e) - \varphi(-\varepsilon))\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx = V_p\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Finalmente siamo nelle condizioni per cominciare a vedere qualche importante applicazione della teoria delle distribuzioni. Sia l'operatore di D'Alembert

$$\Box := \partial_t^2 - \partial_x^2$$

e sia la funzione

$$E(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t \geq |x| \\ 0 & t < |x| \end{cases}.$$

Questa funzione presenta una singolarità nell'origine, ma l'operazione di derivazione avrà comunque senso perchè lavoreremo nel senso delle distribuzioni. Adesso facciamo alcuni calcoli:

$$\begin{aligned}\langle \Box E, \varphi\rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2} E\cdot(\partial_t^2 - \partial_x^2)\varphi\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}} dx\int_{|x|}^{+\infty} \partial_t^2\varphi\,dt - \int_0^{+\infty} dt\int_{-t}^{t} \partial_x^2\varphi\,dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx[\partial_t\varphi(t,x)]_{t=|x|}^{+\infty} - \int_0^{+\infty} dt[\partial_x\varphi(t,x)]_{x=-t}^{t} = \\ &= (\text{l'ultimo integrale è nullo perchè } \varphi \text{ è a supporto compatto }) = \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \partial_t\varphi(|x|,x)dx}_{I+II} - \underbrace{\int_0^{+\infty} \partial_x\varphi(t,t)dt}_{III} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \partial_x\varphi(t,-t)dt}_{IV}\end{aligned}$$

dove

$$I = -\int_{-\infty}^{0} \partial_t\varphi(-x,x)dx \qquad II = -\int_0^{+\infty} \partial_t\varphi(x,x)dx.$$

Adesso si ha

$$I = (-x\to x) = -\int_0^{+\infty} \partial_t\varphi(x,-x)dx = I'$$

$$II + III = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dy}\varphi(y,y)dy = (y \doteq (t,x)) = \varphi(0,0)$$

$$I + IV = -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dy}\varphi(y,-y)dy = \varphi(0,0)$$

e in definita abbiamo scoperto che

dalfond (38) $$\boxed{\langle \Box E, \varphi\rangle = \delta_0(\varphi)}$$

ossia che la funzione E è soluzione fondamentale per l'equazione di D'Alembert.

15. Martedì 6.11.2012 - Esercizi sulle distribuzioni e soluzione fondamentale dell'equazione del calore

Esercizio 15.1. *Siano X ed Y spazi di Fréchet con seminorme associate p_j e q_k. Sia $T : X \longrightarrow Y$. Allora sono equivalenti*

(1) $\forall\, k\, \exists\, j$, $\exists C$ *tali che* $q_k(T(x)) \le C p_j(x)$;
(2) T *è continua in* 0;
(3) T *è continua.*

Dimostriamo la (2. $\longrightarrow$ 1.). *Prendiamo un intorno dell'origine* $T^{-1}(y : q_k(y) \le 1)$, *il quale sarà certamente contenuto in* $\{x : p_j(x) \le \varepsilon\} = A$. *Allora* $p_j(x) \le \varepsilon \Rightarrow q_k(T(x)) \le 1$; *adesso, fissato* x, *prendiamo* $\tilde{x} = \frac{x\varepsilon}{p_j(x)}$. *Si ha che* $p_j(\tilde{x}) = \varepsilon$ *e di conseguenza* $\tilde{x} \in A$ *e questo, a sua volta, implica che* $q_k(T(\tilde{x})) \le 1$. *Ma*

$$q_k(T(\tilde{x})) = \frac{\varepsilon}{p_j(x)} \le 1 \qquad q_k(T(x)) \le \frac{p_j(x)}{\varepsilon}.$$

Dimostriamo la (1. $\longrightarrow$ 3.). *Dobbiamo mostrare che se* $x_n \longrightarrow \bar{x}$ *allora* $T(x_n) \longrightarrow T(\bar{x})$, *ma dire* $x_n \longrightarrow \bar{x}$ *è equivalente a dire* $p_j(x - \bar{x}) \longrightarrow 0$, *ma per ipotesi* $q_k(T(x) - T(\bar{x})) \longrightarrow 0$ *per ogni* k.

Esercizio 15.2. *Calcoliamoci*

$$\left(VP\frac{1}{x}\right)'.$$

Si ha

$$\left\langle \left(VP\frac{1}{x}\right)', \varphi \right\rangle = -\left\langle VP\frac{1}{x}, \varphi' \right\rangle = -\int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

e adesso, poichè siamo sufficientemente lontani dall'origine, possiamo integrare per parti così da avere

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Adesso, grazie a Taylor possiamo scrivere

$$\frac{1}{\varepsilon}(\varphi(\varepsilon) + \varphi(-\varepsilon)) = \frac{1}{\varepsilon}[\varphi(0) - \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\psi(-\varepsilon) + \varphi(0) + \varepsilon\varphi'(0) + \varepsilon^2\psi(\varepsilon)]$$

e quindi avere nel complesso

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\ge\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}$$

e quindi abbiamo scoperto che

vppf

$$\boxed{\left(VP\frac{1}{x}\right)' = \left(PF\frac{1}{x^2}\right)} \tag{39}$$

Esercizio 15.3. *Sia in* $\mathbb{R}^2$

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y, -y)\,dy \qquad T \in \mathscr{D}'.$$

Qual'è il suo supporto? Si ha che $|\langle T, \varphi\rangle| \le C \sup|\varphi|$ *dove* C *è la misura dell'intersezione della diagonale con il suo eventuale supporto. E' evidente che* $\operatorname{supp} T := \{(t, x) ; t = -x\} = S$ *e inoltre se* $(t, x) \notin S \Rightarrow (t, x) \notin \operatorname{supp} T$. *Adesso osserviamo che*

$$\langle \partial_x T - \partial_t T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_t - \varphi_x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi_t(y, -y)\,dy - \varphi_x(y, -y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dy}\varphi(y, -y)\,dy = 0$$

Passiamo ora ad una delle applicazioni della teoria delle distribuzioni. Cerchiamo la soluzione fondamentale per l'equazione del calore. Sia l'operatore del calore

$$P = \partial_t - \partial_x^2.$$

Affermiamo che la soluzione fondamentale è

calor1

$$\boxed{E = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{H(t)}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}} \tag{40}$$

dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside. Ci chiediamo se l'oggetto appena definito, (sicuramente è $\mathscr{C}^\infty$) è una distribuzione. Sicuramente è così dato che $E \in L^1_{loc}$ e quindi hanno senso i prossimi calcoli.

$$\begin{aligned}\langle pE, \varphi\rangle &= -\langle E, \varphi_t + \varphi_{xx}\rangle = -\int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} (\varphi_y + \varphi_{xx}) dx = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \varphi_{xx}\, dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty} dt \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \varphi_t = II_\varepsilon + I_\varepsilon\end{aligned}$$

Adesso vediamo cosa sono i singoli limiti:

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} dx \int_\varepsilon^\infty e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(t,x) \left[\frac{x^2}{4t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{3}}}\right] dt - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} \varphi(\varepsilon, x) dx$$

Calcoliamo rapidamente che

$$\begin{aligned}\partial_x \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} &= e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[-\frac{2x}{4t^{\frac{3}{2}}}\right] \\ \partial^2_{xx} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} &= e^{-\frac{x^2}{4t}} \left[\frac{2x^2}{8t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}\right].\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$I_\varepsilon + II_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon, x) dx = \left(y \doteq \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}}\right) = -\int 2e^{-y^2} \varphi(\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon} y) dy$$

Per Lebesgue, quando $\varepsilon \to 0$ si ha $\varphi(\varepsilon, 2\sqrt{\varepsilon}y) \to 0$ e quindi rimane solo il termine $-2\sqrt{\pi}\varphi(0,0)$ che semplificato con la costante prima dell'integrale ci da

$$\langle pE, \varphi\rangle = \delta_0(\varphi). \tag{41}$$

Si calcoli, per esercizio, che dato il laplaciano

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial^2_{x_i} u$$

allora la soluzione fondamentale è

$$E = \begin{cases} \log\rho & \mathbb{R}^2 \\ \rho^{2-n} & \mathbb{R}^n \quad n \geq 3 \end{cases}.$$

16. MERCOLEDÌ 7.11.2012 - OPERATORI IPOELLITTI E DISTRIBUZIONI

Definizione 16.1 (Operatore ipoellittico). *Sia*

opdif
$$P = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha \tag{42}$$

un operatore deifferenziale di ordine m nell'aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. P è ipoellittico se per ogni aperto $\omega \subset \Omega$ con $u \in \mathscr{D}'(\omega)$ e $Pu \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$ allora $u \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$.

Si noti, ad esempio, che l'operatore $\Box$ non è ipoellittico. La prossima osservazione è rilevante:

Osservazione 16.1. *Supponiamo di avere un operatore differenziale della forma (42) che soddisfi*

$$H) \qquad \forall \omega \text{ aperto}, u \in \mathscr{D}'(\omega), Pu = 0 \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^\infty(\omega). \tag{43}$$

Prendiamo due aperti $\Omega_2 \subset\subset \Omega_1$ con Ω_1 limitato ed $E := \{u \in L^2(\Omega) | Pu = 0\}$ Si ha che E è un chiuso in $L^2(\Omega)$ ossia presa una successione $u_k \longrightarrow u$ in $L^2(\Omega)$, con $Pu_k = 0$ si ha

$$u_k \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} u \Longrightarrow u_k \overset{\mathscr{D}'(\Omega)}{\longrightarrow} u \Longrightarrow \partial^\alpha u_k \longrightarrow \partial^\alpha u.$$

Lemma 16.1. *Supponiamo che u soddisfi (H). Allora esiste una costante C tale che $\forall\, u \in E$ si ha*

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega_2} |\partial_i u|^2 dx \leq C \int_{\Omega_1} |u|^2 dx. \tag{44}$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione tale che

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L^2(\Omega_1) \\ u & \longmapsto & \partial_{x_i} u. \end{array}$$

Si ha che se $u_k \longrightarrow \bar{u}$ in E e $\partial_{x_i} u_k \longrightarrow v_i$ allora si deve avere $v_i = \partial_{x_i} \bar{u}$ e quindi è un'applicazione chiusa. Per il teorema del grafico chiuso allora è continua e quindi è limitata ossia

$$\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega_2)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega_1)}$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare. □

Teorema 16.1. *Sia $\zeta \in \mathbb{C}$ e sia il polinomio*

$$P(\zeta) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha i^{|\alpha|} \zeta^\alpha.$$

Supponiamo di avere una zuccessione $\zeta^k = \xi^k + i\eta^k$ tale che $P(\zeta^k) = 0$ con $|\xi^k| \longrightarrow +\infty$ per $k \to \infty$. Infine valga (H). Allora $|\eta^k| \longrightarrow +\infty$.

Dimostrazione. Definiamo $u_k(x) = e^{i\langle x, \zeta^k\rangle}$ dove $(x,\zeta) = \sum_{j=1}^n x_j \zeta_j$. Si ha

$$P(\zeta^k) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (i\zeta^k)^\alpha = 0 \Longrightarrow P(u_k) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha e^{i\langle x, \zeta^k\rangle} (i\zeta)^\alpha = 0$$

quindi $u_k \in L^2(\Omega_1)$ e di conseguenza vale la disuguaglianza del precedente lemma, che useremo tra poco. Prima di farlo osserviamo che

$$|u_k| = \left|e^{i\langle x,\zeta\rangle}\right| = e^{-\langle x, \eta^k\rangle}$$

$$\partial_{k_j} u_k = i\zeta_j^k u_k \Longrightarrow |\partial_{x_j} u_k| = |\zeta^k| e^{-\langle x, \eta^k\rangle}$$

e inoltre, poichè Ω_1 è limitato, per $x \in \Omega_1$ abbiamo

$$-M|\eta^k| \leq |\langle x, \eta^k\rangle| \leq M|\eta^k|.$$

Sostituiamo i valori trovati nella disuguaglianza del lemma di cui sopra così da avere

$$\square \leq \int_{\Omega_2} |\zeta^k|^2 e^{-2\langle x,\eta^k\rangle} dx \leq C \int_{\Omega_1} e^{-2\langle x, \eta^k\rangle} dx = \triangle \Longrightarrow$$

$$m(\Omega_2)|\zeta^k|^2 e^{-2M|\eta^k|} \leq \square \leq \triangle \leq C m(\Omega_1) e^{2M|\eta^k|} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |\zeta^k|^2 \leq C \frac{m(\Omega_1)}{m(\Omega_2)} e^{4M|\eta^k|}$$

e quindi è palese come $|\eta^k| \longrightarrow +\infty$. □

Osservazione 16.2. *Osserviamo che si è utilizzato il fatto che*

$$u \in E \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_1) \Longrightarrow \partial_i u \in L^2(\Omega_2).$$

Notiamo, inoltre, come questo teorema leghi proprietà dell'operatore con proprietà algebriche del polinomio.

Esercizio 16.1. *Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^2$ e di voler capire se l'operatore di D'Alembert*

$$\square = \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 = D_{x_1}^2 - D_{x_2}^2 = -\left[\left(\frac{1}{i}\partial_{x_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{i}\partial_{x_2}\right)^2\right]$$

è ipoellittico oppure no. Si ha

$$-\square(\zeta) = \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = \xi_1^2 - \eta_1^2 - \xi_2^2 + \eta_2^2 - 2i(\xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2).$$

Ipotizziamo di avere $-\square(\zeta) = 0$ e che si mmandi $|\xi| \to +\infty$. Di conseguenza non si avrà che $|\zeta| \to +\infty$ e quindi l'operatore non è ipoellittico.

Esercizio 16.2. *Vogliamo fare ora la stessa cosa per il laplaciano $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$. Affinchè valga il teorema dobbiamo imporre che $\Delta(\zeta) = 0$ e in questo caso si avrà*

$$\Delta(\zeta) = \xi_1^2 - \eta_1^2 + \xi_2^2 - \eta_2^2 + 2i(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) = 0$$

con i primi quattro termini reali e nulli. Se $|\zeta| \to +\infty$ allora si deve necessariamente avere $|\eta| \to +\infty$ e di conseguenza l'operatore può essere ipoellittico. Non è certo perchè il teorema da una condizione necessaria e non sufficiente.

Esercizio 16.3. *Sia l'operatore di Schödinger*

$$\frac{1}{i}\partial_{x_1}+\partial^2_{x_2}=\frac{1}{i}\partial_{x_1}-\left(\frac{1}{i}\partial_{x_2}\right)^2.$$

Si ha $p(\zeta)=\zeta_1-\zeta_2^2=\xi_1-\xi_2^2+\eta_2^2-2i\xi_2\eta_2+i\eta_1$ *e si vede immediatamente che non si tratta di un operatore ipoellittico.*

E adesso una questione interessante. Supponiamo di avere $\varphi\in\mathscr{D}(I)$ e ci chiediamo se esiste $\phi\in\mathscr{D}$ tale che $\phi'=\varphi$ e osserviamo che

$$\phi'=\varphi \iff \int_a^b\varphi\,dx=0 \text{ ossia chiedere } \phi(x)=\int_a^x\varphi(x)dx.$$

Ma allora $\phi\notin\mathscr{D}$ tranne nel caso in cui u è una costante. Vediamo adesso di mostrarlo.
Supponiamo $I\subset\mathbb{R}$ e $u\in\mathscr{D}'(I)$ con $u'=0$. Fissiamo una $\vartheta\in\mathscr{D}(I)$ tale che $\int\vartheta\,dx=1$. Ci chiediamo se, posta $\varphi\in\mathscr{D}$, si può avere

$$\varphi(x)-\left(\int_I\varphi(t)dt\right)\vartheta(x)=\frac{d\psi}{dx}.$$

Per comodità, nel seguito, denoteremo la quantità a sinistra con $(\triangle)$. Ciò che si è chiesto è equivalente a chiedere $\int\triangle\,dx=0$. Ora abbiamo

$$\langle u,\varphi\rangle=\left(\int_i\varphi(x)dx\right)\langle u,\vartheta\rangle+\langle u,\psi'\rangle=\left(\int_i\varphi(x)dx\right)\langle u,\vartheta\rangle-\langle u',\varphi\rangle=0$$

dove l'uguaglianza a zero è posta per ipotesi. Chiamiamo $C:=\langle u,\vartheta\rangle$ e di conseguenza

$$\langle u,\varphi\rangle=C\int_I\varphi\,dx=\int_I C\varphi\,dx\Longrightarrow u\equiv C$$

è costante. Resta da mostrare che questo non dipende dalla scelta di ϑ. Supponiamo di prendere $\tilde\vartheta\neq\vartheta$, entrambe in $\mathscr{C}_0^\infty$. Quindi l'integrale della loro differenza è ancora in $\mathscr{C}_0^\infty$ e si ha

$$\langle u,\vartheta-\tilde\vartheta\rangle=\int u(\vartheta-\tilde\vartheta)dx=\int u\eta'\,dx \text{ con } \eta\in\mathscr{D}\Longrightarrow\eta'=0=\vartheta-\tilde\vartheta.$$

Osservazione 16.3. *Sia* $v\in\mathscr{D}'$ *e ci chiediamo se esiste una* $u\in\mathscr{D}'$ *tale che* $u'=v$. *Il discorso è simile a quello appena fatto. Scriviamo*

$$\varphi(x)-\left(\int_i\varphi(t)dt\right)\vartheta(x)=\frac{d\psi}{dx}$$

e cerchiamo una ψ *tale che*

$$\langle u,\varphi\rangle=-\langle v,\psi\rangle.$$

Per farlo prenderemo una φ' *tale che*

$$\varphi'-\left(\int_I\varphi'\,dx\right)=\varphi'.$$

Esercizio 16.4. *Formalizziamo tutto in un esercizio. Sia* $v\in\mathscr{D}'(I)$. *Allora esiste* $u\in\mathscr{D}'$ *tale che* $u'=v$.
Come la costruisco? Fissiamo $\vartheta\in\mathscr{D}$ *e prendiamo* φ *tale che*

$$\varphi-\left(\int\varphi\,dx\right)\vartheta=\frac{d\psi}{dx}$$

con $\psi\in\mathscr{D}$. *Possiamo avere il caso in cui* φ' *è a supporto compatto e questo si verifica se e solo se* $\int\varphi'\,dx=0$ *e di conseguenza, sostituendo nella precedente equazione, si ricava* $\varphi'=\psi'$ *e quindi abbiamo unicità in questo caso. Passiamo a cercare* v*: per definizione si deve avere* $\langle u,\varphi\rangle=-\langle u,\psi\rangle$ *perchè*

$$\langle u',\varphi\rangle=-\langle v,\varphi'\rangle=\langle v,\psi\rangle\Longrightarrow u'=v.$$

Ci sarebbe, ora, da mostrare che in effetti quella che abbiamo trovato è una distribuzione. Per quanto riguarda la linearità, essa è evidente. Per la continuità, supponiamo di avere una $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{D}}0$. *Bisogna mostrare che* $\langle u,\varphi_n\rangle\longrightarrow0$*: tutte le funzioni test della successione devono essere tali che* $\operatorname{supp}\varphi_n\subset K$ *compatto e* $\|\partial^\alpha\varphi_n\|_{L^\infty}\longrightarrow0$ *uniformemente* $\forall\,\alpha$.

Esercizio 16.5. *Sia l'operatore*

$$T = \sum_{n=1}^{N} n^{\alpha} \left(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}\right)$$

e vogliamo capire se si tratta diuna distribuzione e di che ordine.Sia $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. *E' una distribuzione di ordine 0 e si mostra scegliendo un compatto* K *in* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *tale che in esso delle* φ_n *abbiano supporto per un certo* $n \geq N$ *così da avere che* $\langle T, \varphi_n \rangle$ *è una somma finita, così da poter maggiorare tutto con* $N^{\alpha} \sup_K \varphi(\frac{1}{n})$.
Cosa si può dire se prendiamo $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}$? *Anticipatamente osserviamo che*

$$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \simeq \varphi(0) + \varphi'(\xi) \qquad \varphi\left(-\frac{1}{n}\right) \simeq \varphi(0) - \varphi'(\xi')$$

e questo ci consente di avere la seguente maggiorazione.

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \left[\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right] \leq n^{\alpha} \frac{2}{n} \sup_X |\varphi'(x)|$$

e quindi troviamo che la serie converge assolutamente per $\alpha < 0$ *e questo si ha se e solo se* $T \in \mathscr{D}'$.
Osserviamo, infine, che la distribuzione è di ordine 1 *perchè interviene, nella maggiorazione, la derivata prima di* φ. *S e volessimo rendere tutto a supporto compatto, scegliamo una* $\varphi(x) = x\psi(x)$ *con* ψ *di tipo mollificatore. Così avremmo*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum n^{\alpha} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \sum n^{\alpha - 1}$$

che converge per $\alpha < 0$.

