Appunti di Fisica Matematica
A.A. 2010-2011

Matteo Di Nunno

7 febbraio 2011

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Le equazioni del corso

1. *Equazione delle Onde* $\partial_{tt}u(x,t) = c^2\Delta u(x,t)$[1] $\forall x \in \mathbb{R}^d$
2. *Equazione del Calore* $\partial_t u(x,t) = D\,\Delta\,u(x,t)$
3. *Equazione di Laplace* $\Delta\,u(x,t) = 0$
4. *Equazione di Poisson* $\Delta u(x,t) + f(x,t) = 0$

Di tali equazioni studieremo la buona positura dei problemi al contorno e ai dati iniziali, derivazioni di natura euristica e conseguente interpretazione fisica. Infine si passerá a costruire le soluzioni fondamentali ad esse associate.

1.2 Classificazione delle PDE del II ordine

Sia $y \in \mathbb{R}^n$ ed $u(y)$ l'incognita. La generica PDE del II ordine avrá una formulazione del tipo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(y)\partial_{y_i}\partial_{y_j}u(y) + \sum_{i=1}^{n} B_i(y)\partial_{y_i}u(y) + c(y)u(y) = f(y)$$

Supponiamo per adesso $f(y) = 0$. In questo caso avremo delle PDE omogenee, per le quali vale il *Principio di Sovrapposizione* in base al quale se abbiamo $u_1(y)$ ed $u_2(y)$ soluzioni di un'equazione, allora $u(y) = \alpha u_1(y) + \beta u_2(y)$ é una nuova soluzione, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Supporremo inoltre,come conseguenza di opportune ipotesi di regolaritá poste su $u(y)$, che $A_{ij} = A_{ji}$. Se questo vale per ogni y allora A é diagonalizzabile e gli autovalori ad essa associati sono tutti reali.

Adesso siano $n_0(y)$ =numero autovalori uguali a 0, $n_+(y)$ =numero autovalori > 0, $n_-(y)$ =numero autovalori < 0. Sia, quindi, $n = n_0 + n_+ + n_-$. Adesso possiamo procedere con la classificazione:

- *Eq. Ellittica* in y se $n_\pm(y) = n$
- *Eq. Parabolica* in y se $n_0(y) > 0$

[1] $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{d} \partial^2_{x_i} u(x,t)$ d=1,2,3

- *Eq. Iperbolica* in y se $n_+(y) = n - 1$ ed $n_-(y) = 1$ o viceversa[2]

Facciamo degli esempi. Sia $y = (x, t)$ ed $x \in R^3$ con $\partial_{tt}u - c^2\Delta u = 0$. Avremo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{L'equazione delle onde é iperbolica in y}$$

Nel caso di $\partial_t u - D\Delta u = 0$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -D \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{L'equazione del calore é parabolica in y}$$

Infine, nel caso di $\Delta u = 0$, non avendo piú la dipendenza da t avremo $y = (x)$ e di conseguenza A assumerá forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{L'equazione di Laplace é ellittica in y}$$

[2]In realtá basta semplicemente la presenza sia di autovalori positivi che di autovalori negativi.

Capitolo 2

L'equazione delle onde

2.1 Soluzioni particolari

Sia d=1. Avremo:

$$\partial_{tt}u(x,t) = c^2\partial_{xx}u(x,t) \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Notiamo la presenza di soluzioni evidenti, in un certo qual senso. Sia $u_0(x)$ e siano $u_\pm(x,t) = u_0(x \mp ct)$. Notiamo che $u_\pm$ sono soluzioni di (2.1).

$$\partial_{tt}u_+(x,t) = \partial_{tt}u_0(x-ct) = \partial_t(-cu_0'(x-ct)) = c^2u_0''(x-ct) = c^2\partial_{xx}u_+(x,t)$$

Queste soluzioni rappresentano, rispettivamente, un'onda viaggiante diretta ed un'onda viaggiante inversa; inoltre esse mostrano la natura propagatoria dell'equazione.

Ma non sono le uniche...abbiamo le Onde Armoniche:

$$u_\pm(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \varphi) \text{ con } k, \omega > 0 \text{ ed } \varphi \in [0, 2\pi]$$

Le $u_\pm$ possono essere poste come $u_\pm(x,t) = A\cos[k(x \mp \frac{\omega}{k}t) + \varphi]$; esse sono soluzioni della (2.1) se $\frac{\omega}{k} = c$. A soluzioni di questo genere sono associati in particolare il *periodo temporale* $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e quello spaziale detto *lunghezza d'onda* $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é il *numero d'onda*.

Sia ora $\bar{u}(x,t) = u_+(x,t) + u_-(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$. Abbiamo sovrapposto due onde viaggianti in direzioni opposte. Tali soluzioni sono dette Onde Stazionarie, le quali hanno natura non propagatoria bensí vibratoria.

2.2 Derivazione euristica dell'equazione della corda vibrante

Al fine di derivare l'equazione sará necessario porre alcune ipotesi sul comportamento del sistema che pretendiamo di poter descrivere. A posteriori riusciremo a convincerci che l'equazione descrive bene fenomeni di tipo ondulatorio del tipo che segue.

Supponiamo una corda unidimensionale, con densitá omogenea ρ_0 , elastica e flessibile. Inoltre poniamo in stato di equilibrio il sistema al tempo iniziale $t =$

0. Adesso prendiamo in considerazione un segmento della corda e mettiamolo sotto sollecitazione: in risposta il segmento vibrerá. Possiamo ipotizzare tali vibrazioni trasversali e piccole. Siano

$$N = (x, 0) \qquad M = (x, u(x, t)) \qquad N' = (x+\Delta x, 0) \qquad M' = (x+\Delta x, u(x+\Delta x, t))$$

La massa di $\overline{MM'}$ é $\rho_0 \Delta x$. Dal fatto che le vibrazioni sono, per ipotesi, piccole e trasversali, segue che $|u(x,t)| \ll 1$ ed $|\partial_x u(x,t)| \ll 1$. Poiché l'oggetto é sollecitato possiamo dedurre la presenza di una forza $F(x,t)$ con intensitá $F(x,t)\Delta x$. Inoltre introduciamo T e T' ovvero la tensione esercitata sul segmento di corda rispettivamente in M ed in M'.