17. Venerdì 9.11.2012 - Introduzione agli Spazi di Sobolev

Definizione 17.1 (**Spazio di Sobolev**). *Sia fissato* $m \in \mathbb{N}$ *Allora*

(45) $$H^m(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2, \partial^{\alpha} u \in L^2, |\alpha| \leq m\}$$

Si noti il fatto che non si chiede la continuità delle derivate ma solo che esse stiano in L^2. Inoltre H^m è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare e della conseguente norma che andiamo a definire:

sobolev0 (46) $$\boxed{(u, v)_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\alpha} u \overline{\partial^{\alpha} v} dx \qquad \|u\|^2_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^{\alpha} u\|^2_{L^2}}$$

e affermiamo che tale spazio, dotato di questa norma, è completo. Mostriamolo. prendiamo una successione $\{u_k\}$ di Cauchy in H^m e questo implica che è di Cauchy anche in L^2, che sappiamo completo. Di conseguenza essa sarà convergente $u_k \xrightarrow{L^2} u$. Ma questo non basta, bisogna mostrare la convergenza anche per le derivate. In effetti abbiamo che

$$\begin{cases} \partial^{\alpha} u_k \xrightarrow{L^2} v_{\alpha} \\ \partial^{\alpha} u_k \xrightarrow{\mathscr{D}} \partial^{\alpha} u \end{cases} \Longrightarrow v_{\alpha} = \partial^{\alpha} u$$

e quindi abbiamo la completezza. Si osservi che le derivate a cui si converge saranno sempre nel senso delle distribuzioni, come nel caso appena visto.
Sia ora $m \geq 0$. Si ha

sobolev1 (47) $$\boxed{H^{-m} := \left\{u \in \mathscr{D}' : |\langle u, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{H^m}\right\}}$$

Ma ha senso scrivere $\langle u, f \rangle$ per $f \in H^m$ ed $u \in H^{-m}$? Si, perchè basta prendere una $\varphi_n \in \mathscr{C}_0^{\infty}$. Per un teorema che dimostreremo, $\mathscr{C}_0^{\infty}$ è denso in H^m e quindi $\varphi_n \in H^m$. La si potrà scegliere tale che $\varphi_n \longrightarrow f$. Detto questo, la prossima osservazione è particolarmente importante.

Osservazione 17.1. *Si ha che* H^{-m} *si identifica con* $(H^m)^*$, *ma cosa significa? D'altro canto* H^m *è riflessivo e quindi coincide con il suo duale vero e proprio. Il fatto è che questa identificazione avviene proprio nel senso del teorema di identificazione di Riesz ossia* $\forall$ L *operatore lineare e continuo su* H^m, $\exists\, u \in H^{-m}$ *tale che*

$$L(v) = \langle u, v \rangle_{H^{-m}, H^m}.$$

Si ha che per ogni φ vale, poichè è continua,

$$|L(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{H^m}$$

ma questo non basta per dire che $\varphi \in H^{-m}$. Vorremmo arrivare a scrivere

$$C\|\varphi\|_{H^m} \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha \varphi|$$

ma questo, in effetti, possiamo farlo perchè per una distribuzione, una volta fissato il compatto, la norma $\|\cdot\|_{L^2}$ è stimabile proprio con l'estremo superiore della funzione moltiplicato con la misura del compatto stesso.

Teorema 17.1. *$u \in H^{-m} \iff \exists\, u_\alpha \in L^2$ tale che*

$$u = \sum_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha u_\alpha.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il ($\Longleftarrow$). Sia $v \in L^2$. Vogliamo mostrare che $\forall\, |\alpha| \leq m$ $\partial^\alpha v$ allora sta in H^{-m}. Si noti che basta farlo per un solo addendo, dato che siamo, comunque, in uno spazio vettoriale. Si ha

$$|\langle \partial^\alpha v, \varphi\rangle| = |(v, \partial^\alpha \varphi)| \leq \left|\int v\,\partial^\alpha \varphi\, dx\right| \leq \|v\|_{L^2}\|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2}\|\varphi\|_{H^m}.$$

Dimostriamo il ($\Longrightarrow$). Sia $A := \{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$e e definiamo

$$(L^2)^A := \bigotimes_{i=1}^{|A|} L^2_i$$

prodotto cartesiano di copie di L^2 in cui, per esempio, se abbiamo $U = \{u_\alpha\}$ e $V = \{v_\alpha\}$, il loro prodotto scalare è definito come

$$(U, V) = \sum_{|\alpha|\leq m} \int u_\alpha v_\alpha\, dx.$$

Adesso consideriamo l'applicazione D tale che

$$\begin{aligned} D : H^m &\longrightarrow (L^2)^A \\ u &\longmapsto \{\partial^\alpha u, \alpha \in A\} \end{aligned}$$

e notiamo che non è suriettiva, ma è lineare, iniettiva ed è un'isometria. Chiamiamo $D(H^m) = F \subset (L^2)^A$ e ne deriva che $D^{-1} : F \longrightarrow H^m$ è continua. Adesso, poichè F è un sottospazio chiuso in $(L^2)^A$, possiamo proiettare quest'ultimo su F. Adesso fissiamo $u \in H^{-m}$ e consideriamo un qualsiasi $W \in (L^2)^A$. Per quanto osservato prima, il teorema di Riesz vale e possiamo scrivere

$$L(W) := \langle u, D^{-1}PW\rangle_{H^{-m},H^m}$$

che è continua perchè le applicazioni tali che

$$(L^2)^A \xrightarrow{P} F \xrightarrow{D^{-1}} H^m \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

sono esse stesse continue. Allora L è lineare e continua su uno spazio di Hilbert e per il teorema di Riesz $\exists\, V$ tale che

$$L(W) = (W, V)_{(L^2)^A} \qquad \forall\, W.$$

Infine, prendiamo un $W \in (L^2)^A$ tale che $W = \{\partial^\alpha, \alpha \in A\}$ con $\varphi \in \mathcal{D}$. Allora si deve avere $D^{-1}PW = \varphi$ e quindi

$$\langle u, \varphi\rangle_{H^{-m},H^m} = \langle u, D^{-1}PW\rangle = L(W) = (W, V)_{(L^2)^A} = \int_{|\alpha|\leq m} \partial^\alpha \varphi\, v_\alpha\, dx =$$

$$= \int_{|\alpha|\leq m} \langle v_\alpha, \partial^\alpha \varphi\rangle = \sum_{|\alpha|\leq m} (-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\alpha v_\alpha, \varphi\rangle \Longrightarrow u \in L^2. \tag{48}$$

□

Adesso un rapido ripasso su ciò che bisogna sapere sulla teoria della trasformata di Fourier. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Allora

$$\mathcal{F} f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx$$

$$f \in L^1 \Longrightarrow \hat{f} \in L^\infty$$

inoltre

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} |\hat{f}(\xi)| = 0 \iff \|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}.$$

In più, se $\hat{f} \in L^1$ allora

$$f = (2\pi)^{-n} \bar{\mathscr{F}} \hat{f}(\xi)$$

Ricordiamo la definizione di spazio di Schwartz, delle funzioni a decrescenza rapida:

$$\mathscr{S} := \left\{ \varphi \in \mathscr{C}^\infty | x^\alpha \partial^\beta \varphi \in L^\infty \ \forall \alpha, \beta \right\}$$

che è uno spazio di Fréchet dotato delle seminorme

$$n_p(\varphi) = \sum_{\substack{|\alpha|\le p \\ |\beta|\le p}} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty}.$$

Avevamo già visto che

$$\|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^1} \le C n_{p+n+1}$$

18. Martedì 13.11.2012 - Trasformata di Fourier e distribuzioni in $\mathscr{S}'$

Ricordiamo ancora una volta che lo spazio $\mathscr{S}$ dotato delle seminorme

$$n_p(\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \sup_X |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

è uno spazio di Fréchet ed avevsmo anche visto che

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^1} \le C n_{n+p+1}(\varphi).$$

Ma se volessimo stimare anche n_p? Vediamo esplicitamente le cose: si ha

$$\begin{aligned} f = x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^{(n)} (t^\alpha \partial^\beta \varphi(t))}{\partial t_1 \dots \partial t_n} dt_1 \dots dt_n = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^{(n-1)} t_1^{\alpha_1} \dots t_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n \partial^\beta \varphi(t_1 \dots t_{n-1}, x_n)}{\partial t_1 \dots \partial t_{n-1}} dt_1 \dots dt_{n-1} \end{aligned} \tag{49}$$

o meglio (nel caso unidimensionale il tutto è più evidente) si ha

$$x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt} (t^\alpha \partial^\beta \varphi(t)) dt.$$

Quindi maggioriamo f con la norma L^1 del termine sotto integrale e posto

$$m_p(\varphi) := \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^1}$$

si ha che

$$n_p(\varphi) \le C m_{p+n}.$$

Adesso passiamo ad alcune proprietà della traformata di Fourier, che la legano, in un certo qual modo, alle funzioni a rapida decrescenza.

Proposizione 18.1. *Sia $\varphi \in \mathscr{S}$. Allora $\hat{\varphi} \in \mathscr{C}^1$ e inoltre*

(1) $\partial_{\xi_j} \big(\mathscr{F} \varphi(\xi) \big) = \mathscr{F}(-i x_j \varphi(x))$;
(2) $\mathscr{F}(\partial_{x_j} \varphi) = i \xi_j \hat{\varphi}(\xi)$.

Dimostrazione. Dei calcoli diretti ci permetteranno di arrivare alla tesi. Cominciamo dalla prima relazione tra la derivazione e la trasformata. Si ha

$$\partial_{\xi_j} \int e^{-ix\cdot\xi_j} \varphi(x) dx = \int -i x_j e^{-ix\xi_j} \varphi(x) dx$$

dove si osservi che abbiamo scambiato l'operazione di integrazione e di derivazione perchè $x\varphi(x) \in L^1$ e quindi vale il teorema di Lebesgue.
Passiamo alla seconda relazione. Si ha

$$\int e^{-ix\cdot\xi} \partial_{x_j} \varphi(x) dx = \int i \xi_j e^{-ix\cdot\xi} \varphi(x) dx.$$

□

Teorema 18.1. *Si ha che $\mathscr{F} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ è lineare e continua.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare sostanzialmente che $n_p(\hat{\varphi})$ è limitata. Mettendo insieme le due proprietà appena viste si ha, in linea del tutto generale, che

$$\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi) = (-i)^{|\beta|} \mathscr{F}\left(\partial_x^\alpha x^\beta \varphi(x)\right) \tag{50}$$

dove questa uguaglianza, sussiste anche in modulo. Adesso quindi avremo

$$\begin{aligned} n_p(\hat{\varphi}) &= \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|\xi^\alpha \partial^\beta \hat{\varphi}(\xi)\|_{L^\infty} \le \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \|\partial_x^\alpha (x^\beta \varphi(x))\|_{L^1} \le \\ &\le C_p \sum_{|\alpha'|,|\beta'|\le p} \|x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \varphi\|_{L^1} \le \tilde{C} n_{p+n+1}(\varphi) \end{aligned} \tag{51}$$

e questo conclude. □

Teorema 18.2. *Lo spazio $\mathscr{C}_0^\infty$ è denso in $\mathscr{S}$.*

Dimostrazione. Quello che dobbiamo dimostrare è che $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}\ \exists\, \varphi_j \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $\varphi_j \longrightarrow \varphi$ ossia che $n_p(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0\ \forall\, p$. Come troviamo questa successione φ_j? Al solito fissiamo $\psi(x) \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $\psi(x) = 1$ se $|x| \le 1$ e quindi tale da far si che

$$\psi\left(\frac{x}{j}\right) = 1 \qquad |x| \le j.$$

Poniamo $\varphi_j = \varphi(x)\psi\left(\frac{x}{j}\right)$ e osserviamo che, per come è costruita, φ_j converge puntualmente a φ. E le derivate successive? Si ha

$$\begin{aligned} \partial^\beta(\varphi_j - \varphi) &= \partial^\beta \varphi \left[1 - \psi\left(\frac{x}{j}\right)\right] = \\ &= (\partial^\beta \varphi(x))\left(1 - \psi\left(\frac{x}{j}\right)\right) + \sum_{\substack{\gamma>0 \\ |\gamma|\le\beta}} \binom{\beta}{\gamma} \partial^{\beta-\gamma}\varphi\, \partial^\gamma \left[\psi\left(\frac{x}{j}\right)\right] j^{-|\gamma|} \end{aligned}$$

ma osserviamo ora che

$$\|x^\alpha \partial^\beta(\varphi_j - \varphi)\|_{L^\infty} \le \max_{|x|\ge j} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| + C\frac{1}{j} n_p(\varphi)$$
$$C = p \sum_{|\gamma|\le p} \|\partial^\gamma \psi\|_{L^\infty}.$$

L'ultimo termine dell'addizione è dovuto al fatto che ψ è oramai fissata e per questo in C possiamo mettere le sue derivate, le quali, diventano nulle per $j \to +\infty$. Adesso rimane solo da vedere se va a 0 il primo termine della somma. In effetti è proprio così perchè

$$\max_{|x|\ge j} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| \le \frac{1}{j} n_{p+n}(\varphi) \longrightarrow 0$$

e quindi $n_p(\varphi_j - \varphi)$ è somma finita di quantità che tendono a zero. □

Definizione 18.1 (**Distribuzioni temperate**)**.** *Si dice che $u \in \mathscr{S}'$ se $u \in \mathscr{D}'$ e se $\exists\, p, \exists\, C$ tali che $|\langle u, \varphi\rangle| \le C n_p(\varphi)\ \forall\, \varphi \in \mathscr{D}$.*

Teorema 18.3. *Sia $u \in \mathscr{S}'$. Allora l'applicazione tale che*

$$\begin{aligned} u : \mathscr{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto \langle u, \varphi\rangle \end{aligned}$$

si estende ad $u : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ ed è continua su $\mathscr{S}$.

Dimostrazione. Sia $\varphi \in \mathscr{S}$ e poichè, per il teorema precedente, sappiamo che $\overline{\mathscr{C}_0^\infty} = \mathscr{S}$ allora possiamo trovare una $\varphi_j \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $n_p(\varphi_j - \varphi) \longrightarrow 0\ \forall\, p$. Quindi poichè converge, è anche di Cauchy ossia

$$|\langle u, \varphi_j\rangle| - \langle u, \varphi_h\rangle| = |\langle u, \varphi_j - \varphi_h\rangle| \le n_p(\varphi_j - \varphi_h) \longrightarrow 0.$$

Da questo segue che data una certa $\tilde{u} : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$, per definizione si ha che

$$\langle u, \varphi_j\rangle \longrightarrow \langle \tilde{u}, \varphi\rangle$$

e tale convergenza non dipende dalla scelta di φ_j dato che

$$\langle u, \varphi_j\rangle \le C n_p(\varphi_j) \longrightarrow C n_p(\varphi).$$

□

Ci chiediamo ora se $\mathscr{S}'$ sia effettivamente il duale di $\mathscr{S}$: è necessario mostrare che ogni $u : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ si scrive come elemento di $\mathscr{S}'$. Sia $L : \mathscr{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continua. Allora esistono C e p tali che $L(\varphi) \leq C n_p(\varphi)$. Ma vale il viceversa? Ossia ci chiediamo se $L \in \mathscr{D}'$. Si perchè è continua come mostra il prossimo calcolo:

$$\exists K \text{ compatto}, \exists q : |\langle L, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi| \leq n_q(\varphi).$$

Esempio 18.1. *Si ha che le funzioni sommabili sono distribuzioni temperate ossia*

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Questo è vero perchè

$$|\langle u, f\rangle| \leq \left| \int f \varphi \, dx \right| \leq \|f\|_{L^1} n_0(\varphi)$$

e in genere si ha proprio che le $f \in L^1$ *con* $f \in L^1 \Rightarrow f \in \mathscr{D}'$ *e questo ci permette di vedere* $\langle f, \varphi\rangle$ *semplicemente come l'integrale di un prodotto.*

Esempio 18.2. *Si ha anche che le funzioni a quadrato sommabile sono distribuzioni temperate ossia*

$$f \in L^2 \Longrightarrow f \in \mathscr{S}'$$

e si mostra facilmente con la seguente stima:

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} n_p(\varphi).$$

E la stessa cosa vale anche se $f \in L^\infty$.

Esempio 18.3. *Cosa succede se* $f \in L^1_{loc}$*? Si ha che esiste un polinomio* $p(x)$ *tale che* $|f(x)| \leq |p(x)|$ *e questo implica che* $f \in \mathscr{S}'$*, a patto che* $|p(x)| \leq (1+|x|)^m$ *Si vede con un semplice calcolo:*

$$\int f \varphi \, dx \leq \int p \varphi \, dx \leq \int (1+|x|)^m \varphi \, dx \leq n_{n+m+1}(\varphi).$$

19. Mercoledì 14.11.2012 - Proprietà delle distribuzioni temperate e Relazioni di contenimento

Proposizione 19.1. *Sia* $u \in \mathscr{E}'$ *Allora* $u \in \mathscr{S}'$*, ossia le distribuzioni a supporto compatto sono temperate.*

Dimostrazione. Al solito, prendiamo K intorno compatto del supporto di u; a questo punto esistono due costanti C e p tali che

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq \sum_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi(x)| \qquad \forall \varphi \in \mathscr{E}$$

ma questo varrà certamente per ogni $\varphi \in \mathscr{S}$ perchè $|\langle u, \varphi\rangle| \leq C n_p(\varphi)$. □

Si ricordino, di conseguenza, le seguenti inclusioni:

inc1 (52)
$$\boxed{\begin{array}{c} \mathscr{E}' \subset \mathscr{S}' \subset \mathscr{D}' \\ \mathscr{C}_0^\infty = \mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E} = \mathscr{C}^\infty \end{array}}$$

Esercizio 19.1. *Vogliamo mostrare che* $VP\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'$ *e questo vuol dire dimostrare che ha senso scrivere* $\langle VP\frac{1}{x}, \varphi\rangle$ *con* $\varphi \in \mathscr{S}$*. Al solito, per dimostrarlo, prendiamo una* ψ *tale che* $\psi = 1$ *in un intorno di* $\operatorname{supp}\varphi$*. Ha senso scrivere*

$$\langle VP\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle \psi u + (1-\psi)u, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}$$

ma ψu *ha anch'essa supporto compatto ossia* $\psi u \in \mathscr{E}' \Rightarrow \psi u \in \mathscr{S}'$*, mentre* $(1-\psi) \in L^\infty \Rightarrow (1-\psi) \in \mathscr{S}'$ *e questi due argomenti conducono al fatto che* $VP\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'$.

Definizione 19.1 (**Convergenza di distribuzioni temperate**). *Sia* $u_j \subset \mathscr{S}'$*. Allora*

$$u_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} u \iff \forall \varphi \in \mathscr{S} \ \langle u_j, \varphi\rangle \longrightarrow \langle u, \varphi\rangle.$$

Osservazione 19.1. *Si ha che*

$$u_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} u \quad \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \quad u_j \xrightarrow{\mathscr{D}'} u$$

e vale il viceversa solo se le u_j hanno supporto tutte nello stesso compatto. Un esempio del fatto che non vale semplicemente il viceversa può aversi con $u_k = e^{k^2}$ su $\varphi = e^{-x^2}$. Si avrebbe $\langle u_k, \varphi\rangle = 1$ con $ke^{k^2} \longrightarrow 0$ in $\mathscr{S}'$ ma non in $\mathscr{D}'$.
Supponiamo ora, invece, di prendere $u_k = a_k \delta_k$, dove $a_k \in \mathbb{R}$. Allora $\langle u_k, \varphi\rangle = a_k \varphi(k)$ e $u_k \longrightarrow$ in $\mathscr{D}'$. Ma per avere convergenza anche nello spazio di Schwartz bisogna richiedere che esistano m, C tali che $|a_k| \le Ck^m$ ossia che la successione cresca meno di un polinomio così da poter avere

$$|\langle u_k, \varphi\rangle| \le Ck^m \varphi(k) \le \frac{k^m}{k^{m+1}} \longrightarrow 0.$$

Morale della favola: si deve richiedere che $\operatorname{supp} u_j \subset \tilde{K} \subset\subset K$ *così da avere*

$$|\langle u_j, \varphi\rangle| \le C \sum_{|\alpha \le p} \sup_{\tilde{K}} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Esercizio 19.2. *Siano f_j ed $f \in L^1_{loc}$. Dimostriamo ora che*

$$(f_j - f) \xrightarrow{L^p} 0 \Longrightarrow f_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} f \qquad p \le +\infty.$$

Procediamo come segue:

$$|\langle f_j, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| \le \left| \int (f_j - f)\, \varphi\, dx \right| \le (\text{Hölder}) \le \|f_j - f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}.$$

Se, invece, supponiamo $f_j \in L^1_{loc}$ ed $f_j \longrightarrow f$ q.o.siamo nelle condizioni del teorema di Lebesgue con funzione dominante un polinomio $p(x)$ maggiorante tutte le f_j $\forall j$. Questo conduce al fatto che $f_j \longrightarrow f$ in $\mathscr{S}'$. Si ha che

$$|\langle f_j - f, \varphi\rangle| \le \int |f_j - f| \varphi$$

che converge puntualmente a 0 *e che può essere maggiorato da*

$$\int (1 + |x|)^m \frac{1}{(1 + |x|)^{m+n+1}} (1 + |x|)^{m+n+1} \varphi$$

con la quantità per cui abbiamo moltiplicato e diviso, utile a far si che tutto stia in L^1; così arriviamo ad una funzione dominante tale che

$$|f_j - f||\varphi| \le \frac{1}{(1 + |x|)^{n+1}} n_{m+n+1}(\varphi).$$

Teorema 19.1. *Si ha che*

$$u \in \mathscr{S}' \Longrightarrow \partial^\alpha u \in \mathscr{S}' \tag{53}$$

Dimostrazione. Si ha per definizione che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$, $\langle \partial_{x_i} u, \varphi\rangle = -\langle u, \partial_{x_i} \varphi\rangle$ ma se $u \in \mathscr{S}'$, allora

$$|\langle \partial_{x_i} u, \varphi\rangle| \le C n_p(\partial_{x_i} \varphi) \le n_{p+1}(\varphi)$$

ed analogamente, se $u_j \longrightarrow u$ in $\mathscr{S}'$, di conseguenza $\partial^\alpha u_j \longrightarrow \partial^\alpha u$ in $\mathscr{S}'$. □

Definizione 19.2 (Spazio delle funzioni a crescita lenta). *E' definito lo spazio delle funzioni a decrescenza lenta lo spazio*

$$\mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty \,|\, \forall \beta\, \exists C_\beta, \exists m_\beta \Rightarrow |\partial^\beta f(x)| \le C_\beta (1 + |x|)^{m_\beta} \right\} \tag{54}$$

ossia lo spazio di quelle funzioni costruite per far si che il prodotto di distribuzioni temperate sia ancora una distribuzione temperata.

Teorema 19.2. *Sia $f \in \mathscr{O}_M(\mathbb{R}^n)$. Allora*

(1) $\forall\, \varphi \in \mathscr{S} \Longrightarrow f\varphi \in \mathscr{S}$;
(2) $\forall\, u \in \mathscr{S}' \Longrightarrow u\varphi \in \mathscr{S}'$[15].

---

[15] Questo implica, e lo si ricordi, che se $u_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} u \Longrightarrow fu_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} fu$.

Dimostrazione. Partiamo dalla 1. Si ha che

$$n_p(f\varphi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\le p} \sup_x |x^\alpha \partial^\beta (f\varphi)(x)| \le C_p \sum_{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\le p} \sup_x |x^\alpha \partial^\beta f(x) \partial^\gamma \varphi(x)| \le$$
$$\le C n_{\tilde{p}}(\varphi)$$

dove le nuove costanti inglobano, oltre ai coefficienti binomiali derivanti dalle derivazioni, anche quantittà del tipo $\sup_x C_\beta(1+|x|)^{m_\beta}$. □

Adesso vogliamo definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata. Supponiamo di avere $f \in L^1$, $\varphi \in \mathscr{S}$ e partiamo da

$$\langle f, \hat{\varphi}\rangle = \int f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \int f(x)\left(\int e^{-ix\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dx$$

ma poichè $f(x)\varphi(\xi)e^{-ix\cdot\xi} \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ possiamo applicare Fubini - Tonelli ed avere di conseguenza

$$\int \varphi(\xi)\left(\int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx\right)d\xi = \langle \hat{f}, \varphi\rangle.$$

Questo ci porta a definire, data una $u \in \mathscr{S}'$ la sua trasformata $\hat{u} \in \mathscr{S}'$ tale che

$$\langle \hat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}. \tag{55}$$

Teorema 19.3. *Sia $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}'$. Essa è lineare e continua.*

Dimostrazione. Prendiamo $u \in \mathscr{S}'$. Dobbiamo mostrare che $\hat{u} \in \mathscr{S}'$ è tale che $|\langle \hat{u}, \varphi\rangle| \le C n_p(\varphi)$. Ma questo è proprio vero per definizione dato che

$$|\langle \hat{u}, \varphi\rangle| = |\langle u, \hat{f}\rangle| \le C n_q(\hat{\varphi}) \le n_{q+n+1}(\varphi).$$

□

Teorema 19.4. *Sia*

$$\overline{\mathscr{F}} f := \int e^{ix\cdot\xi} f(x)dx.$$

Allora $\mathscr{F} : \mathscr{S}' \longrightarrow \mathscr{S}'$ è un'isometria con

anti_f
$$\boxed{\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathscr{F}}} \tag{56}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\langle \mathscr{F}\overline{\mathscr{F}} u, \varphi\rangle = \langle \overline{\mathscr{F}} u, \mathscr{F}\varphi\rangle = \langle u, \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi\rangle = \langle u, (2\pi)^n\varphi\rangle = (2\pi)^n\langle u, \varphi\rangle$$

e di conseguenza

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}} u = (2\pi)^n u \tag{57}$$

e questo conclude. □

Osservazione 19.2. *E' importante osservare che non ha senso dire che esiste $\overline{\mathscr{F}} u$ per $u \in \mathscr{S}'$ perchè, per definizione, $\overline{\mathscr{F}}$ si applica alle funzioni infinite volte differenziabili e a supporto compatto, ed è tramite esse che si estende alle distribuzioni temperate.*

Esercizio 19.3. *Sia $u \equiv 1 \in \mathscr{S}'$. Dimostriamo che*

trasf_delta
$$\boxed{\mathscr{F}(1) = (2\pi)^n\delta} \tag{58}$$

Dimostriamo il tutto partendo un pò da lontano. si sa che

$$\mathscr{F}\left(e^{-\varepsilon^2\frac{|x|^2}{4}}\right) = \left(\frac{4\pi}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{\varepsilon^2}} \text{ e più in generale } \mathscr{F}\left(e^{-a|x|^2}\right) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}.$$

Adesso, dato

$$G(z) = \pi^{\frac{n}{2}} e^{-|z|^2} \Longrightarrow \int G(z)dz = 1$$

e di conseguenza

$$\varepsilon^{-n} G\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\mathscr{S}'} \delta$$

quando $\varepsilon \to 0$. Adesso abbiamo che

$$e^{-\frac{\xi^2|x|^2}{4}} \longrightarrow 1$$

puntualmente e quindi è maggiorabile dal polinomio $p(x) = 1$ in $\mathscr{S}'$ e quindi

$$\mathscr{F}\left(e^{-\frac{\xi^2|x|^2}{4}}\right) \longrightarrow \mathscr{F}(1) \longrightarrow (2\pi)^n \delta$$

20. Venerdì 16.11.2012 - Trasformata di Fourier di distribuzioni in $\mathscr{E}'$

Prima di vedere quale forma assume la trasformata di una distribuzione a supporto compatto sarà necessario introdurre due teoremi: in virtù di essi sarà possibile effettuare nella maniera opportuna operazioni che convolgeranno derivazione, integrazione e prodotti scalari.

Teorema 20.1. *Siano $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^p_x)$ e $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y)$. Allora l'applicazione tale che*

$$y \longmapsto f(y) := \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle$$

sta in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^q_y)$ e inoltre

der_cro

$$\partial^\alpha_y \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle = \langle u(x), \partial^\alpha_y \varphi(x,y)\rangle \qquad \forall\, \alpha. \tag{59}$$

Dimostrazione. Come prima cosa dobbiamo dimostrare la continuità: per farlo è essenziale l'ipotesi che $u \in \mathscr{E}'$. Supposto questo, prendiamo un compatto K che sia intorno del supporto di u. Per definizione abbiamo che $\forall\, \varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^p_x)$

$$\langle u, \varphi\rangle \le C \sup_{\substack{x\in K\\ |\beta|\le p}} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Adesso fissiamo un y_0 e prendiamo una successione $\{y_j\}$ tale che $y_j \longrightarrow y_0$. Si ha che

$$\begin{aligned}|f(y_j) - f(y_0)| &= |\langle u(x), \varphi(x,y_j)\rangle - \langle u(x), \varphi(x,y_0)\rangle| = |\langle u(x), (\varphi(x,y_j) - \varphi(x,y_0))\rangle| \le \\ &\le C \sup_{\substack{x\in K\\ |\beta|\le p}} \left|\partial^\beta_x(\varphi(x,y_j) - \varphi(x,y_0))\right|\end{aligned}$$

dove $(x, y_j) \in K \times \overline{U(y_0)}$. Adesso si vede che l'ultima quantità con cui abbiamo maggiorato converge a 0 uniformemente e questo implica la continuità di f.
Ma non è finita, bisogna controllare che l'operazione di derivazione passa all'interno del segno di crochet. Poniamo la sequente quantità:

$$\frac{1}{h}[f(y+he_i) - f(y)] - \langle u(x), \partial_{y_i}\varphi(x,y)\rangle := \langle u(x), \psi_h(x,y)\rangle$$

dove abbiamo posto

$$\psi_h(x,y) = \frac{1}{h}[\varphi(x,y+he_i) - \varphi(x,y)] - \partial_{y_i}\varphi(x,y)$$

e vogliamo dimostrare che $\psi_h \longrightarrow 0$. Osserviamo che $\partial^\alpha_x \psi_h(x,y) \longrightarrow 0$ uniformemente per $x \in K$; quindi esiste $\partial_{y_i} f(x,y)$ ed è uguale a $\langle u(x), \partial_{y_i}\varphi(x,y)\rangle$. □

Teorema 20.2. *Siano $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^p_x)$ e $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^p_x \times \mathbb{R}^q_y)$.*
Sia il plurirettangolo $Q = \prod_{i=1}^q [a_i, b_i]$. Allora

$$\left\langle u(x), \int_Q \varphi(x,y)\,dy\right\rangle = \int_Q \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle\,dy \tag{60}$$

e inoltre tale prodotto scalare è in $\mathscr{C}^\infty$.

Dimostrazione. Per Fubini - Tonelli calcolare l'integrale sul plurirettangolo è come farlo q volte, una volta per ogni lato. Per questo ci basta dimostrare l'enunciato per $q = 1$. Poniamo

$$F(y) := \left\langle u(x), \int_a^y \varphi(x,t)\,dt\right\rangle$$

e per il teorema precedente si ha che $F'(y) = \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle$. Faccianmo un calcolo esplicito.

$$\int_a^b F'(y)\,dy = \int_a^b \langle u(x), \varphi(x,y)\rangle\,dy$$

ma allo stesso tempo, per il teorema fondamentale del calcolo

$$\int_a^b F'(y)\,dy = F(b) - F(a) \Longrightarrow F(b) - F(a) = \left\langle u(x), \int_a^b \varphi(x,t)\,dt\right\rangle$$

dove

$$\left\langle u(x), \int_a^a \varphi(x,t)\,dt \right\rangle \equiv 0.$$

□

E adesso il teorema fulcro di questa sezione.

Teorema 20.3. *Sia $u \in \mathscr{E}'$. Allora*

trasf_supp_cpt

$$\boxed{\hat{u}(\xi) = \left\langle u(x), e^{-ix\xi} \right\rangle \qquad \hat{u} \in \mathscr{O}_M(\Omega)} \tag{61}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\hat{u} \in \mathscr{O}_M$, Chiamiamo $v(\xi) = \langle u(x), e^{-ix\xi}\rangle$ che, per il primo teorema che abbiamo dimostrato (sulla derivazione sotto il segno di crochet), è continua in x. Dobbiamo mostrare che v è una funzione a crescita lenta. Applicando il primo teorma si ha che

$$\partial_\xi^\alpha v(\xi) = \langle u(x), \partial_\xi^\alpha e^{-ix\xi}\rangle = \langle u(x), (-ix)^\alpha e^{-ix\xi}\rangle$$

e tramite la seguente stima si mostra la crescita polinomiale.

$$|\partial_\xi^\alpha v(\xi)| \leq \sup_{\substack{x\in K\\ |\beta|\leq p}} |\partial_x^\beta (x^\alpha e^{-ix\xi})| \leq C(1+|\xi|^p).$$

Ora dobbiamo dimostrare che $v = \hat{u}$: fissiamo $\varphi \in \mathscr{D}$ e prendiamo il plurirettangolo Q in modo che $\operatorname{supp}\varphi \subset Q$. Si ha che

$$\begin{aligned}\langle v, \varphi\rangle &= \int_Q v(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_Q \langle u(x), e^{-ix\xi}\rangle \varphi(\xi)d\xi = \int \langle u(x), e^{-ix\xi}\varphi(\xi)\rangle d\xi = \\ &= \left\langle u(x), \int e^{-ix\xi}\varphi(\xi)d\xi \right\rangle = \langle u, \hat{\varphi}\rangle\end{aligned}$$

uguaglianza possibile per il secondo teorema dimostrato. Infine, per definizione, $\langle u, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{u}, \varphi\rangle$ e questo conclude la dimostrazione. □

Si noti che adesso siamo in grado di calcolare per esempio

trasf_delta2

$$\boxed{\mathscr{F}(\delta)(\xi) = \langle \delta_x, e^{-ix\xi}\rangle = 1} \tag{62}$$

Esercizio 20.1. *Introduciamo la notazione*

$$\check{f}(x) = f(-x).$$

Eseguiamo un calcolo che ci porterà a porre una definizione sensata. Sia f una funzione. Allora

$$\langle \check{f}, \varphi\rangle = \int \check{f}(x)\varphi(x)dx = \int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx = \langle f, \check{\varphi}\rangle.$$

Quindi anche nel caso in cui si abbia $u \in \mathscr{D}'$ possiamo definire

$$\langle \check{u}, \varphi\rangle = \langle u, \check{\varphi}\rangle. \tag{63}$$

Osservazione 20.1. *Si osservi che nel caso di funzioni pari allora $f = \check{f}$.*
Si noti anche che se $u \in \mathscr{S}'$ è pari lo è anche la sua trasformata.

$$\check{\hat{f}}(\xi) = \hat{f}(-\xi) = \int e^{ix\xi} f(x)dx = \int e^{-ix\xi} f(-x)dx = \hat{\check{f}}(\xi)$$

Proposizione 20.1. *Se una funzione f è pari allora lo è anche $\hat{f}$.*

Dimostrazione. Abbiamo visto che $\check{\hat{f}} = \hat{\check{f}}$; si ha inoltre che se una funzione è pari allora $\check{f} = f$. Allora mettendo insieme le due cose si ha la tesi. □

Sia ora la traslata

$$(\tau_a f)(x) := f(x-a).$$

Abbiamo un'interessante proprietà della trasformata di Fourier: essa trasforma le traslazioni in oscillazioni come mostra il seguente calcolo.

$$\mathscr{F}[(\tau_a f)(x)] = \int e^{-ix\xi} f(x-a)dx = \int e^{-ix\xi} e^{ia\xi} f(x)dx = e^{ia\xi}\hat{f}(\xi).$$

Adesso alcune formule importanti.

trasf_delta3

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathscr{F}(\partial^\alpha \delta) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \\ \mathscr{F}(x^\alpha) = i^{|\alpha|}(2\pi)^n \partial^\alpha \delta \\ \mathscr{F}(\delta_a) = \mathscr{F}(\tau_a \delta) = e^{-ia\xi}\end{array}} \tag{64}$$

21. Martedì 20.11.2012 - Supporto singolare e fronte d'onda

Supponiamo di avere una $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ e ci chiediamo, preso un aperto $\omega \subset \Omega$, se $u\big|_\omega \in \mathscr{C}^\infty$. Se questo accade, prendiamo tutti gli

$$\left\{\omega \text{ aperti } \subset \Omega : u\big|_\omega \in \mathscr{C}^\infty(\omega)\right\}$$

e definiamo

$$\omega_0 := \bigcup_i \omega_i$$

.

Definizione 21.1 (**Supporto singolare**). *Si definisce il supporto singolare di u come*

$$SS(u) := \Omega - \omega_0. \tag{65}$$

Dire che $x \notin SS(u)$ significa che esiste un intorno $V(x)$ tale che $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(V)$ si ha

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le C_N(1+|\xi|)^{-N} \qquad \forall N\ \forall \xi.$$

Esempio 21.1. *Siano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ed u tale che*

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^0 \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, y)\,dx.$$

Allora $SS(u) = \{y = 0\}$.

Definizione 21.2 (**Fronte d'onda**). *Sia $(x, \bar{\xi})$. Allora esso $\notin WF(u)$ se esiste un intorno $V(x)$ ed esiste*

$$\Gamma_{\bar\xi} := \left\{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\bar\xi}{|\bar\xi|}\right| < \delta\right\}$$

intorno conico di $\bar\xi$ tali che $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(V)$ e $\forall N\ \exists C_N$ per cui

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le C_N|\xi|^{-N} \qquad \forall\, \xi \in \Gamma_{\bar\xi}.$$

Teorema 21.1. *Sia $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^n_\xi \longrightarrow \Omega$ la proiezione canonica. Allora*

$$SS(u) = \pi WF(u). \tag{66}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il ($\Rightarrow$). E' evidente che se $\bar{x} \notin S(u) \Longrightarrow \forall\, \xi$ si avrebbe $(\bar{x}, \xi) \in WF(u)$. Adesso dimostriamo il ($\Leftarrow$). Sia $\bar{x} \notin \pi WF(u)$. Allora $\forall\, \bar\xi (\neq 0)$ si ha che $(\bar x, \bar\xi) \notin WF(u)$. Questo significa, per definizione, che esiste un intorno $V_{\bar\xi} \subset \Omega$ e $\Gamma_{\bar\xi}$ tali che $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(V_{\bar\xi})$ e $\forall N$ esista una costante C_N tale che $|\widehat{\varphi u}(\xi)| \le C_N|\xi|^{-N}$, dove $\xi \in V_{\bar\xi}$.
Ma possiamo trovare quindi $\xi_1, \dots, \xi_N$ tali da poter avere

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \bigcup_i \Gamma_{\xi_i}.$$

Ma ora $\bar{x} \notin SS(u)$? Basta prendere

$$V = \bigcap_i^k V_{\xi_i}$$

e quindi $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}(V)$ come costante prendo

$$C_N = \max\{C_{N_1}, \dots, C_{N_k}\}$$

e questo conclude. □

Esempio 21.2 (**Calcolo del fronte d'onda per la distribuzione funzione caratteristica del semipiano $x_n > 0$**). *Sia*

$$\chi_n(x', x_n) = \begin{cases} 1 & x_n > 0 \\ 0 & x_n \le 0 \end{cases}$$

con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $x \in \mathbb{R}$. Se prendiamo un punto del tipo (x', x_n) con $x_n \neq \emptyset$ allora esso non appartiene ad $SS(\chi)$. Questo perchè riusciamo comunque a trovare un suo intorno dove $\chi = 1$ o $\chi = 0$ identicamente e quindi in quell'intorno $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty$.
Fissiamo ora il punto $(x', 0)$ e la direzione $(\bar{\xi}', \bar{\xi}_n)$. La direzione "cattiva" sarà quella del semiasse delle ordinate ossia per $\bar{\xi}' = 0$. Come si dimostra? Supponiamo che $\bar{\xi}' \neq 0$; allora dobbiamo dimostrare che $(\bar{\xi}', \bar{\xi}) \neq WF(\chi)$. Poniamo $\frac{\bar{\xi}'}{|\bar{\xi}'|} = 2\alpha > 0$ e consideriamo l'intorno conico

$$\Gamma_{\bar{\xi}'} = \left\{ \xi : \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\bar{\xi}'}{|\bar{\xi}'|} \right| < \alpha \right\}.$$

Se $\xi \in \Gamma_{\bar{\xi}}$ con $|\xi| = 1$ allora $|\xi - \bar{\xi}| < \alpha \Longrightarrow |\xi' - \bar{\xi}'| < \alpha$ e poichè

$$|\xi'| > |\bar{\xi}'| - |\xi' - \bar{\xi}'| = 2\alpha - |\xi' - \bar{\xi}'| > \alpha.$$

Adesso dobbiamo valutare $|\xi'|^{2N} \widehat{\varphi\chi}(\xi)$:

$$|\xi'|^{2N} \widehat{\varphi\chi}(\xi) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} e^{-ix\xi} |\xi|^{2N} \varphi(x', x_n) dx' =$$

$$(\pm) \int_0^{+\infty} e^{ix_n\xi_n} dx_n \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} e^{-ix'\xi'} \left[\Delta_{x'}^N \varphi(x) \right] \right)$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che

$$\xi^{2N} e^{-ix\xi} = \partial_x^{2N} e^{-ix\xi}.$$

Quindi possiamo stimare tutto come segue:

$$|\xi'|^{2N} \left| \widehat{\varphi\chi(\xi')} \right| \le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\Delta_{x'}^N \varphi| dx \le C_\varphi \|\varphi\|_{\mathscr{C}^{2N}} \le n_{2N+n+1}(\varphi)$$

dove C_φ è la misura del supporto di φ.[16]
Siamo riusciti a stimare questa trasformata. Si osservi, però, che se avessimo considerato un'altra direzione ξ non avremmo potuto scaricare su φ la derivata tramite l'integrazione per parti.
Ora per $|\xi'| \ge \alpha|\xi|$ si ha che

$$|\xi|^{2N} \left| \widehat{\varphi\chi}(\xi', \xi_n) \right| \le \frac{1}{\alpha^{2N}} |\xi'|^{2N} \left| \widehat{\varphi\chi}(\xi', \xi_n) \right| \le \frac{C}{\alpha^{2n}} n_{N+n+1}(\varphi)$$

e questo ci dice che la direzione scelta è buona dato che, qualsiasi sia la potenza edi ξ, $|\xi|^{2N} \left| \widehat{\varphi\chi}(\xi', \xi_n) \right|$ è limitata.
Ma se $\alpha \ll 1$? Consideriamo $(\bar{\xi}', \bar{\xi}_n) \notin WF(\chi)$, con $\bar{\xi}' \neq 0$. Quindi dobbiamo mostrare che i punti del tipo $(x', 0)$ e $(0, \xi_n)$ stanno in $WF(\chi)$. Prendiamo un intorno V di $(x', 0)$ e fissiamo una $\varphi(x) = \psi(x')\varphi_0(x_n)$ con $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ e $\varphi_0 \in \mathscr{C}_0^\infty(0, +\infty)$. Inoltre richiediamo che $\int \psi dx = 1$ e $\varphi_0(x_n) = 1$ per $|x_n| < \delta_V$. Passiamo ad eseguire i calcoli:

$$\xi_n \widehat{\varphi\chi}(0, \xi_n) = \xi_n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix_n\xi_n} \varphi(x)\chi(x) dx = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} \psi(x') dx'}_{=1} \int_0^{+\infty} \xi_n e^{-ix_n\xi_n} \varphi_0(x_n) dx_n =$$

$$= i \int_0^{+\infty} \partial_{x_n} \left(e^{-ix_n\xi_n} \right) \varphi_0(x_n) dx_n =$$

$$= i \left[-\int_0^{+\infty} e^{-ix_n\xi_n} \varphi_0'(x_n dx_n - 1 \right] = (*)$$

quindi

$$|\xi_n| |\widehat{\varphi\chi}(0, \xi_n)| = 1 \iff |\widehat{\varphi\chi}(0, \xi_n)| = \frac{1}{|\xi_n|}.$$

---

[16] Altrimenti non saremmo riusciti a stimare dato che può aversi $\|\varphi\| \to +\infty$.