Dalle ipotesi segue che $|\vec{T}| = |\vec{T'}| = \tau_0$ ed in prima approssimazione possiamo porre $\tan \alpha(x,t) = \partial_x u(x,t)$ dove $\alpha(x,t)$ é l'angolo tra il segmento di corda ed $\overline{NN'}$. Ne consegue che:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \simeq 1 \qquad \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \simeq \tan \alpha \simeq \partial_x u$$

Isoliamo un tratto di corda e cerchiamo di ricondurci ad un'equazione del tipo di quella di Newton: affinché la tensione sia sempre la stessa agli estremi si deve avere $|\vec{T'}| \cos \alpha' = |\vec{T}| \cos \alpha$. Definiamo τ_{vert} come:

$$\tau_{vert} = |\vec{T'}| \sin \alpha' - |\vec{T}| \sin \alpha \equiv \tau_0 [\partial_x u(M', t) - \partial_x u(M, t)]$$

Possiamo porre il pezzo di corda come un unico corpo rigido e quindi avere $\rho_0 \Delta x \partial_{tt} u(x,t) = m\vec{a}$ ed infine proiettando sull'asse delle y si ha

$$\rho_0 \Delta x \partial_{tt} u(x,t) = \tau_0 [\partial_x u(x + \Delta x, t) - \partial_x u(x,t)] + F(x,t)\Delta x = \rho_0 \partial_{tt} u(x,t) =$$

$$= \tau_0 \left[\frac{\partial_x u(x + \Delta x, t) - \partial_x u(x,t)}{\Delta x} \right] + F(x,t) = (*)$$

Infine si ha:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (*) = \rho_0 \partial_{tt} u(x,t) = \tau_0 \partial_{xx} u(x,t) + F(x,t) \tag{2.2}$$

Ponendo $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho_0}$ (forza per unitá di massa) ed $c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$ ritroviamo la (2.1) con forzante ovvero:

$$\partial_{tt} u(x,t) = c^2 \partial_{xx} u(x,t) + f(x,t) \tag{2.3}$$

2.3 Derivazione microscopica dell'equazione della corda vibrante

Supponiamo la nostra corda formata da atomi in movimento oscillatorio verticale; é una catena di oscillatori armonici legati tra loro da molle di costante elastica K. Il nostro intento é di effettuare un limite di scala sul sistema; cosí facendo la catena di oscillatori si infittirá tendendo a rassomigliare an un corpo continuo. Tale procedura sará effettuata supponendo che esista una soluzione $u(x,t)$ a cui far convergere le u_N.

Siano $P_j = (x_j, y_j)$ ed $x_j = j\frac{L}{N}$[1] dove N é il numero degli oscillatori ed L la lunghezza del tratto di asse x preso in considerazione.

Si avrá

$$m\ddot{y}_j = -K(y_j - y_{j-1}) - K(y_j - y_{j+1}) \qquad y_0 = y_N = 0 \tag{2.4}$$

La (2.4) rappresenta le forse elastiche sentite dall'oscillatore in posizione y_j dovute alla presenza rispettivamente di altri oscillatori in posizione y_{j-1} ed y_{j+1}. Sia adesso $\varepsilon = \frac{L}{N}$ il passo tra un oscillatore e l'altro. Allora $y_n = u_n(x_j, y) = u_n(j\varepsilon, t)$; inoltre faremo alcune opportune modifiche affinché il modello non perda senso passando al limite: per evitare che per $N \to \infty$ si abbia $m = \infty$ poniamo $m = \varepsilon\rho_0$; vogliamo altresí che per $N \to \infty$ la distanza tra gli oscillatori si annulli e quindi poniamo $K = \tau_0\varepsilon^{-1}$. Si ha

$$m\ddot{y}_j = \rho_0\varepsilon\partial_{tt}u_N(j\varepsilon, t) = \varepsilon^{-1}\tau_0[u_N(j\varepsilon+\varepsilon, t)+u_N(j\varepsilon-\varepsilon, t)-2u_N(j\varepsilon, t)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\ddot{y}_j = \rho_0\partial_{tt}u_N(j\varepsilon, t) = \varepsilon^{-2}\tau_0[u_N(j\varepsilon+\varepsilon, t)+u_N(j\varepsilon-\varepsilon, t)-2u_N(j\varepsilon, t)]$$

. Siano ora le gli operatori di derivazione discreta sinistra e destra:

$$D^+_\varepsilon f(x) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \qquad D^-_\varepsilon f(x) = \frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{2.5}$$

In definitiva avremo

$$\rho_0\partial_{tt}u_N(j\varepsilon, t) = \tau_0 D^+_\varepsilon D^-_\varepsilon u_N(j\varepsilon, t)$$

Adesso, per ipotesi, abbiamo che $u_n(j\varepsilon, t) \xrightarrow{C^2} u(x, t)$ quindi per $N \to \infty$ si ha ancora la

$$\rho_0\partial_{tt}u(x, t) = \tau_0\partial_{xx}u(x, t) \tag{2.6}$$

2.4 Conservazione dell'energia nella corda vibrante

Prendendo in considerazione la (2.4) si ha che la lagrangiana ad essa associata sará:

$$H_N = T + U = \sum_{j=1}^{N-1} m\frac{\dot{y}_j^2}{2} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{k}{2}(y_j - y_{j+1})^2 \tag{2.7}$$