Questo è vero dato che in $(*)$ $\varphi_0 \in \mathscr{C}_0^\infty$*; adesso si ha*

$$(*) = \frac{1}{\xi_n}\int_0^{+\infty} e^{ix_n\xi_n}\varphi_0''(x_n)dx_n + \underbrace{\left[\frac{1}{\xi_n}e^{-ix_n\xi_n}\varphi'(x_n)\right]_0^{+\infty}}_{=0} - 1.$$

Morale della favola:

$$\xi_n\widehat{\varphi\chi}(0,\xi_n) = 1 + \frac{1}{\xi_n}\int \varphi''\,dx$$

non decresce come avremmo voluto.

Esempio 21.3. *Supponiamo di essere in* $\mathbb{R}^2$ *e sia*

$$\langle u, v\rangle = \int f(x)\varphi(x,0)\,dx \qquad f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}).$$

I punti problematici saranno del tipo $(\bar{x},0)$ *con* $\bar{x} \in \operatorname{supp} f$.

Esempio 21.4. *Sia* $u = \delta$. *Allora*

$$SS(\delta) = \{0\} \qquad WF(\delta) = \{(0,\xi), \forall\,\xi\}.$$

22. Mercoledì 21.11.2012 - Convoluzione di distribuzioni in $\mathscr{E}'$ e sue proprietà

Ricordiamo brevemente cosa avveniva, per le funzioni: il prodotto di convoluzione avveniva, e acquisiva senso, tra $f \in L^1$ e $g \in L^1$ e così si aveva

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy.$$

Inoltre l'ulilizzo di un mollificatore

$$\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \int \chi_\varepsilon\,dx = 1$$

consentiva di regolarizzare moltissimo le funzioni ed avere

$$f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty$$

mentre per quel che riguarda il supporto,

$$\operatorname{supp}(f*g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$$

Definizione 22.1 (Insieme convolutivo). *Siano* $F, G \subset \mathbb{R}^n$ *chiusi. Essi si dicono insiemi convolutivi se* $\forall\, R > 0\ \exists\, \rho(R)$ *tale che*

$$\begin{cases} x \in F \\ y \in G \\ |x+y| \le R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |x| \le \rho(R) \\ |y| \le \rho(R) \end{cases}.$$

Esempio 22.1. *Siano degli* F_i *tutti compatti tranne al più uno, per esempio* F_1. *Allora gli* F_i *sono convolutivi perchè*

$$\begin{cases} |x_1 + \cdots + x_k| \le R \\ |x_2| \le M \\ \vdots \\ |x_k| \le M \end{cases} \Longrightarrow |x_1| \le R + (k-1)M := \rho$$

Esempio 22.2. *Diamo un esempio di coppia non convolutiva:*

$$F_1 = [a_i, +\infty) \qquad F_2 = (-\infty, a_2].$$

Osservazione 22.1. *Presa una famiglia di insiemi convolutivi* $F_1 \ldots F_k$, *se si aggiunge* $G_1 \ldots G_m$ *compatti, allora* $\{F_i, G_j\}$ *sono ancora insiemi convolutivi.*

Teorema 22.1. *Sia* $u \in \mathscr{E}'$ *e* $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$. *Allora si ha che*

conv_E'

$$\boxed{\begin{gathered} (u*\varphi) \in \mathscr{C}^\infty \\ (u*\varphi)(x) := \langle u(y), \varphi(x-y)\rangle \\ \partial^\alpha(u*\varphi) = (\partial^\alpha u * \varphi) = (u * \partial^\alpha\varphi) \\ \operatorname{supp}(u*\varphi) \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\varphi \end{gathered}} \qquad (67)$$

Dimostrazione. Applichiamo ora la formula der_cro (59) così da avere

$$\partial_x^\alpha(u*\varphi)(x) = \partial_x^\alpha\langle u(y),\varphi(x-y)\rangle = \langle u(y),\partial_x^\alpha\varphi(x-y)\rangle = \langle u(y),(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha\varphi(x-y)\rangle =$$
$$= \langle\partial_y^\alpha u(y),\varphi(x-y)\rangle = (\partial^\alpha u*\varphi)(x).$$

Per quanto riguarda i supporti, poniamo $K_1 = \operatorname{supp} u$e $K_2 = \operatorname{supp}\varphi$. Supponiamo che $x \notin K_1 + K_2$. Si possono avere due casi:

(1) $y \notin K_1$ e allora $u*\varphi = 0$;
(2) $y \in K_1$, ma questo significa che $x - y \notin K_2$ e quindi $\varphi \equiv 0$.

Allora il supporto del prodotto di convoluzione deve stare nella somma dei due supporti. □

Teorema 22.2. *Siano $u \in \mathscr{E}'$ e $\varphi,\psi \in \mathscr{C}_0^\infty$. Allora*

(1) $(u*\varphi)*\psi = u*(\varphi*\psi)$;
(2) $\langle u*\varphi,\psi\rangle = \langle u,\check{\varphi}*\psi\rangle$.

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare il punto 1). Prendiamo un plurirettangolo Q tale da contenere il supporto di ψ. Allora, per un teorema già visto (sull'integrazione sotto il segno di crochet), si ha

$$\left\langle u(y),\int_Q\varphi(x-y-z)\psi(z)dz\right\rangle = \int_Q\langle u(y),\varphi(x-y-z)\psi(z)\rangle dz =$$
$$= \int_Q\langle u(y),\varphi(x-y-z)\rangle\psi(z)dz = \int_{\mathbb{R}^n}(u*\varphi)(x-z)\psi(z)dz =$$
$$= [(u*\varphi)*\psi](x).$$

Ma allo stesso tempo

$$\left\langle u(y),\int_Q\varphi(x-y-z)\psi(z)dz\right\rangle = \langle u(y),\varphi*\psi(x-y)\rangle = u*(\varphi*\psi)$$

e questo dimostra la validità dell'asserto. Pe quanto concerne il secondo, abbiamo

$$\langle u*\varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}\langle u(x),\varphi(y-x)\rangle\psi(y)dy = \left\langle u(x),\int_Q\varphi(y-x)\psi(y)dy\right\rangle =$$
$$= \left\langle u(x),\int_{\mathbb{R}^n}\check{\varphi}(x-y)\psi(y)dy\right\rangle = \langle u(x),(\check{\varphi}*\psi)(x)\rangle.$$

Questo conclude la dimostrazione. Si osservi che non è necessario che tutti i supporti siano compatti, basta che due siano insiemi convolutivi e uno sia chiuso. □

Adesso un teorema di densità molto importante.

Teorema 22.3. *Lo spazio $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ è denso in $\mathscr{D}'(\Omega)$ e questo significa che $\forall\, u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ $\exists\, f_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ tale che $f_j \xrightarrow{\mathscr{D}'} u$ ossia $\forall\,\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ $\langle f_j\,\varphi\rangle \longrightarrow \langle u,\varphi\rangle$.*

Dimostrazione. Costruiamoci una $f_j \in \mathscr{C}_0^\infty$: scegliere una funzione di tipo cut-off ci darà la compattezza del supporto e la convoluzione con il nostro mollificatore ci farà guadagnare la regolarità necessaria.
Consideriamo una successione di compatti tali che

$$\begin{cases}\mathring{K}_i \subset K_{i+1}\\ \bigcup_i K_i = \Omega\end{cases}$$

e prendiamo $\psi_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ tale che $\psi_j(x) = 1$ su K_j e $\operatorname{supp}\psi_j \subset K_{j+1}$. Sia adesso

$$\chi_\varepsilon = \varepsilon^{-n}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \int\chi dx = 1 \qquad \chi \in \mathscr{C}^\infty.$$

Sia la candidata $f_j := (\psi_j u)*\chi_{\varepsilon_j}$ dove $\varepsilon_j < d(K_j,\complement K_{j+1})$ e $\varepsilon_j \longrightarrow 0$. Prima di procedere si osservi, e questa cosa la useremo, che possiamo sempre pensare χ una funzione pari e di conseguenza $\check{\chi} = \chi$. Quindi

$$\langle f_j,\varphi\rangle = \langle(\psi_j u)*\chi_{\varepsilon_j},\varphi\rangle = \langle\psi_j u,\varphi*\check{\chi}_{\varepsilon_j}\rangle.$$

Consideriamo ora φ fissata e K compatto tale che $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathring{K}$. Di conseguenza $\operatorname{supp}(\varphi * \chi_{\varepsilon_j}) \subset K$. Ora

$$\begin{cases} \chi * \varphi \longrightarrow \varphi \\ \partial^\alpha (\chi * \varphi) \longrightarrow \partial^\alpha \varphi \end{cases}$$

dove la convergenza avviene uniformemente sui compatti. Ma allora $\langle u, \chi_{\varepsilon_j} * \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle$ cioè abbiamo convergenza in $\mathscr{D}'$ e poichè ψ_j sarà identicamente uguale a 1 su compatti sempre più grandi, da un certo indice j in poi si avrà $\psi_j u \longrightarrow u$. □

Teorema 22.4. *Il prodotto di convoluzione commuta con la traslazione.*

Dimostrazione. Si tratta di un semplice calcolo:

$$\begin{aligned} (u * \tau_a \varphi)(x) &= (u * \varphi(x-a)) = \langle u(y), \varphi(x-a-y) \rangle = (\tilde{y} = y + a) = \\ &= \langle u(\tilde{y} - a), \varphi(x - \tilde{y}) \rangle = (\tau_a u * \varphi)(x). \end{aligned}$$

□

Adesso siamo nelle condizioni per di esporre due teoremi utili determinare univocamente un prodotto di convoluzione.

Teorema 22.5. *Siano $u \in \mathscr{E}'$ e $U : \mathscr{C}_0^\infty \longrightarrow \mathscr{C}_0^\infty$ tali che $U\varphi = u * \varphi$. Allora U è continua su ogni compatto K ossia $\forall\, p\ \exists L\ \exists q\ \exists C$ tali che $\forall\, \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha che*

$$\sup_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \le p}} \left| \partial^\alpha U\varphi(x) \right| \le C \sup_{\substack{x \in L \\ |\beta| \le q}} \left| \partial^\beta \varphi(x) \right|.$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$|\partial^\alpha (u * \varphi)(x)| = |\langle u(y), \partial^\alpha \varphi(x-y) \rangle|.$$

Sia ora r l'ordine di u e H un compatto che ne contenga il supporto. Notiamo che se $x \in K$ e $y \in H$ allora $x - y \in L = K - H$. Adesso, per $|\gamma| \le r$ si ha che

$$\sup |\partial^\gamma \partial^\alpha \varphi(x-y)| \le \sup_{|\beta| \le p+r} |\partial^\beta \varphi(x)|$$

che è quello che volevamo, dove $q = p + r$. □

Teorema 22.6. *Sia $U : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ tale che:*

(1) *U è lineare;*
(2) *U è continua;*
(3) *$U(\tau_a \varphi) = \tau_a (U\varphi)$.*

Allora $\exists!\, u \in \mathscr{E}'$ tale che $U\varphi = u * \varphi\ \ \forall\, \varphi \in \mathscr{D}$.

Dimostrazione. Dimostriamo l'unicità[17]. Si ha che

$$U\varphi(0) = (u * \varphi)(0) = \langle u, \check{\varphi} \rangle = \langle \check{u}, \varphi \rangle$$

ma se, per assurdo, avessimo $u \ne v$ avremmo che il calcolo qui sopra ci porterebbe a $\langle \check{v}, \varphi \rangle$. Poichè $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}$ deve valere $\langle \check{u}, \varphi \rangle = \langle \check{v}, \varphi \rangle$ allora $u \equiv v$.
Adesso passiamo all'esistenza: bisogna dimostrare che $U\varphi(0) = \langle u, \varphi \rangle$ ossia che esiste questa distribuzione e quindi che $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}$ si abbia che

$$|\langle v, \varphi \rangle| = |U\varphi(0)| \le C \sup_{\substack{x \in L \\ |\beta| \le q}} |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

Se dimostriamo questo allora v è una distribuzione con supporto in L e quindi a supporto compatto. Sia adesso $a \in \mathbb{R}^n$. Si ha che

$$\begin{aligned} U\varphi(a) &= \tau_{-a}(U\varphi)(0) = [U(\tau_{-a}\varphi)](0) = \langle v, \tau_{-a}\varphi \rangle = \underbrace{\langle \check{v}, \tau_a \check{\varphi} \rangle}_{(\square)} = \\ &= \langle \check{v}(y), \varphi(a-y) \rangle = \langle \check{v} * \varphi \rangle(a). \end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo potuto scrivere $(\square)$ perchè

$$\langle v, \tau_{-a}\varphi \rangle = \langle v(y), \varphi(a+y) \rangle = \langle v(-y), \varphi(a-y) \rangle = \langle \check{v}, \check{\varphi}(y-a) \rangle = \langle \check{v}, \tau_a \check{\varphi} \rangle.$$

---

[17] Sfrutteremo il fatto che $(u * \varphi)(0) = \langle u(y), \varphi(-y) \rangle \Longrightarrow \langle u, \varphi \rangle = (u * \check{\varphi})$.

In definitiva abbiamo trovato che $\check{v} = u$. □

23. Venerdì 23.11.2012 - Proprietà algebriche della convoluzione e ipoellitticità di operatori a coefficienti costanti

Mostriamo qui un teorema riguardante il prodotto di due convoluzioni, il quale acquisisce senso sotto determinate ipotesi.

Teorema 23.1. *Siano $u, v \in \mathscr{E}'$. Allora $\exists!\, w$ tale che $w = u * v$ ossia $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}$*

$$\begin{gathered} u * (v * \varphi) = w * \varphi = (u * v) * \varphi \\ \operatorname{supp} w \subset \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v \end{gathered} \tag{68}$$

Dimostrazione. Siano $U, V : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}$ tali che $U\varphi = u * \varphi$ e $V\varphi = V * \varphi$. Poniamo $W = U \circ V$. Si ha che, per costruzione, W è invariante per traslazioni. Vogliamo mostrare anche che è lineare e continua così da poter usare l'ultimo teorema della sezione precedente. W è continua perchè per ogni compatto K si ha

$$\sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\le p}} |\partial^\alpha [U(V\varphi)](x)| \le \sup_{\substack{x\in L_1\\ |\beta|\le q_1}} |\partial^\beta V\varphi(x)| \le \sup_{\substack{x\in L_2\\ |\gamma|\le q_2}} |\partial^\gamma \varphi(x)|.$$

Allora, come anticipato, per il teorema della sezione precedente, $W : \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}'$ ed è una convoluzione. Passiamo a vedere che legame c'è tra i supporti. Al momento abbiamo

$$\langle (u * v), \varphi \rangle = ((u * v) * \check{\varphi})(0) = (u * (v * \check{\varphi}))(0)$$

dove, per far si che quello che scriviamo non perda senso, supponiamo l'ultima quantità scritta non nulla. Di conseguenza $0 \in \operatorname{supp}(u * (v * \check{\varphi}))$ e ci chiediamo se quest'ultimo sia contenunto in $\operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v + \operatorname{supp} \check{\varphi}$. Si ha che

$$0 \in \operatorname{supp}(u * (v * \check{\varphi})) \Longrightarrow \begin{cases} \exists\, x \in \operatorname{supp} u \\ \exists\, y \in \operatorname{supp} v \\ \exists\, z \in \operatorname{supp} \check{\varphi} \end{cases} \Longrightarrow x + y - z = 0 \Longleftrightarrow z = x + y$$

e questo implica che

$$\begin{cases} z \in \operatorname{supp} u \\ z \in \operatorname{supp} v \end{cases} \Longrightarrow 0 \in \operatorname{supp} u + \operatorname{supp} v + \operatorname{supp} \check{\varphi}.$$

□

Proposizione 23.1. *Siano $u, v, w \in \mathscr{D}'$ e i rispettivi supporti formino una terna convolutiva. Allora*

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Teorema 23.2. *Siano $u, v \in \mathscr{E}'$. Allora*

$$u * v = v * u.$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $u * (v * \varphi) = v * (u * \varphi)$. Prima di buttarci nei calcoli, notiamo che, prese $\varphi, \psi \in \mathscr{C}_0^\infty$, saranno gli unici oggetti su cui dovremo usare la commutatività. Per definizione abbiamo

$$\begin{gathered} u * (v * \varphi) = (u * v) * \varphi \\ v * (u * \varphi) = (v * u) * \varphi \end{gathered}$$

e partendo dalla prima di queste due identità troviamo che

$$\begin{aligned} \langle (u * v), \varphi \rangle &= (u * v * \varphi * \check{\psi})(0) = (\text{associatività}) = (u * (v * \varphi) * \check{\psi}) = u * \check{\psi} * (v * \varphi) = \\ &= (u * \check{\psi}) * (v * \varphi) = (v * \varphi) * (u * \check{\psi}) = v * \varphi * (u * \check{\psi}) = v * (u * \check{\psi}) * \varphi = \\ &= (v * u) * \check{\psi} * \varphi = (v * u) * \varphi * \check{\psi}. \end{aligned}$$

□

Teorema 23.3. *Siano $u \in \mathscr{E}'$ e $v \in \mathscr{D}'$. Allora*

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \langle u, \check{v} * \varphi \rangle \tag{69}$$

Dimostrazione. E' solo questione di calcoli:

$$\langle u * v, \varphi\rangle = (u * v * \check{\varphi})(0) = (u * (v * \check{\varphi}))(0)$$
$$\langle u, \check{v} * \varphi\rangle = (u * v * \check{\varphi})(0) = (u * (v * \check{\varphi}))(0).$$

□

Esercizio 23.1. *Valgono le seguenti uguaglianze* $\forall\, u \in \mathscr{D}'$.

d_id

$$\boxed{\begin{array}{c} \delta * u = u \\ \delta_a u = \tau_a u \\ (\partial^\alpha \delta) * u = \partial^\alpha u \end{array}} \tag{70}$$

Dimostriamolo. Prendiamo $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$*: abbiamo le seguenti uguaglianze, di cui la prima sussiste per definizione.*

$$(\delta_a * \varphi)(x) = \langle \delta_a(y), \varphi(x-y)\rangle = \varphi(x-a) = \tau_a \varphi.$$

Invece adesso prendiamo $u \in \mathscr{D}'$*. Si ha che*

$$\begin{aligned}(\delta_a * u)(x) &= \langle \delta_a * u, \varphi\rangle = \langle u * \delta_a, \varphi\rangle = \langle u, \check{\delta}_a * \varphi\rangle = \langle u, \delta_{-a} * \varphi\rangle = \\ &= \langle u, \tau_{-a}\varphi\rangle = \langle \tau_a u, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Poi abbiamo che

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha \delta * \varphi) &= \langle \partial^\alpha \delta_y, \varphi(x-y)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \delta_y, \partial_y^\alpha \varphi(x-y)\rangle = \\ &= \langle \delta_y, \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\rangle = \partial_x^\alpha \varphi(x)\end{aligned}$$

ed infine

$$\begin{aligned}\langle (\partial^\alpha \delta) * u, \varphi\rangle &= \langle u * \partial^\alpha \delta, \varphi\rangle = \langle u, (\check{\partial^\alpha} \delta) * \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha \delta * \varphi\rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial_x^\alpha \varphi\rangle = \langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

Esempio 23.1 (**Sulla non commutatività causata dai supporti**). *Calcoliamoci* $(1 * \delta) * H$ *con*

$$\operatorname{supp} 1 = \mathbb{R} \qquad \operatorname{supp} \delta = \{0\} \qquad \operatorname{supp} H = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

e si osservi che questi supporti sono a due a due convolutivi ma non lo è la terna nel complesso. Si ha che

$$(1 * \delta)' * H = 1' * H = 0$$
$$1 * (\delta * H)' = 1 * H' = 1 * \delta = 1$$

e come si può vedere non c'è commutatività.

Esercizio 23.2. *Sia* $T = VP\frac{1}{x}$ *e ci chiediamo chi sia* $\mathscr{F}\, T$*. Si ha che* $xVP\frac{1}{x} \in \mathscr{S}'$ *e su di esso ha senso svolgere i calcoli:*

$$\langle xVP\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} x\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx$$

e di conseguenza $xVP\frac{1}{x} = 1$ *e quindi* $\mathscr{F}(xT) = \mathscr{F}(1) = 2\pi\delta$*. Si osservi che più in generale*

$$\mathscr{F}(x\varphi)(\xi) = i\,\partial_\xi \mathscr{F}(\varphi)(\xi) \Longrightarrow \partial_\xi \hat{T}(\xi) = -2\pi i \delta \Longrightarrow \hat{T}(\xi) = -2\pi i H + C$$

e poichè $VP\frac{1}{x}$ *è dispari si ha che*

$$-2\pi i H + C = \begin{cases} C - 2\pi i & \xi > 0 \\ C & \xi < 0 \end{cases} \Longrightarrow -2\pi i H + C = -C \Longrightarrow C = \frac{2\pi i}{2} = \pi i.$$

In definitiva si ha

$$-2\pi i H + C = \begin{cases} C - 2\pi i & \xi > -\pi i \\ C & \xi < \pi i \end{cases} \qquad \hat{T} = (2H+1)\pi i.$$

Esercizio 23.3. *Siano*

$$P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha \qquad p(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha.$$

Supponiamo che $u \in \mathscr{E}'$ *e che* $Pu = 0$*. Ne consegue che* $p(\xi)\hat{u}(\xi) \equiv = 0$*, ma poichè anche* $\hat{u} \in \mathscr{C}_0^\infty$*, gli zeri di* u *formano un insieme magro e quindi* $u = 0$ *per q.o.* x*. Concludiamo che* $u \equiv 0$ *è l'unica soluzione se pretendiamo che debba essere a supporto compatto.*

Esercizio 23.4. *Supponiamo* $P = \{\xi : P(\xi) = 0, \xi \in \mathbb{R}^n\} = \{0\}$ *e*

$$\ker_{\mathscr{S}'} u = \{u \in \mathscr{S}' : Pu = 0\}.$$

Chi è u? Vedremo che si tratta del laplaciano il quale ha $P = \xi_2 + \xi_2^2$ *e* $\operatorname{supp}_{\mathbb{R}} \Delta = \{0\}$. *Si ha che* $p(\xi)\,\hat{u}(\xi) = 0$ *con* $p(\xi) = 0$ *e* $\operatorname{supp} \hat{u} = \{0\}$ *ossia la trasformata di u è nulla tranne nell'origine. Da qui si ricava che*

$$\hat{u}(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha \partial^\alpha \delta$$

Definizione 23.1 (**Soluzione fondamentale**)**.** *Sia*

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha.$$

E' detta soluzione fondamentale una $E \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ *se* $P(E) = \delta$.

Proposizione 23.2. *Sia* $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. *Se* $Pu = f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ *allora anche* $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.[18]

Dimostrazione. Prendiamo al solito una $\varphi \in \mathscr{D}$ tale che $\varphi \equiv 1$ se $|x| \le 1$ e definiamo $\psi = p(\varphi E) - \delta$. Ma

$$p(\varphi E) = \varphi P(E) + \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \sum_{\substack{|\beta| \le \alpha \\ \beta \ne 0}} (\dots)\,\partial^\alpha \varphi\, \partial^{\alpha-\beta} E$$

e osserviamo che, per come è costruita, $\psi \in \mathscr{C}^\infty$; lo è anche in un intorno dell' origine dove abbiamo $\psi(0) = 0$. Poichè è anche a supporto compatto se ne deduce che $\psi \in \mathscr{D}$.
Sia ora $u \in \mathscr{D}'$ tale che $Pu \in \mathscr{C}^\infty$. Ma

$$u = \delta * u = (P(\varphi E) - \psi) * u = P(\varphi E) * u - \psi * u = \varphi P(E) * Pu - \psi * u \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \varphi E \in \mathscr{E}' \Longrightarrow \varphi E * Pu \in \mathscr{C}^\infty \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^\infty.$$

□

24. Martedì 27.11.2012 - Relazioni tra convoluzione e trasformata, spazi di Sobolev ad esponente reale

Teorema 24.1. *Si ha che*

$$\mathscr{F}(u * v) = \hat{u} \cdot \hat{v} \tag{71}$$

in due casi ossia se

1. *u e v appartengono, come coppia, ad* $L^1 \times L^1$;
2. *oppure appartengono ad* $\mathscr{E}' \times \mathscr{S}'$.

Dimostrazione. Partiamo dal primo caso. Si ha che

$$\widehat{u * v}(\xi) = \int e^{-ix\xi} \left(\int u(y) v(x-y) dy \right) d\xi$$

e osserviamo che

$$\left| u(y) v(x-y) e^{-ix\xi} \right|$$

è sommabile su $\mathbb{R}^{2n}_{x,y}$: possiamo applicare Fubini e allo stesso tempo poniamo $z = x - y$ così da avere

$$\iint e^{-i(y+z)\xi} u(y) v(z) dy dz = \int e^{-iy\xi} u(y) dy \int e^{-iz\xi} v(z) dz = \hat{u} \cdot \hat{v}.$$

Passiamo a dimostrare il secondo caso. Supponiamo di avere $u, v \in \mathscr{E}'$. Sappiamo che questo implica $\hat{u}(\xi), \hat{v}(\xi) \in \mathscr{O}_M$. Adesso, guardiamo ξ come se fosse un parametro e scriviamo $\varphi_\xi(x) = e^{-ix\xi}$; per definizione

$$\widehat{u * v}(\xi) = \langle u * v, \varphi_\xi(x) \rangle = \langle u, \check{v} * \varphi_\xi(x) \rangle = (*).$$

Ma

$$(\check{v} * \varphi_\xi(x))(\xi) = \langle \check{v}(y), \varphi_\xi(x-y) \rangle = \langle v(y), \varphi_\xi(x+y) \rangle = \left\langle v(y), e^{-i(x+y)\xi} \right\rangle =$$
$$= e^{-ix\xi} \langle v(y), e^{-iy\xi} \rangle = \hat{v}(\xi) e^{-ix\xi}.$$

[18] Per questo nella condizione di ipoellitticità che abbiamo dato, è equivalente richiedere che $Pu = 0$ e che $Pu \in \mathscr{C}^\infty$.

Adesso, andando a sostituire, troviamo

$$(*) = \left\langle u(x), \hat{v}(\xi) e^{-ix\xi} \right\rangle = \hat{v}(\xi) \left\langle u(x), e^{-ix\xi} \right\rangle = \hat{u}(\xi) \cdot \hat{v}(\xi).$$

Adesso, dando un attimo per buono il prossimo lemma, sulla densità di $\mathscr{E}'$ in $\mathscr{S}'$, abbiamo che: presi $u \in \mathscr{E}'$ e una successione $\mathscr{E}' \ni v_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} v \in \mathscr{S}'$, allora $\mathscr{F}(u * v_j) = \hat{u} \cdot \hat{v}_j$. Ma

$$\begin{cases} \hat{u} \in \mathscr{O}_M \\ \hat{v}_j \in \mathscr{S}' \end{cases} \Longrightarrow \hat{u} \cdot \hat{v}_j \longrightarrow \hat{u} \cdot \hat{v} \in \mathscr{S}'.$$

□

E adesso il lemma.

Lemma 24.1. *Si ha che $\overline{\mathscr{E}'} = \mathscr{S}'$ ossia $\forall\, u \in \mathscr{S}'\ \exists\, u_j \in \mathscr{E}'$ tale che $u_j \xrightarrow{\mathscr{S}'} u$.*

Dimostrazione. Prendiamo una $\psi \in \mathscr{C}_0^\infty$ tale che $\psi \equiv 1$ se $|x| \le 1$ e consideriamo la successione $\psi_j(x) = \psi\left(\frac{x}{j}\right)$. Per come è definita la successione abbiamo che $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}$ $\psi_j \varphi \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi$ in $\mathscr{S}$. Questo significa che $\forall\, p$ si ha $n_p(\varphi - \psi_j \varphi) \longrightarrow 0$. Adesso definiamo $u_j = u(x)\psi\left(\frac{x}{j}\right)$ e ci chiediamo se $u_j \longrightarrow u$. Si ha che $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}$ vale la seguente maggiorazione:

$$\begin{aligned} |\langle u_j - u, \varphi \rangle| &= \left| \left\langle \left[1 - \psi\left(\frac{x}{j}\right)\right], \varphi \right\rangle \right| = (\text{per def.}) = \left| \left\langle u, 1 - \psi\left(\frac{x}{j}\right)\varphi \right\rangle \right| \le \\ &\le C n_p\left(\varphi - \psi\left(\frac{x}{j}\right)\varphi\right) \end{aligned}$$

dove l'ulima quantità abbiamo visto s'annulla per $j \to +\infty$. □

Esercizio 24.1. *Siano $\varphi, \psi \in \mathscr{S}$. Allora $\varphi * \psi \in \mathscr{S}$.*
Come lo dimostriamo? Useremo la trasformata di Fourier. Adesso sappiamo che $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi} * \hat{\psi}$ e tale scrittura ha senso perchè $\varphi, \psi \in L^1$; inoltre $\mathscr{F}$ è un'isometria di $\mathscr{S}$ per cui $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \mathscr{S}$. Di conseguenza

$$\hat{\varphi} \cdot \hat{\psi} \in \mathscr{S} \Longrightarrow \widehat{\varphi * \psi} \in \mathscr{S}$$

e, ancora per il fatto che la trasformata è un'isometria, abbiamo $\varphi * \psi \in \mathscr{S}$.
Osserviamo che $\hat{\varphi} \cdot \hat{\psi} \in \mathscr{S}$ perchè

$$n_p(\varphi\psi) = \sup_{\substack{|\alpha| \le p \\ |\beta| \le p \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| x^\alpha \partial^\beta (\varphi\psi)(x) \right| \le \sup_{\substack{|\beta| \le p \\ |\alpha| \le p}} (x^\alpha \partial^\beta \varphi) \sup_{|\gamma| \le p} |\partial^\gamma \psi|$$

Diamo ora una definizione di spazio di Sobolev generalizzata ossia con esponente $s \in \mathbb{R}$.

Definizione 24.1 (Spazio di Sobolev 2). *Siano $s \in \mathbb{R}$ ed $u \in \mathscr{D}'$. Allora $u \in H^s$ se*

(1) $u \in \mathscr{S}'$, $\hat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$;
(2) $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\, \hat{u}(\xi) \in L^2$.

Osservazione 24.1. *Se prendiamo $s \in \mathbb{N}$ e consideriamo $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) \in L^2$, ciò è equivalente ad affermare, per le proprietà della trasformata, che $\widehat{\partial^\alpha u} \in L^2$. E questo avviene se e solo se $\partial^\alpha u \in L^2$; quindi questa definizione generalizza il caso in cui l'avevamo precedentemente data per $m \in \mathbb{N}$ ed è equivalente nelle richieste per quanto abbiamo appena osservato.*

Si ricordi sempre che

sob_rel_1

$$\boxed{\begin{array}{c} s' < s'' \Longrightarrow H^{s''} \subset H^{s'} \\ u \in H^s \Longrightarrow \partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}. \end{array}} \tag{72}$$

Teorema 24.2. *Gli spazi di Sobolev H^S sono spazi di Hilbert dotati del prodotto scalare*

$$(u, v)_{H^s} := \int (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\, \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)}\, d\xi. \tag{73}$$

Dimostrazione. Preliminarmente osserviamo che la funzione integranda nel prodotto scalare appena introdotto è in L^1. E' evidente, tra l'altro, che si tratta di un prodotto scalare; non resta altro se non controllare che H^s sia completo. In effetti si può semplicemente considerare l'applicazione tale che

$$\begin{array}{ccc} H^s & \longrightarrow & L^2 \\ u & \longmapsto & (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,\hat{u} \end{array}.$$

Si tratta di un'isometria suriettivadi H^s in L^2, ma quest'ultimo è completo e di conseguenza risulterà tale anche H^s.
Per essere più precisi, sia una $f_j \in H^s$ una successione di Cauchy.; allora $g = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f}_j \in L^2$ ed è ancora di Cauchy quindi converge. Adesso sia $(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \in L^2$ e moltiplichiamolo per g: il prodotto sta in $\mathscr{S}'$; di conseguenza $\hat{f} \in \mathscr{S}'$. Questo a sua volta implica che

$$f \in \mathscr{S}' \Longrightarrow f \in H^s \Longrightarrow f_j \xrightarrow{H^s} f$$

□

Adesso un risultato di densità.

Teorema 24.3. *Lo spazio $\mathscr{C}_0^\infty$ è denso in H^m.*

Dimostrazione. L'idea è di dimostrare la densità di $\mathscr{S}$ in H^m; sappiamo già che $\mathscr{C}_0^\infty$ è denso in $\mathscr{S}$ e unendo le due cose si dimostrerà il teorema.
Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}: H^s & \longrightarrow & L^2 \\ u & \longmapsto & (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,\hat{u}(\xi) \end{array}.$$

Per come è definita tale applicazione, ne risultano due conseguenze. La prima è che la sua inversa

$$\mathscr{G}^{-1}(v) = \overline{\mathscr{F}}\left(v(\xi)(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\right)$$

è tale che $\mathscr{G}^{-1}(\mathscr{S})$ è denso in L^2, ma sappiamo che la trasformata di Fourier è per L^2 un'isometria e quindi manda spazi densi in spazi densi. Quindi $\mathscr{G}^{-1}(v) \in \mathscr{S}$ e questo da la densità di quest'ultimo spazio in H^m. Questa è la filosofia: dobbiamo dimostrare che $\exists\, p\ \exists\, C$ tali che $\forall\, \varphi \in \mathscr{S}$ si abbia

$$\|\varphi\|_{H^s} \leq C n_p(\varphi).$$

Si ha che

$$\|\varphi\|_{H^s} = \left\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}\right\|_{L^2} \leq \sup_\xi \left|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+N}\hat{\varphi}(\xi)\right| \left\|(1+|\xi|^2)^{-N}\right\|_{L^2} =$$
$$\leq (4N > n) \leq C n_q(\hat{\varphi}) \leq (q > s+2N) \leq C n_{n+p+1}(\varphi)$$

Siamo riusciti a dimostrare effettivamente che, presa $u \in H^s$, esiste una costante $\varepsilon > 0$ ed esiste una $\varphi \in \mathscr{S}$ tali che

$$\|u-\varphi\|_{H^s} \leq \varepsilon.$$

Poichè sappiamo che $\overline{\mathscr{C}_0^\infty} = \mathscr{S}$, possiamo prendere una successione $\varphi_j \in \mathscr{C}_0^\infty$: ora abbiamo che

$$\|\varphi-\varphi_j\|_{H^s} = \|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}(\hat{\varphi}-\hat{\varphi}_j)\|_{L^2} \leq C n_p(\varphi-\varphi_j) \longrightarrow 0.$$

Infine

$$\|u-\varphi_j\| \leq \|u-\varphi\| + \|\varphi-\varphi_j\| \leq \varepsilon \Longrightarrow \overline{\mathscr{C}_0^\infty} = H^s.$$

□

Teorema 24.4. *Sia $s \in \mathbb{R}$ e $u \in H^{-s}$ (dove la u va pensata appartenente al contempo ad $\mathscr{S}'$). Allora l'applicazione tale che*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto & \langle u,\varphi\rangle \end{array}$$

si estende ad un'applicazione lineare e continua su H^s.
Viceversa per ogni applicazione lineare L continua da $H^s \longrightarrow \mathbb{C}$ esiste una $u \in H^{-s}$ tale che $L(v) = \langle u,v\rangle\ \forall\, v \in H^s$.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $u \in H^{-s}$ e consideriamo $\forall \psi \in \mathscr{S}$ $\langle \hat{u}, \psi \rangle$. Ma per definizione $\langle \hat{u}, \psi \rangle = \langle u, \hat{\psi} \rangle$; adesso mandiamo $\psi \longrightarrow \varphi \in \mathscr{S}$ in modo tale che $\hat{f} = \psi$ ossia agiamo con l'antitrasformata. Si ha quindi, a meno di multipli di 2π che

$$\langle u, \hat{\varphi} \rangle = \langle u, \mathscr{F}\mathscr{F}\check{\varphi} \rangle = \langle \mathscr{F} u, \mathscr{F}\check{\varphi} \rangle = \left\langle \hat{u}(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}, \mathscr{F}\check{\varphi}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \right\rangle$$

dove il primo termine sta in L^2 per definizione mentre il secondo è il prodotto di un termine in $\mathscr{S}$ per un altro in L^2; quindi tale prodotto è in L^2. Detto questo, l'ultima quantità è minore o uguale a

$$\|u\|_{H^{-s}} \|\varphi\|_{H^s}$$

e questo significa che l'applicazione che manda φ in $\langle u, \varphi \rangle$ è continua in $\mathscr{S}$ rispetto alla norma H^s. Infine, poichè sappiamo essere $\mathscr{S}$ denso in H^s allora l'applicazione si estende in modo continuo a tutto lo spazio H^s.
($\Longleftarrow$) Supponiamo di avere $L : H^s \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continua. Adesso $\forall f \in L^2$ definiamo

$$M(f) := L(w) = L\left[\mathscr{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} f)\right]$$

con $M : L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ lineare e continua. Si ha ora che

$$M(f) = L(w) \leq C\|w\|_{H^s} = C\|f\|_{L^2}$$

dove l'ultima uguaglianza vale per definizione. Ma M è, per costruzione, un'applicazione lineare e continua su L^2 e questo implica che $M \in (L^2)^*$. Questo ci consente di scrivere, grazie a Riesz, $M(f)$ tramite il prodotto di dualità; questo significa che $\forall f \in L^2$ $\exists g \in L^2$ tale che

$$M(f) = \int g(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Detto questo, definiamo u in un certo modo che ci servirà per esprimere g:

$$u = \mathscr{F}[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} g] \in H^{-s} \Longrightarrow (1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} \overline{\mathscr{F}} u = g \in L^2.$$

Siamo adesso nelle condizioni per dimostrare che dato L possiamo trovare $u \in H^{-s}$ tale che $\langle u, \varphi \rangle = L(\varphi)$ $\forall \varphi$. Quindi abbiamo

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle &= \left\langle \mathscr{F}\left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} g\right], \varphi \right\rangle = \langle (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} g, \hat{\varphi} \rangle = \langle g, (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi} \rangle = \\ &= \int g(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = M\left((1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi)\right) = \text{(per def.)} = \\ &= \left[\mathscr{F}^{-1}[(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{\varphi}(\xi)]\right] = L(\varphi).\end{aligned}$$

Per densità si raggiunge la tesi. □

25. Mercoledì 28.11.2012 - Proprietà di $H^s(\mathbb{R}^n)$ e di $H^s_{loc}(\Omega)$, relazioni con $\mathscr{C}^m$

Prima di addentrarci nelle questioni afferenti questa sezione, diamo due utili disuguaglianze.