Dimostreremo che H_N é un integrale primo se al posto di $(y, \dot{y})$ si pone $(u_N, \partial_t u_N)$:

$$H_N = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\rho_0}{2}\varepsilon\partial_t u_N(j\varepsilon, t)^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\varepsilon^{-1}\tau_0}{2}[u_N(j\varepsilon, t)-u_N(j\varepsilon + \varepsilon, t)]^2 = (\beta)+(\alpha)$$

in (α) moltiplico e divido per ε e supponendo una buona regolaritá di u_N ho che:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\beta) = \frac{\rho_0}{2}\int_0^L dx(\partial_t u)^2 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}(\alpha) = \frac{\tau_0}{2}\int_0^L dx(\partial_x u)^2 \tag{2.8}$$

Sia ora la funzione $H : (u, v) \longrightarrow H(u, v)$ espressa come:

$$H(u, v) = \int_0^L dx\frac{\rho_0}{2}v(x)^2 + \int_0^L dx\frac{\tau_0}{2}(\partial_x u(x))^2 \tag{2.9}$$

[1] Questo modo di porre le cose ci servirá a breve per potere concretamente effettuare il limite di scala.

Teorema 2.1 *Sia $u(x,t)$ soluzione di (2.6), $T > 0$, $Q_T \doteq (0,L) \times (0,T)$. Inoltre sia $u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$. Sia $E(t) = H(u(\cdot,t), \partial_t u(\cdot,t))$. Allora $E(t) = E(0)$ $\forall t \in [0,T]$ ovvero $E(t)$ é una costante del moto.*

Dim. Mostriamo che $\partial_t E(t) = 0$. Si ha:

$$\dot{E}(t) = \int_0^L dx[\rho_0(\partial_t u)(\partial_{tt} u) + \tau_0(\partial_x u)(\partial_{tx} u)]$$

ma notiamo che

$$\int_0^L dx(\partial_x u)(\partial_{tx} u) =$$

$$= \int_0^L dx(\partial_x u)\partial_x(\partial_t u) = [\partial_x u(x,t)\partial_t u(x,t)]\Big|_0^L - \int_0^L dx(\partial_{xx} u)(\partial_t u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{E}(t) = \int_0^L dx(\partial_t u)(\rho_0 \partial_{tt} u - \tau_0 \partial_{xx} u) + \tau_0[\partial_x u(L,t)\partial_t u(L,t) - \partial_x u(0,t)\partial_t u(0,t)]$$

Adesso notiamo che il secondo termine sotto il segno di integrale é nullo perché per ipotesi $u(x,t)$ é soluzione della (2.6); inoltre il termine di bordo é anch'esso nullo perché gli estremi sono fissati. Di conseguenza $\dot{E}(t) = 0$ e quindi $E(t)$ si mantiene costante in ogni t. $\diamond$

Capiterá spesso di utilizzare i contenuti del precedente teorema per dimostrare l'unicitá delle soluzioni, sia per l'equazione delle onde che per altre. Vediamo un primo esempio di quanto detto.

Teorema 2.2 *Sia*

$$\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u - \alpha u - \gamma \partial_t u + f$$

l'equazione generalizzata delle onde.Siano $c = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho_0}}$, $\alpha = \frac{\alpha_1}{\rho_0}$, $\gamma = \frac{\beta_1}{\rho_0}$ ed $f = \frac{F}{\rho_0}$ con $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$; $x \in [0,L]$ Supponiamo inoltre che $u(x,0) = g(x)$ ed $\partial_t u(x,0) = h(x)$. Allora esite al piú una soluzione in $\mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$

Dim. Siano per assurdo $u_1$ed u_2 soluzioni distinte dell'equazione. Poniamo $w = u_1 - u_2$. Si avrá che w soddisfa [2]

$$\begin{cases} \partial_{tt} w = c^2 \partial_{xx} w - \alpha w - \gamma \partial_t w + f & (x,t) \in Q_T \\ w(x,0) = 0 & \forall x \in [0,L] \\ \partial_t w(x,0) = 0 & \forall x \in [0,L] \end{cases}$$

Sia adesso

$$E(t) = \int_0^L dx \left\{ \frac{\rho_0}{2}(\partial_t w)^2 + \frac{\tau_0}{2}(\partial_x w)^2 + \frac{\alpha}{2} w^2 \right\} \Rightarrow$$

$$\dot{E}(t) = -\int_0^L dx(\partial_t w)^2 \leq 0$$

Quindi $E(t)$ é non crescente. Inoltre $E(0) = 0$ ed $E(t) \geq 0$. Tutto ció implica che

$$\int_0^L dx(\partial_t w)^2 = 0 = \int_0^L dx(\partial_x w)^2$$

[2] L'equazione é rimasta la stessa ma poiché u_1 ed u_2 hanno gli stessi dati inizial,i $w(x,t)$ soddisfa le condizioni di Cauchy omogenee.

Adesso, poiché w é sufficientemente regolare (continua) per ipotesi, si ha che $\partial_t w = 0 = \partial_x w$. Quindi $w(x,t)$ é costante sia in t che in x. Allora arrivamo a dire che

$$w(x,t) = 0 = w(0,t) \Rightarrow u_1 = u_2$$

Assurdo... perché per ipotesi erano due soluzioni distinte. $\diamond$

2.5 Problema di Cauchy globale: ricerca delle soluzioni e formula di D'Alembert

Il nostro obiettivo é trovare l'integrale generale del Problema di Cauchy per la corda infinita. Abbiamo

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u & u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) \\ u(x,0) = g(x) & g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Operiamo il seguente cambio di coordinate per le onde viaggianti trovate nella sezione 1.

$$\begin{cases} \xi = x - ct \\ \eta = x + ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\eta+\xi}{2} \\ t = \frac{\eta-\xi}{2} \end{cases} \Rightarrow u(x,t) \longrightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}(x-ct, x+ct)$$