Proposizione 25.1. *Valgono le seguenti stime:*

dis_var (74)
$$\boxed{\begin{array}{ll}(1+|\xi|^2)^s \leq 4^s\left[(1+|\xi-\eta|^2)^s + (1+|\eta|^2)^s\right] & s \geq 0 \\ (1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}\left[(1+|\eta|^2)^s(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}\right] & s \in \mathbb{R}.\end{array}}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima delle due. Per farlo utilizzeremo sostanzialmente due fatti ossia che

$$(a+b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$$

e che $|\xi| \leq |\xi - \eta| + |\eta|$. Mettendole insieme e adattandole aalla quantità che vogliamo maggiorare troviamo che

$$1+|\xi|^2 \leq 1 + 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2) \leq 2[(1+|\xi-\eta|^2) + (1+|\eta|^2)]$$

quindi

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s 2^s[(1+|\xi-\eta|^2)^s + (1+|\eta^2)^s].$$

Passiamo alla seconda disuguaglianza. L'obiettivo è dimostrare che

$$(1+|\xi|^2)^s(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}$$

e poichè, se scambiamo ξ con η, s va in $-s$ ci basta farlo per $s > 0$. Per l'omogeneità in s, lo faremo per $s = 1$ e quindi dobbiamo dimostrare che

$$(1+|\xi|^2) \le 2(1+|\eta|^2)(1+|\xi-\eta|^2).$$

Ma noi sappiamo che $(1+|\xi|^2) \le 1 + 2[|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2]$, quantità che a sua volta è maggiorata da

$$(1+|\xi-\eta|^2)(1+|\eta|^2).$$

□

Teorema 25.1 (**Immersione di Sobolev**). *Sia $u \in H^s$ ed $s > \frac{n}{2}$. Allora è continua e infinitesima ossia*

$$u \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n) \qquad u(x) \overset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Inoltre H^s è un'algebra ossia

$$u, v \in H^s \Longrightarrow uv \in H^s.$$

Dimostrazione. Passiamo alla trasformata di Fourier esprimendola come segue.

$$\hat{u}(\xi) = \left[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,\hat{u}(\xi)\right]\left[(1+|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\right]$$

con il termine nella prima parentesi quadra che sta in L^2 perchè $u \in H^s$ per ipotesi, mentre quello nell'altra, sta anch'esso in L^2 per via della potenza $-\frac{s}{2}$. Il prodotto di due funzioni in L^2 sta in L^1, quindi abbiamo trovato che $\hat{u}(\xi) \in L^1$. Di conseguenza, la funzione, è un risultato noto (Riemann - Lebesgue), sta in $\mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ e decade all'infinito.
Proviamo adesso la seconda affermazione del teorema, ossia che H^s è un'algebra. Prendiamo $u, v \in L^1$. Sappiamo due cose:

$$\begin{cases} u, v \in L^1 \Longrightarrow \overline{\mathscr{F}}(u * v) = \overline{\mathscr{F}}\, u \overline{\mathscr{F}}\, v \\ u, v \in H^s \Longrightarrow \hat{u}\hat{v} \in L^1 \end{cases}.$$

Prendiamo $\widehat{uv}(\xi) = \hat{u}(\eta)\,\hat{v}(\xi-\eta)$. Si ha che

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,|\widehat{uv}(\xi)| &\le \int (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,|\hat{u}(\eta)|\,|\hat{v}(\xi-\eta)|\,d\eta \le \\
&\le \overset{\texttt{dis_var}}{(74)} \le 4^s \left\{ \int \underbrace{(1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\,|\hat{v}(\xi-\eta)|}_{\in L^2}\,\underbrace{[\hat{u}(\eta)]}_{\in L^1}\,d\eta \right\} + \\
&+ 4^s \left\{ \int [(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\,|\hat{u}(\xi)|]\,|\hat{v}(\xi-\eta)|\,d\eta \right\}
\end{aligned}$$

Ma poichè $L^2 * L^1 \subset L^2 \Longrightarrow (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,|\widehat{uv}(\xi)| \in L^2$ e quindi $uv \in H^s$. □

Teorema 25.2. *Supponiamo di avere $s \in \mathbb{R}$, $u \in H^s$ e $\varphi \in \mathscr{S}$. Allora $\varphi\, u \in H^s$.*

Dimostrazione. Se $s > \frac{n}{2}$ siamo nel caso del teorema precedente. Supponiamo invece $s \ge 0$; si ha che $u \in H^s \subset L^2$ e in questo spazio $\widehat{\varphi u} = \hat{\varphi} * \hat{u}$: sfruttiamo questa uguaglianza.

$$\begin{aligned}
\|\varphi\, u\|^2_{H^s} &= \int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{\varphi u}|^2 d\xi = \int (1+|\xi|^2)^s \left(\int \hat{\varphi}(\eta)\,\hat{u}(\xi-\eta)\,d\eta \right) d\xi \le \\
&\le \left(\text{Hölder perchè} \int \hat{\varphi}\,\hat{u}\,d\xi = \int (\sqrt{\hat{\varphi}})(\sqrt{\hat{\varphi}}\hat{u})\,d\xi \right) \le \\
&\le \int (1+|\xi|^2)^s \left(\int |\hat{\varphi}(\eta)|\,d\eta \right) \left(\int |\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right) d\xi \le \\
&\le 2^s \|\hat{\varphi}\|_{L^1} \iint (1+|\eta|^2)^s (1+|\xi-\eta|^2)^s |\hat{\varphi}(\eta)|\,|\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\xi\, d\eta \le \\
&\le C\|\hat{\varphi}\|_{L^1} \int (1+|\eta|^2)^s |\hat{\varphi}(\eta)|\,d\eta \cdot \int (1+|\xi-\eta|^2)|^s\,\hat{u}(\xi-\eta)|^2 d\xi \le \\
&\le C\|\hat{\varphi}\|_{L^1} \|u\|^2_{H^s}
\end{aligned}$$

dove il penultimo integrale è finito perchè $\varphi \in \mathscr{S} \Longrightarrow \hat{\varphi} \in \mathscr{S}$. Quindi abbiamo trovato che

$$\|\varphi\, u\|_{H^s} \le C(\varphi)\|u\|_{H^s} \qquad \forall s > 0.$$

Adesso consideriamo $u \in H^{-s}$. Si ha che

$$|\langle \varphi\, u, v\rangle| = |\langle u, \varphi\, v\rangle| \leq \|u\|_{H^{-s}} \|\varphi\, v\|_{H^s} \leq C(\varphi)\|v\|_{H^s}\|u\|_{H^{-s}}$$

e questo conclude la dimotrazione anche nel caso di H^{-s}. □

Osservazione 25.1. *Se abbiamo α multiindice tale che $|\alpha| = k$ allora*

$$u \in H^s \Longrightarrow \partial^\alpha u \in H^{s-k} \tag{75}$$

inoltre se $s > \frac{n}{2} + k$ allora non solo $\partial^\alpha u \in H^{s-k}$, ma per il teorema di immersione di Sobolev si ha

$$\partial^\alpha u \in \mathscr{C} \qquad H^s \subset \mathscr{C}^k. \tag{76}$$

Questo porta a definire lo spazio

H_infty

$$\boxed{H^\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s \subset \mathscr{C}^\infty} \tag{77}$$

Osservazione 25.2. *C'è una proprietà generale delle distribuzioni di cui siamo già a conoscenza: presi dei $\Omega' \subset \Omega \subset \Omega''$, se $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ allora sarà anche in $\mathscr{D}'(\Omega')$ ossia se si restringe il dominio ove sono definite, le ditribuzioni rimangono tali. Invece, per quelle a supporto compatto, si può anche estendere il loro dominio ossia se $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$ allora $u \in \mathscr{E}'(\Omega'')$.*

Ed ora...nuovi spazi!

Definizione 25.1 **($H^s_{loc}(\Omega)$).** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Una distribuzione $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ è in $H^s_{loc}(\Omega)$ se $\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \Longrightarrow \varphi\, u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Osservazione 25.3. *Osserviamo che che $s > \frac{n}{2}$ allora $H^s_{loc}(\Omega) \subset \mathscr{C}(\Omega)$. Intutitivamente questo è verificabile prendendo un $x \in \Omega$ e un suo intorno $U(x) \subset \Omega$; si sceglie una $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ che valga identicamente 1 in $U(x)$. Allora $\varphi\, u$ ristretta a quest'ultimo è continua.*

Adesso sarà anche possibile definire

$$H^\infty_{loc} := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s_{loc}(\Omega) = \mathscr{C}^\infty(\Omega). \tag{78}$$

Questa soprendente uguaglianza tra spazi è dovuta al fatto che se prendiamo una $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ e una $\varphi \mathscr{D}(\Omega)$ allora

$$u\varphi \in \mathscr{D}(\Omega) \Longrightarrow u\varphi \in H^s(\mathbb{R}^n)\ \forall\, s \Longrightarrow u \in H^s_{loc}.$$

Infine bisogna notare che se $s > \frac{n}{2} + k$ allora

$$H^s_{loc}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n).$$

Definizione 25.2. *Dato $m \in \mathbb{N}$, si definiscono i seguenti spazi:*

H_m

$$\boxed{\begin{array}{c} H^m(\Omega) := \left\{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\right\} \\ H^{m,p}(\Omega) := \left\{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq p\right\} \end{array}} \tag{79}$$

Esercizio 25.1. *Sia $u \in \mathscr{E}'^{(k)} := \{u \in \mathscr{E}', \mathrm{Ord}\, u \leq k\}$. Vogliamo dimostrare che*

$$\hat{u}(\xi) = \langle u(x), e^{-ix\xi}\rangle \in \mathscr{C}^\infty.$$

Abbiamo la seguente stima:

$$|\langle u(x), e^{-ix\xi}\rangle| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha_x e^{-ix\xi}| \leq C(1+|\xi|^k) = C(1+|\xi|^2)^{\frac{k}{2}}$$

ma osserviamo che

$$(1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \leq C(1+|\xi|^2)^{s+k}$$

solo se $2(s+k) < -n$ ossia per $s < -(\frac{n}{2}+k)$. Di conseguenza risulta $\mathscr{E}'^{(k)} \subset H^s$ e ritroviamo

$$\mathscr{E}' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{E}'^{(k)} \subset \bigcup_{s\in\mathbb{R}} H^s.$$

26. Venerdì 30.11.2012 - Operatori ellittici e equazione di Laplace generalizzata

Proveremo a trovare una soluzione in $\mathbb{R}^n$ per l'equazione

ell (80)
$$\sum_{j,i=1}^{n} \partial_{x_i}\left(a_{ij}(x)\partial_{x_j}\right)u - \lambda u = f$$

e le condizioni in cui lavoreremo sono le seguenti:

(1) A simmetrica ossia $a_{ij} = a_{ji}$;
(2) $a_{ij} \in L^\infty$;
(3) A soddisfi la condizione di ellitticità ossia[19]
$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\overline{\xi_j} \geq C|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione 26.1. *Si osservi come il fatto di avere $a_{ij} \in L^\infty$ condizioni il fatto che, come vedremo in seguito, non potremo portare dentro i ∂_{x_i}, cosa che avremmo potuto fare in presenza di maggiore regolarità.*

Lemma 26.1. *Sia in H^1 il prodotto scalare*

(81)
$$(u,v)_* := \sum_{i,j}\int_{\mathbb{R}^n} a_{ij}\partial_{x_i} u\overline{\partial_{x_j} v}dx + \lambda\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx.$$

Allora
$$(u,v)_* \simeq (u,v)_{H^1}.$$

Dimostrazione. Si ha
$$\|u\|_*^2 = \sum_{i,j}\int (a_{ij}u_{x_i}\overline{u_{x_j}} + \lambda|u|^2)dx \geq (\text{coercività}) \geq C\int\left[\sum_i |u_{x_i}|^2 + \lambda|u|^2\right]dx \geq$$
$$\geq \min\{\lambda, C\}\|u\|_{H^1}^2$$

ma si ha anche
$$(u,u)_* \leq \Lambda\int(|Du|^2 + \lambda|u|^2)dx.$$

Si osservi che abbiamo usato il fatto che l'ipotesi di ellitticità implica la coercività. □

Teorema 26.1. *Sia $\lambda > 0$. Allora $\forall f \in H^{-1}$ $\exists! u \in H^1$ soluzione di (80).*

Dimostrazione. Consideriamo f fissata e prendiamo l'applicazione tale che
$$H^1 \ni v \longmapsto (f,v)_{H^{-1},H^1}.$$

Ma osserviamo che H^1 è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare $(,)_*$ e quindi, per Riesz, esiste un $w \in H^1$ tale3 che $(f,v)_{H^{-1}H^1} = (v,w)_*$ $\forall v \in H^1$. Questo significa che per ogni $\varphi \in \mathscr{D}$ si ha
$$\langle f,\varphi\rangle_{H^{-1},H^1} = \int\left(\sum_{i,j} a_{ij}\varphi_{x_i}\overline{w_{x_j}}\right)dx + \lambda\int\varphi\bar{w}dx = \left\langle -\sum_{i,j}\partial_{x_i}(a_{ij}\overline{\partial_{x_j} w}) + \lambda\bar{w},\varphi\right\rangle =$$
$$= \langle Aw - \lambda w,\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle$$

ma a questo punto sfruttiamo il fatto che $\overline{\mathscr{D}} = H^1$ e concludiamo che $Aw - \lambda w = f$. □

Osservazione 26.2. *Supponiamo di avere $\Delta u - \lambda u = f$ con $f \in H^s$. Cosa possiamo dire di u? Applichiamo la trasformata di Fourier così da avere*
$$i^2|\xi|^2\hat{u} - \lambda\hat{u} = \hat{f} \Longrightarrow \hat{u}(\xi) = \frac{1}{\lambda + |\xi|^2}\hat{f}(\xi) \in \mathscr{S}'.$$

Di conseguenza
$$(1+|\xi|^2)^{\frac{s+2}{2}}|\hat{u}(\xi)| = \overbrace{\underbrace{\frac{1+|\xi|^2}{\lambda+|\xi|^2}}_{\in L^\infty}(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}|\hat{f}(\xi)|}^{\in L^2} \Longrightarrow u \in H^{s+2}.$$

[19] Ricordiamo che $\Lambda|\xi|^2 \geq \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\overline{\xi_j}$.

Torniamo, a livello formale, ai polinomi caratteristici associati agli operatori differenziali. Sia

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha D^\alpha \qquad D_i := \frac{1}{i}\partial_{x_i}$$

e vediamo cosa accade quando applichiamo la trasformata di Fourier:

$$\widehat{P(D)} = \frac{1}{i} i\xi_i \hat{u}(\xi) = \xi_i \hat{u}(\xi)$$

quindi ricordando che i polinomi caratteristici erano i $p(\xi) = \sum a_\alpha \xi^\alpha$ si ha

$$\widehat{P(D)}u(\xi) = \sum_\alpha \widehat{a_\alpha D^\alpha u}(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = p(\xi)\hat{u}(\xi).$$

Tutto questo ci sarà utile, insieme alla prossima definizione, per dimostrare alcuni risultati riguardanti gli operatori ellittici.

Definizione 26.1. *Un operatore $P(D)$ si dice ellittico se la sua parte principale P_m è tale che*

$$P_m(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \neq 0 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{82}$$

Si osservi che dalla precedente definizione segue che

$$|P_m(\xi)| \ge C|\xi|^m \qquad C = \min_{|\xi|=1} |P_m(\xi)| > 0$$

Teorema 26.2. *Siano P un operatore ellittico e $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Se $p(u) \in \mathscr{C}^\infty$ allora $u \in \mathscr{C}^\infty$.*

Dimostrazione. Sia $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} \chi(\xi) = 1 & |\xi| \le R \\ \chi(\xi) = & |\xi| \ge 2R \end{cases}$$

e definiamo

$$\frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)} \in L^\infty \cap \mathscr{C}^\infty.$$

Ma l'oggetto appena definito sta in $\mathscr{S}'$ e quindi $\exists\, E \in \mathscr{S}' : \hat{E}(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}$. Di conseguenza

$$p(\xi)\hat{E}(\xi) = 1-\chi(\xi) \Longrightarrow P(D)E = \delta - \omega(x)$$

con $\omega(x) \in \mathscr{S}$. Fermiamo ora un attimo la dimostrazione. □

Definizione 26.2. *Sia $P(D)$. Allora la E tale che $P(D)E = \delta - \omega$ è detta parametrice.*

Proposizione 26.1. *La parametrice E è in $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.*

Dimostrazione. Mostreremo che $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \exists\, h \in \mathbb{N}$ tale che $|\alpha| = h$ e $x^\alpha E \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ossia che E è regolare e si mantiene tale anche se noltiplicata per un polinomio di grado arbitrario.
Applicando la trasformata di Fourier troviamo ciò che dovremo valutare ossia

$$\mathscr{F}(D^\beta(x^\alpha E))(\xi) = \xi^\beta[(1-D^\alpha)\hat{E}(\xi)].$$

Ora osserviamo che

$$\frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)} \le C|\xi|^{-m} \qquad |\xi| \ge 2R$$

e quindi, fuori dalla palla,

$$\left|\left(\frac{1}{p(\xi)}\right)'\right| \le \frac{|\xi|^{m-1}}{|\xi|^{2m}} = \frac{1}{|\xi|^{m+1}} \Longrightarrow \left|\left(\frac{1}{p(\xi)}\right)^{(h)}\right| \le \frac{1}{|\xi|^{m+h}}.$$

Adesso si ha

$$|\xi^\beta(1-D^\alpha)\hat{E}| = \left|\xi^\beta - D^\alpha \frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}\right| \le \frac{|\xi|^\beta}{|\xi|^{m+|\alpha|}} = \frac{1}{|\xi|^{m+|\alpha|-|\beta|}}.$$

Ma l'ultima quantità scritta sta in L^1 per $m+h-k > n$; quindi la sua trasformata starà anch'essa in L^1 e questo significa che la funzione è in $\mathscr{C}^k$ $\forall\, k$ e questo conclude. □

Adesso torniamo alla dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Prendiamo una φ tale che $\varphi = 1$ in $|x| \leq 1$ eche sia $\varphi \in \mathscr{D}$.
Si ha

$$P(D)(\varphi E) = \varphi P(D)(E) + \sum_{\beta \neq 0} \partial^{\beta} \varphi \partial^{\gamma} E = \varphi \delta - \varphi \omega + \psi$$

dove $\psi \in \mathscr{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ sta ad indicare la sommatoria. Osserviamo che $\varphi\delta - \varphi\omega = \delta - \varphi\omega$ con $\varphi\omega \in \mathscr{C}_0^{\infty}$. A questo punto usiamo il fatto che la delta di Dirac è elemento neutro rispetto al prodotto di convoluzione e questo ci permette di scrivere

$$u = u * \delta = \underbrace{u * P(D)(\varphi E)}_{p(u) * \varphi E} + (u * \varphi\omega) - (u * \psi)$$

e questo ci permette ti notare che tutti i termini a destra sono in $\mathscr{C}^{\infty}$, anche con $p(u)$ che è in $\mathscr{C}^{\infty}$ per ipotesi; di conseguenza convoluto con φE che sta in $\mathscr{C}_0^{\infty}$ si arriva a $u \in \mathscr{C}^{\infty}$. □

Passiamo ora ad un esercizio significativo.

Esercizio 26.1. *Avviamo questo esercizio con una definizione. Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$. Si dice che T è α-omogenea se*

omog_a (83)
$$\langle T, \lambda^{\alpha} \varphi(\lambda x) \rangle = \langle T, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi, \forall \lambda > 0.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$T\ \alpha - omogenea \iff xT' = (\alpha - 1)T.$$

Partiamo dalla (83) per dimostrare la necessità delle ipotesi. Essa è equivalente a dire che

$$0 = \frac{d}{dx}\langle T, \lambda^{\alpha} \varphi(\lambda x) \rangle = \langle T, \alpha\lambda^{\alpha-1} \varphi(\lambda x) + \lambda^{\alpha} x \varphi'(\lambda x) \rangle = 0$$

ma se è vera per ogni λ, possiamo scegliere $\lambda = 1$ e di conseguenza avere

$$0 = \langle T, \alpha\varphi(x) + x\varphi'(x) \rangle = \langle \alpha T - (xT)', \varphi \rangle = \langle \alpha T - T - xT', \varphi \rangle\ \forall \varphi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle (\alpha - 1)T - xT', \varphi \rangle = 0.$$

Esercizio 26.2. *Dimostriamo ora che se T è α-omogenea allora è di ordine finito.*
Sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^{\infty}(-R, R)$. Sapendo che $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathscr{C}^k}$ e insieme al fatto che T è per ipotesi α-omogenea, si ha che

$$\left|\left\langle T, \varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right\rangle\right| \leq C \left\|\varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right\|_{\mathscr{C}^k}$$

e di conseguenza

$$\left\langle T, \varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right\rangle = \left\langle T, \frac{1}{R^{\alpha}} \varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right\rangle = \langle T, \varphi(x) \rangle R^{\alpha}.$$

Questo ci porta alla prossima maggiorazione:

$$|\langle T, \varphi(x) \rangle| \leq \frac{1}{R^{\alpha}} \left|\left\langle T, \varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right\rangle\right| \leq \frac{1}{R^{\alpha}} \|\varphi\|_{\mathscr{C}^k} = C_R \|\varphi\|_{\mathscr{C}^k}.$$

27. Martedì 4.12.2012 - Operatore traccia per funzioni in H^s su un iperpiano

Vogliamo definire la traccia per funzioni in H^s. Sia $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1}_{x'} \times \mathbb{R}_{x_n}$. Se $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n)$ allora è possibile definire

$$\gamma\varphi(x') = \varphi(x', 0)$$

cioè φ ristretta all'iperpiano x_n. Questo ci consentirà di trovare una soluzione al cosidetto Problema di Dirichlet. Osserviamo che se $\varphi \in L^{\infty}$ allora l'iperpiano $\{x_n = 0\}$ avrebbe misura nulla e non avrebbe più senso definire γ.

Teorema 27.1. *Sia $s > \frac{1}{2}$. Allora l'applicazione $\gamma : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ si estende in modo unico ad un'applicazione continua*

$$\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$$

ed inoltre γ è suriettiva ossia

$$\forall \varphi(x') \in H^{s-\frac{1}{2}}\ \exists \tilde{\varphi} \in H^s : \gamma\tilde{\varphi} = \varphi.$$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che esiste una costante C tale che

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$$

e lo faremo sfruttando la trasformata di Fourier fatta sulle prime $n-1$ variabili.[20] Da qui in poi, inoltre, scriveremo $\varphi(x) = \varphi(x', x_n) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha

$$\varphi(x) = \varphi(x', x_n) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x'\xi' + x_n\xi_n)} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n$$

e quindi

$$\begin{aligned} \gamma\varphi(x) = \varphi(x', 0) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix'\xi'} \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi' d\xi_n = \\ &= (2\pi)^{-n+1} \int e^{ix'\xi'} \left[\frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n\right] d\xi'. \end{aligned}$$

Adesso, applicando la trasformata di Fourier parziale si ha

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma\varphi}(\xi') = \mathscr{F}_{n-1}(\varphi)(\xi', 0) = \mathscr{F}_{n-1}\left\{(2\pi)^{-n-1} \int e^{ix'\xi'} \left[\frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n\right] d\xi'\right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n) d\xi_n. \end{aligned}$$

A questo punto scriviamo

$$\widehat{\gamma\varphi}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\varphi}(\xi', \xi_n)[1 + |\xi|^2]^{\frac{s}{2}} [1 + |\xi|^2]^{-\frac{s}{2}} d\xi_n.$$

Per Cauchy - Schwartz troviamo

$$|\widehat{\gamma\varphi}(\xi')|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int \hat{\varphi}(\xi)^2 [1 + |\xi|^2]^s d\xi_n \cdot \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n;$$

si ha

$$\begin{aligned} \int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n = \int (\underbrace{1 + |\xi'|^2}_{a} + \underbrace{|\xi_n|^2}_{t})^{-s} d\xi_n = \int (a + t^2)^{-s} dt = a^{-s} \int (1 + t^2)^{-s} \sqrt{a} dt = \\ = a^{-s+\frac{1}{2}} \int (1 + t^2)^{-s} dt = \left(s > \frac{1}{2}\right) = C_s < +\infty \end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che

tra_1 (84) $$\boxed{\int (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi_n = C_s (1 + |\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}}$$

tra_2 (85) $$\boxed{|\widehat{\gamma\varphi}(\xi')|^2 \leq \frac{C_s}{4\pi^2} \int \hat{\varphi}(\xi)^2 [1 + |\xi|^2]^s d\xi \cdot \left[(1 + |\xi'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}\right]}$$

Questo ci porta a trovare che

$$\begin{aligned} (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\widehat{\gamma\varphi}(\xi')|^2 \leq \frac{C_s}{4\pi^2} \int \hat{\varphi}(\xi)^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi_n \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \int (1 + |\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} |\widehat{\gamma\varphi}(\xi')|^2 d\xi' \leq \frac{C_s}{4\pi^2} \int \hat{\varphi}(\xi)^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \gamma\varphi \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1}) \end{aligned}$$

e in ultima analisi

$$\|\gamma\varphi\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq \frac{\sqrt{C_s}}{2\pi} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Adesso passiamo alla suriettività dell'operatore traccia: presa $v(x') \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ cerchiamo una $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tale che $\gamma u = v$ o equivalentemente

$$\hat{v}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n.$$

Supponiamo che sia della forma

(86) $$\hat{u}(\xi) = K \frac{(1 + |\xi'|^2)^N \hat{v}(\xi')}{(1 + |\xi|^2)^{N+\frac{1}{2}}}$$

[20] Si tenga a mente che $\mathscr{F}^{-1} = (2\pi)^{-n}\overline{\mathscr{F}}$

dove N e K li sceglieremo successivamente. Partendo dal fatto che u deve essere in H^s, si ha

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^s} &= \int (1+|\xi|^2)^s \hat{u}(\xi)^2 d\xi = K^2 \int (1+|\xi|^2)^s \frac{(1+|\xi'|^2)^{2N} \hat{v}(\xi')^2}{(1+|\xi|^2)^{2N+1}} d\xi = \\ &= K^2 \int (1+|\xi'|^2)^{2N} \hat{v}(\xi')^2 \left[\int (1+|\xi|^2)^{s-2N-1} d\xi_n \right] d\xi' = \\ &= \left(\text{integrabile se } s-2N-1 < -\frac{1}{2} \right) = \\ &= K^2 \int (1+|\xi'|^2)^{2N} \hat{v}(\xi')^2 \left[C_{2N+1-s} (1+|\xi'|^{s-2N-1+\frac{1}{2}} \right] d\xi' \leq \\ &= K^2 C_{2N-1+s} \int (1+|\xi'|^2)^{s-\frac{1}{2}} \hat{v}(\xi')^2 d\xi' < +\infty\end{aligned}$$

e quindi $v \in H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Adesso

$$\gamma u = v \iff \hat{v}(\xi') = \widehat{\gamma u}(\xi') = \frac{1}{2\pi} \int \hat{u}(\xi', \xi_n) d\xi_n$$

dove l'ultima quantità scritta vale

$$\begin{aligned}\frac{K}{2\pi} \int \frac{(1+|\xi'|^2)^N \hat{v}(\xi')}{(1+|\xi|^2)^{N+\frac{1}{2}}} d\xi_n &= \frac{K}{2\pi} (1+|\xi'|^2)^N \hat{v}(\xi') \int (1+|\xi|^2)^{-N-\frac{1}{2}} d\xi_n = \\ &= \frac{K}{2\pi} (1+|\xi'|^2)^N \hat{v}(\xi')^2 C_{N+\frac{1}{2}} (1+|\xi'|^2)^{-N+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = K \frac{C_{N+\frac{1}{2}}}{2\pi} \hat{v}(\xi')^2\end{aligned}$$

Scegliendo $K = \frac{2\pi}{C_{N+\frac{1}{2}}}$ si ha la tesi. □

28. Mercoledì 5.12.2012 - Teorema di condizione sufficiente di ipoellitticità

Richiamiamo ancora una volta alcune notazioni. Avremo rispettivamente l'operatore differenziale

$$P(D) = PD := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \qquad D := \frac{1}{i} \partial_{x_j} \qquad a_\alpha \in \mathbb{C}$$

e il polinomio caratteristico ad esso associato

$$p(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$$

inoltre sussite, per mezzo della trasformata di Fourier la seguente relazione:

$$\widehat{(PD)(u)}(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \hat{u}(\xi) = p(\xi) \hat{u}(\xi).$$

Infine ricordiamo che

$$p^{(\beta)} = \partial^\beta p(\xi) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq \alpha}} a_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \xi^{\alpha-\beta}$$

Eadesso il teorema.

Teorema 28.1. *Supponiamo esistano μ, R, C positivi e tali che $\forall\, \xi$ in $|\xi| > R$ si abbia*

$$|p^{(\beta)}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{\mu}{2}} \leq C|p(\xi)|. \tag{87}$$

Allora $\forall \omega$ aperto, presa $u \in \mathscr{D}'(\omega)$ tale che $P(u) \in \mathscr{C}^\infty \Longrightarrow u \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$.

Prima di passare alla dimostrazione, vediamo alcuni esempi.

Esempio 28.1. *Sia P ellittico ossia tale che $p_m(\xi) \neq 0\ \forall\, \xi \neq 0$. Questo significa che $|p_m(\xi)| \geq C|\xi|^m\ \forall\, |\xi| \geq R$. Risulta evidente che*

$$|p^{(\beta)}(\xi)| \leq C|\xi|^{m-1}$$

e quindi, in questo caso, basta scegliere $\mu = 1$.

Esempio 28.2. *Consideriamo l'operatore del calore ossia l'operatore*

$$P = \partial_t - \partial_x^2 = iD_t - (iD_x)^2 = iD_t + D_x^2 \tag{88}$$

e per questo operatore si ha

$$p(\tau,\xi) = i\tau + \xi^2.$$

Adesso le quantità di nostro interesse saranno

$$|p(\tau,\xi)| = \sqrt{\tau^2+\xi^4} \simeq |\tau| + \xi^2$$

$$\begin{aligned} p^{(\beta)} &= 2\xi & \beta &= (1,0) \\ p^{(\beta)} &= i & \beta &= (0,1) \\ p^{(\beta)} &= 2 & \beta &= (2,0) \end{aligned}$$

e quindi risulta che la direzione peggiroe da stimare è quella in cui $p^{(\beta)} \simeq \xi$: scegliendo $\mu = \frac{1}{2}$ si ha

$$|\xi|(1+\xi^2+\tau^2)^{\frac{1}{4}} \le C(|\tau|+\xi^2).$$

Esempio 28.3. *Considieriamo l'operatore di D'Alembert*

$$P = \partial_t^2 - \Delta_x.$$

Il polinomio caratteristico ad esso associato risulta essere $p(\xi) = \tau^2 - |\xi|^2$ e di conseguenza abbiamo

$$2(1+|\tau|^2+|\xi|^2)^{\frac{\mu}{2}} \le C(\tau^2-|\xi|^2)$$

che è falsa perchè su delle direzioni si può avere $\tau^2 - |\xi|^2 = 0$.

Adesso possiamo occuparci della dimostrazione del teorema.

Dimostrazione. Siano $v \in \mathscr{D}'$ e $\varphi \in \mathscr{D}$. Si ha

$$\begin{aligned} P(D)(\varphi\, v) &= \varphi\, P(D)(v) + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ |\beta|\le m}} \frac{1}{\beta!} D^\beta \varphi\, p^{(\beta)}(Dv) = \\ &= \varphi\, P(D)(v) + \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{\beta!} D^\beta(\varphi) \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \beta\le\alpha}} a_\alpha \frac{\alpha|}{(\alpha-\beta)!} D^{\alpha-\beta}(v) = \\ &= \varphi\, P(D)(v) + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ \beta\le\alpha\\ |\alpha|\le m}} a_\alpha \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} D^\beta \varphi\, D^{\alpha-\beta}(v) \end{aligned}$$

Adesso vogliamo dimostrare chde presa $u \in \mathscr{D}'$ con $P(u) \in H^s_{loc}(\omega)$ ($s \in \mathbb{R}$) allora $u \in H^s_{loc}(\omega)$.
Sia ω' tale che $\overline{\omega'} \subset \omega$ e lo scegliamo come termine di una catena di contenimenti

$$\omega' = \omega_n \subset\subset \omega_{N-1} \subset\subset \cdots \subset\subset \omega_0 = \omega.$$

Fatto questo, fissiamo $\varphi_j \in \mathscr{D}(\omega_j)$ in modo che $\varphi_j = 1$ su ω_{j+1}. In paerticolare partiremo da $\varphi_0 = 1$ su ω_1. Ora

$$\varphi_o\, u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \varphi_0\, u \in H^t$$

ma di quanti ω avremo bisogno? Ossia di quale sarà l'N minimo? Dovra essere tale che $t-(m-1)+(N-1)\mu < s$ fino ad arrivare a $t-(m-1)+N\mu \ge s$.
Questo ci servirà a dimostrare che

$$P^\beta(D)(\varphi_0\, u) \in H^{t-(m-1)}(\mathbb{R}^n) \qquad \beta \neq 0.$$

Dato che $p^{(\beta)}$ è al più un polinomio di grado $m-1$ potremo sfruttare, nella prossima maggiorazione, il fatto che

$$|p^{(\beta)}(\xi)| \le C(1+|\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{89}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)} |\widehat{P^\beta D(\varphi_0\, u)}(\xi)|^2 d\xi &= \int (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)} |p^{(\beta)}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi_0\, u}(\xi)|^2 d\xi \le \\ &\le |p^{(\beta)}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{-(m-1)} \le C. \end{aligned}$$

A questo punto abbiamo

$$PD(\varphi_1\,\varphi_0\,u) = \varphi_1\,PD(\varphi_0\,u) + \sum_{\substack{\beta\neq 0\\ |\beta|\leq m}} \frac{1}{\beta!} D^\beta(\varphi_1) P^\beta D(\varphi_0\,u)$$

dove $D^\beta(\varphi_1)P^\beta D(\varphi_0\,u) \in H^{t-(m-1)}$ se $t-(m-1) < s$. Ma facciamo attenzione al fatto che poichè $\operatorname{supp}\varphi_1 \subset \operatorname{supp}\varphi_0$ allora

$$\varphi_1\,PD(\varphi_0\,u) = \varphi_1\,PD(u)$$

con $PD(u) \in H^s_{loc}$. Quindi abbiamo trovato che $PD(\varphi_1\,u) \in H^{t-(m-1)}$.
Adesso sia $\beta \neq 0$ e dimostriamo che $P^\beta D(\varphi_1\,u) \in H^{t-(m-1)+\mu}$. Questo si verifica perchè

$$\begin{aligned}
&\int (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)+\mu} |\widehat{P^\beta D(\varphi_1\,u)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)+\mu} |p^{(\beta)}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi_1\,u}(\xi)|^2 d\xi \leq \\
&\leq \left(|p^{(\beta)}(\xi)| \leq C|p(\xi)|(1+|\xi|^2)^{-\frac{\mu}{2}}\right) \leq \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)} |p(\xi)|^2 |\widehat{\varphi_1\,u}(\xi)|^2 d\xi
\end{aligned}$$

ma questa è proprio la norma dello spazio nel quale ci trovavamo per ipotesi ossia lo spazio $H^{t-(m-1)}$.
Adesso, più in generale vogliamo dimostrare che

(1) $PD(\varphi_j\,u) \in H^{t-(m-1)+(j-1)\mu}$;
(2) $\forall\,\beta \neq 0\ P^\beta D(\varphi_j\,u) \in H^{t-(m-1)+j\mu}$.

Cominciamo dal primo punto: procederemo per induzione, supponiamo che la cosa sia vera peer j e dimostriamola per $j+1$. Si ha

$$PD(\varphi_{j+1}\,u) = \varphi_{j+1}\,P(D)(\varphi_j\,u) + \sum_{\beta\neq 0} \frac{1}{\beta!} D^\beta(\varphi_{j+1}) P^\beta(D)(\varphi_j\,u)$$

e osserviamo che $\varphi_{j+1}\,P(D)(\varphi_j\,u) \in H^S$ perchè $\varphi_j\,u \in H^S_{loc}$ e $\varphi_{j+1} \in \mathcal{E}'$ e di conseguenza il loro prodotto è in H^s. Sul pezzo restante sfruttiamo l'ipotesi induttiva così da arrivare al fatto che

$$PD(\varphi_{j+1}\,u) \in H^{t-(m-1)+j\mu}.$$

Pssando al secondo punto, bisogna vedere che, per $\beta \neq 0$, si ha $P^\beta(\varphi_{j+1}\,u) \in H^{t-(m-1)+(j+1)\mu}$:

$$\begin{aligned}
&\int (i+|\xi|^2)^{t-(-1)+(j+1)\mu} |\widehat{P^\beta D}(\varphi_{j+1}\,u)(\xi)|^2 d\xi \leq \\
&\leq \int (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)+(j+1)\mu} |p^{(\beta)}(\xi)|^2 |\widehat{\varphi_{j+1}\,u}(\xi)|^2 d\xi \leq \\
&\leq \int (1+|\xi|^2)^{t-(m-1)+j\mu} |\widehat{PD}(\varphi_{j+1}\,u)(\xi)|^2 d\xi \leq \|PD\varphi_{j+1}\,u\|_{H^{t-(m-1)+j\mu}}
\end{aligned}$$

Cosa ci di cono questi calcoli? Che $forall\,\beta \neq 0$ se $t-(m-1)+N\mu \geq s$ allora $P^\beta D(\varphi_N\,u) \in H^s$. Adesso, se si sceglie $\beta = m$ si arriva ad una costante C e $C\varphi_N \in H^s$. Considerando il fatto che $PD(u) \in \mathcal{C}^\infty$ si arriva ad avere $u \in H^s\ \forall\,s$. □

29. Martedì 11.12.2012 - Traccia per funzioni H^1 e disuguaglianza di Poincarè

Prima di procedere con il prossimo importante risultato, ricordiamo che posto

$$H^1_0(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) : u\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

si ha che $\mathcal{C}^\infty_0$ è denso in $H^1_0(\Omega)$ o, per essere più precisi, $H^1_0(\Omega)$ è la chiusura di $\mathcal{C}^\infty_0$ nella norma H^1.

Teorema 29.1 (**Disuguaglianza di Poincarè**). *Sia $u \in H^1_0(\Omega)$ con Ω limitato (contenuto in una striscia $|x_n| \leq R$). Allora*

poinc (90)
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|Du\|_{L^2(\Omega)}.$$

Dimostrazione. Partiamo da $\mathscr{C}_0^\infty$ per poi estendere quello che troveremo ad $H_0^1(\Omega)$ per densità. Sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ e la scriviamo come

$$\varphi(x', x_n) = \int_{-R}^{x_n} \partial_{x_n} \varphi(x', t)\, dt.$$

Adesso si ha

$$|\varphi(x', x_n)|^2 \le \text{(C-S)} \le \left(\int_{-R}^{R} 1 \cdot dt\right)\left(\int_{-R}^{R} |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 dt\right)$$

ed integrando su tutto Ω ritroviamo

$$\iint_\Omega |\varphi(x', x_n)|^2 dx \le 2R \int_{\mathbb{R}^{n-1}_{x'}} dx' \int_{-R}^{R} dx_n \left(\int_{-R}^{R} |\partial_{x_n} \varphi(x', x_n)|^2 dt\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \iint_\Omega |\varphi(x)|^2 dx \le 4R^2 \iint_\Omega |\partial_{x_n} \varphi(x)|^2 dx \le 4R^2 \iint_\Omega |D\varphi|^2 dx$$

□

Adesso ritroniamo a trattare la traccia delle funzioni: avevamo visto che se $s > \frac{1}{2}$ è possibile definire la traccia e in particolare l'operatore $\gamma : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$. Qui vedremo che presa una $u \in H^1(\Omega)$ ha senso definire $\partial u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.
Introduciamo alcune nozioni preliminiari. Supponiamo di avere Ω limitato e consideriamo lo spazio $H^1(\Omega)$. Definiamo a livello formale l'energia come

$$\boxed{B(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_{x_i} u D_{x_i} v\, dx} \tag{91}$$

energy

$$\boxed{E(u) = B(u, u) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |D_{x_i} u|^2 dx} \tag{92}$$

Qui abbiamo una cosa molto particolare: $\sqrt{E(u)}$ non è una norma su $H^1(\Omega)$ ma su $H_0^1(\Omega)$ le cose cambiano.

Teorema 29.2. *Sia $H_0^1(\Omega)$ con Ω limitato. Su tale spazio $B(u, v)$ è un prodotto scalare; inoltre*

$$\sqrt{E(u)} \simeq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{93}$$

e con tale norma $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert.

Dimostrazione. Si ha

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + E(u) \le \text{(Poincarè)} \le$$
$$\le (1 + 2R^2)E(u).$$

Risulta ovvio che $E(u) \le \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$. □

Lemma 29.1. *Sia $u \in H^1(\Omega)$. Allora esiste $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ tale che*

$$B(u, v) = B(\tilde{u}, v) \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dimostrazione. Sia $L(v) = B(u, v)$; vogliamo valutarlo $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$. L è lineare ma è anche continuo dato che

$$L(v) \le \left(\int_\Omega |D_x u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |D_x v|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{E(u)}\sqrt{E(v)}.$$

Ma questo mostra che esiste un $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ tale che $L(v) = B(\tilde{u}, v)\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$. □

Finalmente un risultato sulle equazioni alle derivate parziali. Il prossimo è un teorema di esistenza e unicità per l'equazione di Laplace con condizioni di Dirichlet.