Questo cambio di coordinate soddisfa ancora il sistema perché

$$\partial_t = (\partial_t \xi)\partial\xi + (\partial_t \eta)\partial\eta = c(\partial_\eta - \partial_\xi)$$

$$\partial_{tt} = c^2(\partial_\eta - \partial_\xi)(\partial_\eta - \partial_\xi) = c^2(\partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} - 2\partial_{\xi\eta})$$

$$\partial_{xx} = (\partial_{\xi\xi} + \partial_{\eta\eta} + 2\partial_{\xi\eta})$$

Di consegenza avremo

$$(\partial_{tt} - c^2 \partial_{xx})u = 0 \Longleftrightarrow \partial_{\xi\eta} \tilde{u} = 0 \tag{2.10}$$

Abbiamo fatto un piccolo passo. Adesso sia

$$u(x,t) = x^2 - c^2 t^2 = (x-ct)(x+ct) = \xi\eta = \tilde{u}(\xi,\eta)$$

Poniamo

$$\vartheta(\xi) = \partial_\xi \tilde{u}(\xi,\eta) \Rightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = \int d\xi \vartheta(\xi) + \vartheta_2(\eta)$$

con

$$\vartheta_1(\xi) = \int d\xi \vartheta(\xi)$$

e $\vartheta_2(\eta)$ una costante necessaria perché $\tilde{u}$ dipende anche da η . Allora scopriamo che

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \vartheta_1(\xi) + \vartheta_2(\eta) \Rightarrow u(x,t) = \vartheta_1(x-ct) + \vartheta_2(x+ct)$$

con ϑ_1,$\vartheta_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ funzioni qualsiasi!!! Quindi notiamo che la soluzione dell'equazione delle onde, nel caso piú generale possibile, deve essere vista come sovrapposizione di un'onda viaggiante diretta e di una inversa.

Adesso che abbiamo una prima formulazione di come deve essere la soluzione, iniziamo ad imporre che essa soddisfi i dati iniziali:

$$\begin{cases} u(x,0) = \vartheta_1(x) + \vartheta_2(x) \\ \partial_t u(x,0) = -c\vartheta_1(x)' + c\vartheta_2(x)' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1(x) + \vartheta_2(x) = g(x) \\ -\vartheta_1(x)' + \vartheta_2(x)' = \frac{1}{c}h(x) \end{cases}$$

Adesso poiché $g(x)' = \vartheta_1(x)' + \vartheta_2(x)'$ abbiamo

$$\begin{cases} \vartheta_1(x) = g(x) - \vartheta_2(x) \\ \vartheta_2(x)' = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c}h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x dyh(y) \\ \vartheta_2(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x dyh(y) \end{cases}$$

Arrivo finalmente alla *Formula di D'Alembert*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{g(x+ct) + g(x-ct)\right\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dyh(y) \tag{2.11}$$

2.6 Cenni di Teoria delle distribuzioni

Prima di arrivare a parlare della *Soluzione fondamentale* dell'equazione delle onde sará necessario accennare ad alcune basilari proprietá delle distribuzioni, le quali, tanto per cominciare, sono una generalizzazione del concetto di funzione. Sará inoltre di estrema importanza badare al fatto che le definizioni e le operazioni che andremo ad eseguire saranno, nella maggioranza dei casi, ti tipo puramente formale.
Supponiamo di avere un impulso che si concentra in y con peso $\psi(x)$ e lo chiamiamo $\varphi_y^\varepsilon(x)$. In formule abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int dx\varphi_y^\varepsilon(x)\psi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} dx\psi(x) = \psi(y) \tag{2.12}$$

Utilizziamo adesso nella nostra trattazione il funzionale $\delta_y : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ e tale che

$$\delta_y(\psi) = \psi(y) \qquad \text{ed} \qquad \int dx\delta(x-y)\psi(x) = \psi(y)$$

Si ha che $dx\delta(x-y)$ rappresenta una misura di $\psi(x)$ concentrata in y.

Oss. 2.1 *Osserviamo che quella appena introdotta é semplicemente una notazione e non si tratta di un vero integrale perché*

$$1 = \int dx\delta(x-y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int dx\varphi_y^\varepsilon(x) = \int \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi_y^\varepsilon dx = 0$$

dove

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases}$$

Attenzione, il modo in cui puó essere definita la Delta di Dirac non deve indurci a trattarla come fosse una vera e propria funzione. Osserviamo infine che per la $\delta(x-y)$ non si puó scambiare il limite con l'integrale perché per essa non ha senso il limite puntuale.

Definizione Lo spazio naturale in cui operare é lo spazio delle funzioni test cosí defînto:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \doteq \left\{ \begin{array}{c} \psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}) \\ \text{Supp } \psi \text{ compatto} \end{array} \right\}$$

Per $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ avremo che $J : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sará un funzionale lineare continuo.

La definizione delle proprietá della $\delta_y(\psi)$ non é priva di senso. Lo si comprende osservando che anche le funzioni (usuali) appartengono a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$: ad $f(x)$ posso associare[3]

$$J_f : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tale che } J_f(\psi) = \int dx f(x)\psi(x) \tag{2.13}$$

ed avere

$$f \doteq \varphi_y^{\varepsilon} \text{ ossia } f = \lim_{\varepsilon \to 0} J_{\varphi_y^{\varepsilon}}(y) \tag{2.14}$$

L'ultima questione da considerare é il concetto di derivazione, ossia come far si che si possa parlare di derivate anche nel caso in cui si lavori con delle distribuzioni. Se $f \longrightarrow J_f \Rightarrow f' \longrightarrow J_{f'}$ con la notazione da noi utilizzata si ha:

$$J_{f'}(\psi) = \int dx f'(x)\psi(x) = \text{ (per parti) } = -\int dx f(x)\psi'(x) = -J_f(\psi')$$

$$J'(\psi) = -J(\psi') \tag{2.15}$$

Notiamo che i contributi al bordo sono tutti nulli perché ψ ha supporto compatto; inoltre va osservato che, senza fare alcuna ipotesi di regolaritá su f, il fatto che la derivata venga scaricata su ψ che per definizione appartiene a $\mathcal{C}^{\infty}$ fa si che $J \in \mathcal{C}^{\infty}$ automaticamente.
Conseguenza molto interessante é che data la *Funzione di Heaviside*

$$H(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{array} \right.$$

si ha

$$J_H(\psi) = \int dx H(x)\psi(x) = \int_0^{\infty} \psi(x)$$

mentre

$$J_H{}'(\psi) = -J_H(\psi') = -\int_0^{\infty} dx\psi'(x) = \psi(0) = \delta_0(y)$$

Allora scopriamo che

$$H'(x) = \delta(x) \tag{2.16}$$

[3]Vale la linearitá : $J_f(\psi + h) = J_f(\psi) + J_f(h)$.