Teorema 29.3. *Sia $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Allora $\exists! u \in H^1(\Omega)$ tale che*

(1)

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases};$$

(2) *u minimizza l'energia ossia* $E(u) \leq E(v)$ $\forall$ v *tali che* $v\big|_{\partial\Omega} = g$.

Dimostrazione. Cominciamo dal primo punto. Sappiamo che $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ed è suriettiva e di conseguenza esiste una u_1 tale che $u_1\big|_{\partial\Omega} = g$. Pre il lemma di cui sopra, consideriamo $\tilde{u}_1$ e definiamo $u = u_1 - \tilde{u}_1$. Anche u ristretta alla frontiera di Ω assumerà valore g dato che $\tilde{u}_1 \in H^1_0$ e quindi $\tilde{u}_1\big|_{\partial\Omega} = 0$. Adesso si ha

$$B(u_1, v) = B(\tilde{u}_1, v)\ \forall\, v \in H^!_0(\Omega) \Longrightarrow B(u, v) = B(u_1 - \tilde{u}_1, v) = 0\ \forall\, v \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow u_1 \equiv \tilde{u}_1 \Longrightarrow \forall\, \varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega)\ B(u,\varphi) = 0 \iff \sum_{i=01}^n \int_\Omega D_i u D_i \varphi\, dx =$$
$$\sum_{i=1}^n \langle D_i u, D_i \varphi\rangle = -\sum_{i=1}^n \langle D_i^2 u, \varphi\rangle = 0$$

e questo significa che $-\Delta u = 0\ \forall\ \varphi$.
Ma u è unica? Supponiamo per assurdo che esistano u' e u'' soluzioni dell'equazione di Laplace; esse hanno la stessa traccia e posto $U = u' - u''$ essa avrà traccia nulla ed inoltre

$$\Delta U = \Delta u' - \Delta u'' = 0 \Longrightarrow 0 = \langle \Delta U, \varphi\rangle = -\sum_{i=1}^n \langle D_i U, D_i \varphi\rangle =$$
$$= -B(U,\varphi)\ \forall\, \varphi = U = 0 \Longrightarrow u' = u''$$

Passiamo ora al secondo punto. Prendiamo $w \in H^1(\Omega)$ tale che $w\big|_{\partial\Omega} = g$. Allora, con u soluzione del problema, si ha $(w-u) \in H^1_0(\Omega)$; ma $w = (w-u) + u$ e sfruttiamo questa scrittura come segue.

$$E(w) = B(w, w) = B((w-u)+u, (w-u)+u) =$$
$$= B(u,u) + \underbrace{B(w-u, w-u)}_{\geq 0} + 2B(w-u, u)$$

con l'ultimo termine nullo perchè u è soluzione del problema per ipotesi. Infine abbiamo trovato che

$$E(w) = E(u) + E(w-u) > E(u).$$

□

L'utilizzo dell'energia di consente di definire in maniera alternativa gli spazi H^{-m}. Si ricordi che $u \in H^{-m}(\Omega)$, con Ω limitato, se data $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ allora

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{H^m} \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Possiamo sfruttare l'equivalenza dell'energia con la norma di H^1_0 per definire in un modo alternativo il suo duale.

Definizione 29.1. *Sia* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *con* Ω *limitato (quindi* $f \in H^1_0$*). Lo spazio* $H^{-1}(\Omega)$ *è definito come*

$$H^{-1}(\Omega) := \left\{ f \in \mathscr{D}(\Omega) : |\langle f, \varphi\rangle| \leq C\sqrt{E(\varphi)}\ \forall\, \varphi \in \mathscr{D} \right\}. \tag{94}$$

Osservazione 29.1. *Si noti che* $f \in L^2(\Omega)$ *allora* $f \in H^{-1}(\Omega)$. *Questo si ha perchè*

$$|\langle f, \varphi\rangle| = \int_\Omega f\varphi\, dx \leq \|f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2} \leq (\textit{Poincarè}) \leq \|f\|_{L^2}\sqrt{E(\varphi)}.$$

Osservazione 29.2. *Si ha anche che se* $f \in L^2(\Omega)$ *allora anche* $\partial_{x_i} f \in H^{-1}$. *Si ha*

$$|\langle \partial_i f, \varphi\rangle| = |\langle f, \partial_{x_i}\varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^2}\|D\varphi\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}\sqrt{E(\varphi)}.$$

Questa piccola parentesi ci servirà nel prossimo teorema.

Teorema 29.4. *Si ha che*

$$\forall\, f \in H^{-1}(\Omega)\ \exists!\, u \in H^1_0(\Omega) \Longrightarrow \Delta u = -f \tag{95}$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_0^\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & \langle f, \varphi \rangle \end{array}$$

che è lineare e continua su H_0^1 rispetto alla norma $\|\varphi\| = \sqrt{E(\varphi)}$. Sappiamo che $\overline{\mathscr{C}_0^\infty} = H_0^1$ e quindi l'applicazione è estendibile ad una $L(u)$ lineare e continua su H_0^1; quindi esiste una $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $L(v) = B(u,v)\ \forall\, v \in H_0^1$ e questo significa che $\forall\ \varphi \in \mathscr{D}$ si ha

$$L(\varphi) = B(u,\varphi) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega D_{x_i} u D_{x_i} \varphi = -\langle \Delta\, u, \varphi \rangle$$

e quindi deduciamo che $f = -\Delta\, u$. □

Corollario 8. *Sia $f \in H^{-1}(\Omega)$. Allora $f \in L^2(\Omega)$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente data f troviamo $u \in H_0^1$ tale che $\Delta\, u = -f$ ma allora

$$- = -\sum_{i=1}^n D_{x_i}^2 u = -\sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(\partial_{x_i} u)$$

quindi f è somma di derivate di una funzione in L^2 e di conseguenza anch'essa è in L^2. □

Corollario 9. *Si ha che $\forall\, f \in H^{-1}(\Omega)$ e $\forall\, g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ $\exists! u$ tale che*

$$\begin{cases} \Delta\, u = f \\ u\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases} . \tag{96}$$

Dimostrazione. Basta prendere u_1 e u_2 tali che una soddisfi l'equazione di Poisson con dati al bordo nulli, mentre l'altra soddisfi il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace ossia

$$\begin{cases} \Delta\, u_1 = f \\ u_1\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta\, u_2 = 0 \\ u_2\big|_{\partial\Omega} = g \end{cases}$$

e la soluzione sarà la loro sovrapposizione cioè $u = u_1 + u_2$. □

30. Mercoledì 12.12.2012 - Trasformata di Fourier parziale, problema di Cauchy per l'equazione delle onde e per equazioni iperboliche

Introduciamo ora uno strumento di non difficile comprensione: la trasformata di Fourier. Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$. Si ha che se $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \Longrightarrow \forall\ t\ \varphi(t,\cdot) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Quindi possiamo ancora definire una $\mathscr{F}' : \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1}) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ e quindi definire una

$$\tilde{\varphi}(t,\xi) = \int \varphi(t,x) e^{-ix\xi}\, dx$$

ossia effettuare la trasformata solo su una variabile. Osserviamo che, anche in questo caso, se $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1})$ allora $\mathscr{F}'\, u = \tilde{u}$ e $\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \langle u, \tilde{\varphi} \rangle$. Diamo qualche esempio.

Esempio 30.1. *Valgono le seguenti identità.*

$$\mathscr{F}'(\partial_x^\alpha\, u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha\, \mathscr{F}'(u)$$

$$\mathscr{F}'(\partial_t^k\, u) = \partial_t^k\, \mathscr{F}'(u)$$

$$\mathscr{F}'(x^\alpha\, u) = i^{|\alpha|}\, \partial_\xi^\alpha\, \mathscr{F}'(u)$$

$$\mathscr{F}'(t^k u) = t^k\, \mathscr{F}'(u)$$

Esempio 30.2. *Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^{n+1}$; com'è fatta $\mathscr{F}'(\delta)$? Basta ricordare che per definizione si ha*

$$\langle \tilde{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \tilde{\varphi} \rangle = (t = \xi = 0) = \int \varphi(0,x)\, dx.$$

Adesso consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione delle onde con dominio in $\mathbb{R}^n$:

$$(97)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) \end{cases}.$$

Utilizziamo latrasformata di Fourier parziale, fatta rispetto alle variabili spaziali così da avere

$$v(t,\xi) = (\mathscr{F}_x(t,x)(\xi)) \Longrightarrow \begin{cases} v'' + |\xi|^2 v = 0 \\ v(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \\ v'(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases}.$$

Si osservi che abbiamo potuto usare la trasformata di Fourier, seppur parziale, per il fatto che il dominio è per ipotesi tutto $\mathbb{R}^n$; questo non sarebbe stato più possibile se avessimo avuto un Ω limitato qualsiasi. A questo punto la soluzione del problema di Cauchy associato a quello iniziale sarà

$$v(t,\xi) = a(\xi)\cos(|\xi|t) + v(\xi)\sin(|\xi|t)$$

e imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali si trova

$$a(\xi) = \hat{u}_0(\xi) \qquad |\xi|b(\xi) = \hat{u}_1(\xi)$$

e quindi

$$v(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\cos(|\xi|t) + \frac{\hat{u}_1(\xi)}{|\xi|}\sin(|\xi|t).$$

Osserviamo che, se $u_0 \in H^1$, per ogni tempo t fissato $u(t,\cdot) \in H^1(\mathbb{R}^n)$; inoltre se guardiamo

$$v'(t,\xi) = -|\xi|\hat{u}_0(\xi)\sin(|\xi|t) + \hat{u}_1(\xi)\cos(|\xi|t)$$

ci accorgiamo che $u_t \in L^2$.
Se proviamo a considerare l'equazione del calore

$$(98)\qquad \begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

calcoli analoghi ci portano al sistema

$$\begin{cases} v' + |\xi|^2 v = 0 \\ v(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}$$

che ha come soluzione

$$(99)\qquad v(t,\xi) = e^{-|\xi|^2 t}\hat{u}_0(\xi).$$

Di conseguenza $u(t,x) \in \cap_s H^s\ \forall s$ e quindi per $t > 0$ si ha $u \in \mathscr{C}^\infty$.

31. Appendice A: Topologie

Qui di seguito diamo una breve carrellata di topologie nelle quali ci siamo imbattuti, specificando anche il senso della notazione utilizzata.

- **Topologia forte**
  È indotta dalla norma presente sullo spazio X, un sistema fondamentale di intorni è dato dalle palle aperte centrate in zero e di raggio intero. Questa topologia è T2, essendo definita $d(x,y) = \|x-y\|$ distanza su X. Convergenza significa *convergenza in norma*, ovvero $x_n \to x$ se $\|x_n - x\| \to 0$.

- **Topologia debole,** $\sigma(X,X^*)$
  È la topologia identificata dal sistema fondamentale di intorni

  $$U(x_0,F_1,\dots,F_n,\varepsilon) = \{x \in X \mid |F_i(x) - F_i(x_0)| < \varepsilon\}$$

  dove $F_1,\dots,F_n$ sono un numero finito di funzionali lineari e continui su X, cioè $F_i \in X^*$. Questa topologia è T2, infatti $\forall x_1,x_2\, \exists \bar{F} \in X^* \mid \bar{F}(x_1) \neq \bar{F}(x_2)$, e dunque $U(x_1,\bar{F},\varepsilon_1), U(x_2,\bar{F},\varepsilon_2)$ sono due intorni che separano i punti x_1,x_2. Costruiamo $\bar{F}$ ed $\varepsilon_1,\varepsilon_2$. Sia $z = x_1 - x_2$, definiamo $M = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ lo spazio generato da z, e $\lambda z \xmapsto{F} \lambda\|z\|$. F è lineare e limitata da

M in $\mathbb{K}$ e dunque, per il Teorema di Hahn-Banach, ammette estensione $\bar{F}$ lineare e continua da X in $\mathbb{K}$. Inoltre $\|\bar{F}\| = \|F\| = \lambda$. Chiamo $\delta = F(x_1) - F(x_2)$ e definisco $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \delta/2$.

- **Sulla notazione**
Abbiamo indicato la topologia debole con il simbolo $\sigma(X, X^*)$. Questa notazione, $\sigma(V, W)$, indica la topologia sullo spazio V indotta dalla scelta di un sistema fondamentale di intorni, dipendenti da elementi dello spazio W. Formalmente $\sigma(V, W)$ è la topologia meno fine fra quelle per cui esiste un isomorfismo tra $(V, \sigma(V, W))^*$ e W. Si può costruire in questo modo: data una forma bilineare $<\cdot,\cdot>$ (nel caso della topologia debole, $x \in X, F \in X^*, < x, F >= F(x)$) definiamo $\forall w \in W$ la seminorma $p_w(v) = | < v, w > |$; la topologia indotta da $\{p_y\}_{y\in Y}$, cioè del sistema fondamentale di intorni $U(v_0, w_1, \dots, w_n, \varepsilon) = \{v \in V \mid \forall i = 1, \dots, n\, p_{w_i}(v_0 - v) < \varepsilon\}$, è equivalente a quella cercata.

- X, X^*, X^{**}
Indichiamo con x gli elementi di X, F le funzioni lineari e limitate da X in $\mathbb{K}$, cioè $F \in \mathscr{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$; F è detto funzionale. Indichiamo con Λ gli elementi di $\mathscr{L}(X^*, \mathbb{K}) = X^{**}$. Indichiamo poi con $\{\Lambda_x\}_{x\in X} \subset X^{**}$ quei particolari elementi del biduale che agiscono come segue: $\Lambda_x(F) = F(x)$. Per non generare confusione si preferisce scrivere x^{**} al posto di Λ_x. Vista la scrittura precedente è naturale considerare la funzione J che identifica $X \ni x \longmapsto x^{**} \epsilon X^{**}$. Osserviamo che $\|x^{**}\| = |F(x)| \le \|F\|\|x\|$, e grazie al Teorema di Hahn-Banach, esiste un funzionale $\bar{F}$ con $\|\bar{F}\| = 1$ e $\bar{F}(x) = \|x\|$; risulta quindi $\|x^{**}\| = \|x\|$. Dalla proprietà $\|v - w\| = 0 \iff v = w$ delle norme, otteniamo l'iniettività di J. In generale J non è surgettivo. Nel caso lo fosse, cioè se ogni elemento del biduale è rappresentato da x^{**} per un certo $x \in X$, definiamo X spazio riflessivo. Dall'algebra lineare sappiamo che ogni spazio finito-dimensionale è riflessivo.
Osserviamo che su tutti questi spazi normati è definita la usuale topologia delle palle aperte. Per non confonderla con le topologie deboli, viene detta "topologia forte".

- **Topologia debole sul duale,** $\sigma(X^*, X^{**})$
Tutti i ragionamenti svolti per la topologia debole si applicano a questo caso, scriviamo solo il sistema fondamentale di intorni:
$$U(F_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n, \varepsilon) = \{F \in X^* \mid \forall i = 1, \dots, n |\Lambda_i(F_0) - \Lambda_i(F)| < \varepsilon\}.$$
- **Topologia $*$-debole,** $\sigma(X^*, X)$
Questa è una nuova topologia sul duale, meno fine della precedente, definita grazie all'esistenza di J. Infatti gli intorni si scrivono come
$$\begin{aligned} U(F_0, \Lambda_{x_1}, \dots, \Lambda x_n, \varepsilon) &= \{F \in X^* \mid \forall i = 1, \dots, n |\Lambda_{x_i}(F_0) - \Lambda_{x_i}(F)| < \varepsilon\} \\ &= \{F \in X^* \mid \forall i = 1, \dots, n |x_i^{**}(F_0) - x_i^{**}(F)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$
Da notare la poca differenza grafica, ma la grande differenza concettuale. La topologia *-debole è T2, per dimostrarlo non è necessario l'utilizzo di un teorema molto potente, come Hahn-Banach (che per essere dimostrato richiede il Lemma di Zorn, equivalente all'Assioma della Scelta) ma la "semplice" definizione di funzione: due funzioni sono uguali se coincidono su tutti i punti.

- **Topologia $*$-debole sul biduale,** $\sigma(X^{**}, X^*)$
Come prima scriviamo il sistema fondamentale di intorni:
$$U(\Lambda_0, F_1, \dots, F_n, \varepsilon) = \{\Lambda \in X^{**} \mid \forall i = 1, \dots, n |\Lambda(F_i^{**}) - \Lambda_0(F_i^{**})| < \varepsilon\}.$$
Con la definizione di questa topologia abbiamo tutti gli strumenti per comprendere l'enunciato del Teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki.

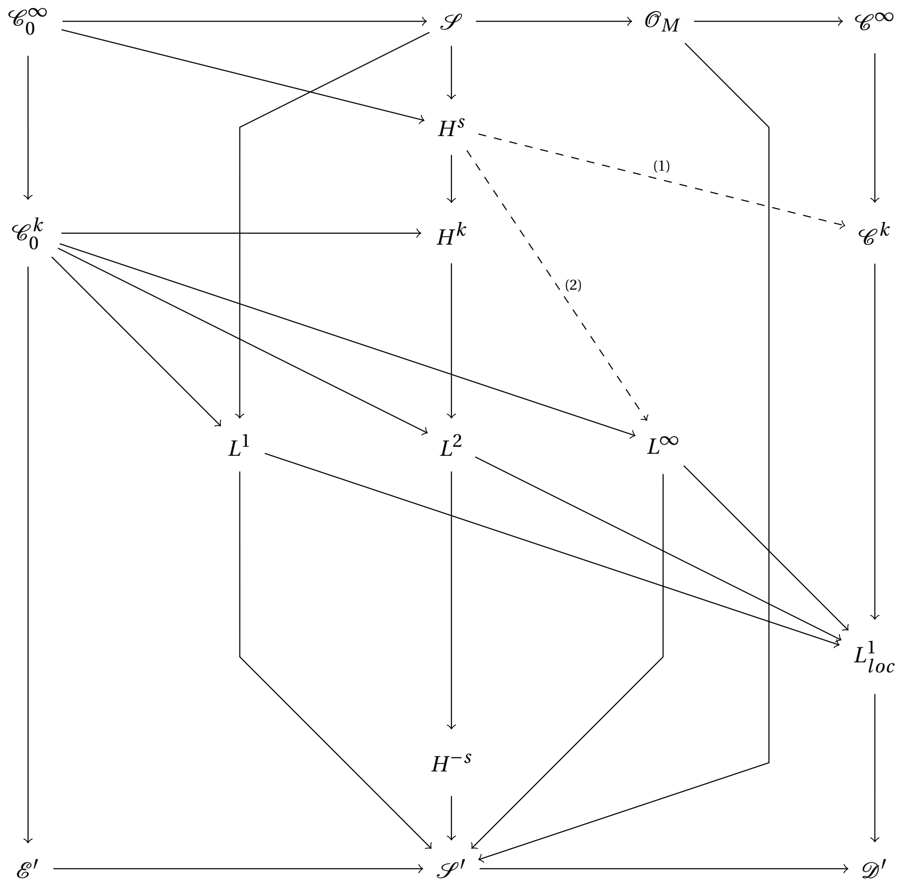
32. Appendice B: Inclusioni tra spazi

Nel seguente schema, k indica un intero ≥ 0 e s un numero reale $\ge k$. Tutti gli spazi sono costruiti su $\mathbb{R}^n$. Una freccia $\mathscr{A} \to \mathscr{B}$ significa che lo spazio $\mathscr{A}$ è contenuto nello spazio $\mathscr{B}$ e l'inclusione è continua. Naturalmente, composizione di due frecce è ancora una freccia, e non viene rappresentata per non appesantire il grafico.

La regolarità decresce leggendo dall'alto verso il basso, e la "piccolezza all'infinito" decresce leggendo da sinistra a destra. Una rappresentazione più precisa avrebbe $\mathscr{S}$ spostato leggermente a sinistra, e $\mathscr{S}'$ spostato leggermente a destra.

Inoltre $L^{\infty}_{loc} \subset L^2_{loc} \subset L^1_{loc}$ sulla verticale sulla destra, mentre non c'è nessuna inclusione tra L^1, L^2 e L^{∞}.

Infine, l'inclusione (1) si ha per $s > k + n/2$, mentre la (2) si ha per $s > n/2$. FINE[21][22]
md



INDICE

[21] Le presenti sono frutto della pazienza e della voglia di riordinare i propri appunti di uno studente, il quale, non garantisce sulla bontà di ciò che vi è in esse scritto. Certamente non sono il migliore strumento di apprendimento presente in giro ma...magari possono tornare utili a qualcuno...

[22] Un ringraziamento a Giulio Masetti per gli innumerevoli suggerimenti e correzioni apportate e ad Oscar Papini per aver scritto il codice del grafico in questa pagina.