2.7 Soluzione fondamentale

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u & u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+) \\ u(x,0) = g(x) & g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.17}$$

Supponiamo adesso di avere $g = 0$ e d $h \neq 0$. Allora dalla (2.11) avremo come soluzione

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\varphi(y) = w_\varphi(x,t) \qquad \partial_t u(x,t) = \frac{1}{2}\{h(x+ct) + h(x-ct)\}$$

Questo fa si che w_φ soddisfi

$$\begin{cases} \partial_{tt}w_\varphi = c^2\partial_{xx}w_\varphi \\ w_\varphi(x,0) = 0 \\ \partial_t w_\varphi(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

Questo ci da la possibiltá di definire $u(x,t) = w_h(x,t) + \partial_t w_g(x,t)$ dove

$$w_\varphi = \int dyK(x,y,t)\varphi(y) \tag{2.19}$$

con $K(x,y,t)$ nucleo risolvente della (2.19)il quale, come mostreremo, é a sua volta soluzione della stessa. Tenendo in mente come é stata definita la funzione di Heaviside prendiamo in considerazione $H(x-y+ct)$ ed $H(x-y-ct)$, le quali sono, rispettivamente, funzioni a gradino al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse, traslate una rispetto all'altra di un'ampiezza ct. La loro somma dará un'onda quadra che, riscalata, ci dará il nucleo da noi cercato:

$$K(x,y,t) = \frac{1}{2c}\{H(x-y+ct) - H(x-y-ct)\} \tag{2.20}$$

Passiamo ora a dimostrare che il nucleo stesso é soluzione del problema. Sia φ_y^ε un impulso di peso 2ε definito come:

$$\varphi_y^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\{H(x-y+\varepsilon) - H(x-y-\varepsilon)\}$$

ed avente le seguenti proprietá:

1. $$\int dx\varphi_y^\varepsilon = 1$$

2. $$\lim_{\varepsilon\to o}\varphi_y^\varepsilon = \delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ \infty & x = y \end{cases}$$

3. $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{x} dz\varphi_y^\varepsilon(z) = H(x-y)$$

Da queste tre proprietá segue che

$$K(x,y,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} w_{\varphi_y^\varepsilon}(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dz\varphi_y^\varepsilon(z) \tag{2.21}$$

Adesso vogliamo spingerci leggermente oltre e chiederci cosa avviene all'impulso $w_{\varphi_y^\varepsilon}$ nel passaggio al limite. Bisogna introdurre

$$\chi_A(y) = \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & y \notin A \end{cases} \quad \text{ed } I_j = [y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon)$$

In prima approssimazione si ha

$$\varphi(y) \simeq \sum_j \varphi(y_j)\chi_{I_j}(y)$$

Cosa vogliamo fare? L'intento é discretizzare la funzione con cui viene pesato l'impulso e di valutarla nei singoli intervalli, cosí potremo vedere cosa succede all'impulso nel momento in cui opereremo il limite, ovvero quando gli intervalli diventeranno singoli punti.
Pertanto ritroviamo che

$$w_\varphi(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\varphi(y) \simeq \sum_j \varphi(y_j)\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\chi_{I_j}(x)$$

Adesso moltiplico e divido per 2ε ed abbiamo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_j \varphi(y_j)\frac{2\varepsilon}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\frac{1}{2\varepsilon}\chi_{I_j}(x) = \int dy\varphi(y)K(x,y,t)$$

dove abbiamo

$$\varphi_{y_j}^\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}\chi_{I_j}(y) \tag{2.22}$$

2.8 Problema di Cauchy con forzante e metodo di Duhamel

Sia

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u + f \\ u(x,0) = g(x) \\ \partial_t u(x,0) = h(x) \end{cases} \tag{2.23}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $u = \tilde{u} + \bar{u}$ dove $\bar{u} = w_h + \partial_t w_g$ é soluzione dell'omogenea associata alla (2.23). Andando a sostituire si ha

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{u} + \partial_{tt}\bar{u} = c^2\partial_{xx}\tilde{u} + \partial_{xx}\bar{u} + f \\ \tilde{u}(x,0) + \bar{u}(x,0) = g(x) \\ \partial_t\tilde{u}(x,0) + \partial_t\bar{u}(x,0) = h(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \partial_{tt}\tilde{u} + = c^2\partial_{xx}\tilde{u} + f \\ \tilde{u}(x,0) = 0 \\ \partial_t\tilde{u}(x,0) = 0 \end{cases}$$

Per semplificare la notazione da adesso scriveremo u al posto di $\tilde{u}$.
Sia $s < t$ un tempo fissato come paramentro e consideriamo $f(x,s)ds$: vogliamo

intendere la forzante come un dato iniziale, per un Problema di Cauchy associato, del quale ne vogliamo analizzare le propagazioni in $t > s$.

$$\begin{cases} \partial_{tt}\tilde{w} = c^2\partial_{xx}\tilde{w} \\ \tilde{w}(x,0) = 0 \\ \partial_t\tilde{w}(x,0) = f(x,s) \end{cases} \tag{2.24}$$

Adesso non ci resta che trovare la soluzione di (2.24) la cui unicitá per il teorema 2.1 é assicurata.
Poniamo

$$u(x,t) = \int_0^t dsw(x,t;s) \text{ dove } w(x,t;s) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} dyf(y) = \int dyK(y,t;s)f(y,s)$$

Posta come soluzione $u(x,t)$ mostriamo che realmente soddisfa (2.23):

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t w(x,t;t) + \int_0^t ds\partial_t w(x,t;s) = f(x,t) + \int_0^t ds\partial_t w(x,t;s)$$

$$\partial_{tt}u(x,t) = \partial_t w(x,t;t) + \int_0^t ds\partial_{tt}w(x,t;s) = f(x,t) + c^2\int_0^t \partial_{xx}w(x,t;s)$$

2.9 Problema di Cauchy-Dirichlet e metodo delle riflessioni

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u & x \in (0,L) \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,L] \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{2.25}$$

Vogliamo prolungare la soluzione su tutto $\mathbb{R}$ ma innazitutto dobbiamo capire come prolungare $g(x)$ ed $h(x)$. Useremo il *Medoto delle Riflessioni*
Partiamo da $u(x,t) = \vartheta_1(x-ct) + \vartheta_2(x+ct)$ dalla quale ricaviamo, imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali e quelle al bordo, le seguenti:

$$\begin{cases} \vartheta_1(-ct) + \vartheta_2(ct) = 0 & \forall t \geq 0 \\ \vartheta_1(L-ct) + \vartheta_2(L+ct) = 0 & \forall t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (ct \doteq x)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vartheta_1(-x) + \vartheta_2(x) = 0 & \forall x \geq 0 \\ \vartheta_1(L-x) + \vartheta_2(L+x) = 0 & \forall x \geq 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Adesso ricordando che ϑ_1 e ϑ_2 erano definite come

$$\begin{cases} \vartheta_1(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x dyh(y) & \forall x \in [0,L] \\ \vartheta_2(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x dyh(y) & \forall x \in [0,L] \end{cases}$$

usando le (2.25) arriviamo ad affermare che $\vartheta_1(-x) = -\vartheta_2(x)$ per $\vartheta_1(x)$ noto in $[-L,L]$ e quindi, di conseguenza, conosciamo ϑ_2 in $[0,2L]$.
Mostriamo adesso che tali soluzioni possiedono prolungamenti 2L-periodici :

$$\vartheta_2(x+2L) = \vartheta_2(x+L+L) = -\vartheta_1(L-(x+L)) = -\vartheta_1(-x) = \vartheta_2(x)$$

[4] Tale cambio di notazione é sensato perché c ha le dimensioni di una velocitá.

$$\vartheta_1(x+2L) = -\vartheta_2(-x-2L) = -\vartheta_2(-x) = \vartheta_1(x)$$

Adesso occupiamoci dei dati iniziali. Per quanto riguarda $g(x) = \vartheta_1(x) + \vartheta_2(x)$ si ha che:

$$g(-x) = \vartheta_1(-x) + \vartheta_2(-x) = -\vartheta_2(x) - \vartheta_1(x) = -g(x)$$

quindi prolungheremo per disparitá e poi per periodicitá. Ed ora

$$h(-x) = c[\vartheta_2'(-x) - \vartheta_1'(-x)] = c\frac{d}{dx}[\vartheta_1(-x) - \vartheta_2(-x)] = c\frac{d}{dx}[-\vartheta_2(x) + \vartheta_1(x)] =$$

$$= c[\vartheta_1'(x) - \vartheta_2(x)] = -h(x)$$

Quindi anche in questo caso prolungheremo prima per disparitá e poi per periodicitá.

2.10 Problema di Cauchy-Dirichlet e metodo di Fourier

In questa sezione ci occuperemo della risoluzione del problema (2.25) tramite l'importantissimo *Metodo di Fourier* il quale, premettiamo, é utilizzabile perché le condizioni al bordo sono omogenee...ma piú in la ne capiremo di piú...
Stiamo cercando soluzioni del tipo[5]:

$$u(x,t) = w(t)v(x) \tag{2.27}$$

le quali quindi dovranno soddisfare

$$\ddot{w}(t)v(x) = c^2 w(t)v''(x) \tag{2.28}$$

Supponendo tutti i termini diversi da 0, osserviamo che necessariamente ci dovrá essere una proporzionalitá del tipo:

$$\frac{\ddot{w}(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) \\ \ddot{w}(t) = \lambda c^2 w(t) \end{cases}$$

Abbiamo un problema agli autovalori riguardante l'operatore derivata. Come prima cosa cerchiamo le soluzioni di:

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) \\ v(0) = 0 = v(L) \end{cases} \tag{2.29}$$

L'integrale generale di $v''(x) = \lambda v(x)$ sará

$$v(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \lambda = 0 \\ c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) & \lambda = -k^2 < 0 \end{cases} \tag{2.30}$$

[5]Qui possiamo procedere per separazione delle variabili.

Affinché siano soddisfatte le condizioni di (2.29) nel primo caso si deve avere $c_1 = 0 = c_2$; nel secondo caso stessa cosa e quindi abbiamo soluzioni banali. L'unico caso non banale é il terzo:

$$v(0) = c_1 = 0 \Rightarrow v(x) = c_2 \sin(kx) \text{ che per la } v(L) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(kx) = 0 \Rightarrow k = \pm \frac{n\pi}{L}$$

tra i quali sceglieremo i positivi. Allora scopriamo di avere in corrispondenza con ogni v_n una $u_n(x,t) = w_n(t)v_n(x)$ e quindi di conseguenza abbiamo un oscillatore armonico ovvero

$$\ddot{w}_n(t) = \lambda_n c^2 w_n(t) = -\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2} w_n(t)$$

Di conseguenza troveremo (per $n \geq 1$)

$$u_n(x,t) = \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (2.31)$$

La soluzione cercata sará una sovrapposizione delle u_n ossia

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} u_n(x,t)$$

Resta ancora in bilico una questione di estrema importanza: ci chiediamo se abbiamo convergenza o meno alla soluzione e soprattutto sotto quali ipotesi la si puó avere.

Come condizione neccessaria affinché $u_n \longrightarrow u$ avremo che dovrá essere alta la velocitá di decadimento dei coefficienti A_n e B_n quindi sará *necessario* supporre

$$\sum^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|) < \infty \qquad (2.32)$$

Adesso interessiamoci specificatamente a tali coefficienti: partendo dalla (2.31), supponiamo di avere un dato Problema di Cauchy con $u(x,0) = g(x)$ ed $\partial_t u(x,0) = h(x)$.
Operiamo formalmente derivando sotto il segno di somma:

$$\partial_t u(x,t) = \partial_t \sum_{n\geq 1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \partial_t u_n(x,t) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}^{\infty} \left[-\frac{n\pi c}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{n\pi c}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Per soddisfare le condizioni poste dal problema ci dobbiamo chiedere sotto quali ipotesi si possa trovare un'espansione in serie di $g(x)$ ed $h(x)$. Per ora, poiché vogliamo arrivare ad una formulazione esplicita dei coefficienti di Fourier, supponiamo giá assegnati i dati iniziali.

$$\begin{cases} g(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} A_{n'} \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) \\ h(x) = \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{n'\pi c}{L} B_{n'} \sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) \end{cases} \qquad (2.33)$$

Prima di procedere bisogna osservare alcune cose:

Oss. 2.2

$$\int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n-n'}{L}\pi x\right) - \cos\left(\frac{n+n'}{L}\pi x\right)\right] =$$

$$= \left(y \doteq \frac{\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2\pi}\int_0^\pi dy[\cos(n-n')y - \cos(n+n')y] = \frac{L}{2}\delta_{n=n'}$$

Notiamo che il termine $\cos(n+n')$ *da contributi solo per* $n = -n'$ *ma noi qui prendiamo in considerazione solo gli* $n \geq 0$

Utilizziamo in $g(x)$ delle (2.33) il precedente calcolo (supponendo, lo ribadiamo, buone proprietá di convergenza):

$$\int_0^L dx g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n\geq 1} A_n \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n'\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2}A_n$$

Di qui ne consegue che

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L dx h(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (2.34)$$

dove B_n é stato ricavato con un calcolo simile.
Infine notiamo che anche se $g(x)$ ed $h(x)$ sono date per $x \in [0, L]$, la loro espansione in serie vale su tutto $\mathbb{R}$, per cui osservando tali espansioni possiamo affermare che g ed h vengono estese per disparitá e conseguentemente per periodicitá.

Oss. 2.3 *Possiamo porre*

$$u_n(x,t) = N_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin(k_n x)$$

dove $N_n \cos\varphi_n = A_n$ *,* $N_n \sin\varphi_n = B_n$ *,* $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$ *,* $k_n = \frac{n\pi}{L}$ *Allora scopriamo che* $u_n(x,t)$ *é un' onda armonica stazionaria avente sicuramente dei nodi in 0 ed in L. In particolare, ci rendiamo conto che le soluzioni dell'equazione delle onde possone essere viste come sovrapposizione di infinite onde armoniche*[6] *.*

2.11 Sulla Teoria delle Serie di Fourier

Sia l'intervallo $[-L, L]$ e siano le funzioni

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Esse sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ periodiche con periodo $T = 2L$. Esse formano una base ortogonale per lo spazio delle funzioni $2L$ - periodiche quadrato-integrabili perché godono delle seguenti tre proprietá :

$$\int_{-L}^L dx \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right] = \begin{cases} 2L\delta_{n=k=0} + L\delta_{n=k}\delta_{n\neq 0} \\ 0 \end{cases}$$

[6]Tali onde hanno la proprietá di avere le frequenze tra esse proporzionali, ossia $\omega_n = n\omega_1$

$$\int_{-L}^{L} dx \left[\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\right] = \begin{cases} L\delta_{n=k} \\ 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} dx \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right] \equiv 0$$

Detto questo possiamo definire in questo spazio il seguente prodotto scalare:

$$\langle u, v\rangle = \int_{-L}^{L} dx u(x)v(x) \tag{2.35}$$

Infine scriviamo il generico sviluppo in serie di Fourier di una funzione

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]$$

Adesso enunciamo senza dimostrare il seguente teorema, che poi porremo anche in notazione complessa.

Teorema 2.3 *Sia $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ una funzione $2L$-periodica. Allora esiste lo sviluppo in serie di Fourier e si ha convergenza uniforme con coefficienti* [7]

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)$$

Adesso mostriamo come le Serie di Fourier possono essere scritte anche in forma complessa...decisamente piú compatta,maneggevole e aggraziata!!
Partendo dalla nota formula

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z$$

arriviamo a definire

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{2.36}$$

Adesso proviamo a sostituire le (2.36) nello sviluppo in serie di una funzione $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \left(\frac{e^{in\frac{\pi}{L}x} + e^{-in\frac{\pi}{L}x}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{in\frac{\pi}{L}x} - e^{-in\frac{\pi}{L}x}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\frac{\pi}{L}x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\frac{\pi}{L}x}$$

Ponendo

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad c_{-n} = \bar{c} = \frac{a_n + ib_n}{2} \tag{2.37}$$

possiamo riscrivere

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \tag{2.38}$$

É quindi possibile riformulare il teorema (2.3) nel seguente modo equivalente:

[7] Per a_n si intende $n \geq 0$ mentre b_n vale per $n \geq 1$

Teorema 2.4 *Sia* $f(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, *sia* $f(x)$ $2L$ *- periodica. Si abbia inoltre* $\sum_n |c_n| < \infty$. *Allora*

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}$$

dove i c_n *sono definiti come*

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x}$$

Oss. 2.4 *Le tre relazioni di ortogonalitá precedentemente esposte sono risssumibili in forma complessa come*

$$\int_{-L}^{L} dx e^{in\frac{\pi}{L}x} e^{-ik\frac{\pi}{L}x} = \begin{cases} 2L & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Nel teorema (2.4) avevamo avanzato delle richieste abbastanza restrittive sui coefficienti di Fourier c_n. Adesso scopriremo che le proprietá di regolaritá richieste per $f(x)$ comportano automaticamente una certa rapiditá di convergenza dei coefficienti: supponiamo, per facilitarci i calcoli, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.[8] . Avremo quindi

$$f'(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c'_n e^{in\frac{\pi}{L}x} \qquad \text{dove} \qquad \sum_n |c'_n| < \infty$$

Mostriamo adesso chi sono i c'_n:

$$c'_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f'(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} = -\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-in\frac{\pi}{L}x} =$$

$$= in\frac{\pi}{L}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} = in\frac{\pi}{L} c_n$$

Pertanto

$$c'_n = in\frac{\pi}{L} c_n \tag{2.39}$$

Adesso proviamo a fare le cose al contrario, integrando per parti, non una ma ben due volte dato che é fattibile perché f é per ipotesi $\mathcal{C}^2$.

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \frac{d}{dx} e^{-in\frac{\pi}{L}x} \frac{L}{-in\pi} = -\frac{iL}{n\pi}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f'(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} =$$

$$= -\frac{L^2}{n^2\pi^2}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f''(x) e^{-in\frac{\pi}{L}x} \leq \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} |f''(x)| = C_f$$

con C_f una costante dipendente dalla funzione. Adesso risulta evidente che

$$|c_n| \leq \frac{C_f}{n^2} \Rightarrow \sum_n |c_n| < \infty$$

Adesso vogliamo prendere in esame un'ultima proprietá di cui godono i coefficienti di Fourier: la *Uguaglianza di Bessel*[9] .

[8] E quindi $f' \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

[9] L'ipotesi di regolaritá $\mathcal{C}^1$ é necessaria per avere il segno di uguaglianza nella relazione, altrimenti essa vale solo con il $\leq$.

Al solito, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e $2L$ - periodica. In base a come abbiamo precedentemente definito il prodotto scalare abbiamo

$$\|f\| = \langle f, f\rangle = \int_{-L}^{L} dx f(x)^2 \tag{2.40}$$

Poiché possiamo associare ad ogni $f(x)$ i c_n del suo sviluppo in serie, avremo

$$\langle f, f\rangle = \int_{-L}^{L} dx f^2 = \int_{-L}^{L} dx \sum_n \sum_k c_n c_k e^{i(n+k)\frac{\pi}{L}x} =$$

$$= \sum_n \sum_k c_n c_k \int_{-L}^{L} dx e^{i(n+k)\frac{\pi}{L}x} = \text{ per la oss.3 } = \sum_n \sum_k c_n c_k 2L\delta_{n+k=0} =$$

$$= \sum_n \sum_k 2L c_n c_{-n} = 2L \sum_n |c_n|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 = \sum_n |c_n|^2 \tag{2.41}$$

2.12 D'Alembert & Fourier

Adesso mostreremo che dati $g(x)$ ed $h(x)$ come nelle (2.33) , si puó derivare la soluzione di Fourier da quella di D'Alembert:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x-ct) + g(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy h(y)$$

sotituendo le (2.33) si ha

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} A_n \left\{\sin\left[\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right] + \sin\left[\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right]\right\} +$$

$$+ \sum_{n\geq 1} B_n \frac{n\pi c}{L}\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy \sin\left(\frac{n\pi}{L}y\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 1} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$$

É la vecchia soluzione generale dell'oscillatore armonico!!! Qui richiedere che $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ ed $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ non basta. Si rende necessario richiedere che $\sum n^2|A_n| < \infty$ ed $\sum n^2|B_n| < \infty$. Se si partisse da g ed h espressi attraverso il loro sviluppo in serie, invece, li si dovrebbe supporre rispettivamente $\mathcal{C}^3$ e $\mathcal{C}^2$ perché in tal caso si renderá necessario effettuare delle derivazioni sotto il segno di somma e quindi sará necessaria una maggiore regolaritá.

2.13 Equazione delle onde con d>1

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio regolare, limitato e connesso con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Posto $Q_T \doteq \Omega \times (0,T)$ cercheremo soluzioni di tipo classico ovvero delle $u \in \mathcal{C}^2(Q_T) \cap \mathcal{C}^1(\overline{Q}_T)$ ai seguenti problemi:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\Delta u - \alpha u - \gamma\partial_t u + f & (x,t) \in Q_T \quad \alpha,\gamma > 0 \\ u(x,0) = g(x); \partial_t u(x,0) = h(x) & (x,t) \in \overline{Q}_T \\ \begin{cases} (D) \quad u(x,t) = a(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T] \\ (N) \quad \partial_\nu u(x,t) = b(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,T] \end{cases} \end{cases}$$

separatamente potremo prendere in considerazione le condizioni di Dirichlet (D) o quelle di Neumann (N).
Anche in dimensioni maggiori di 1 é definito il funzionale

$$H(u,v) = \int_\Omega dx \frac{1}{2}\{v(x)^2 + c^2|\nabla u(x)|^2 + \alpha u(x)^2\} \tag{2.42}$$

e di conseguenza é ancora definita l'energia come $E(t) = H(u(\cdot,t), \partial_t u(\cdot,t))$

Teorema 2.5 *Anche in $d > 1$ l'energia é un integrale primo del moto.*

Al fine di dimostrare il teorema premettiamo la seguente

Oss. 2.5 *Siano ψ , $\phi \in \Omega$. Allora*

$$div(\phi\nabla\psi) = \nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\Delta\psi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\Omega d\Omega div(\phi\nabla\psi) = \int_\Omega d\Omega(\nabla\phi\nabla\psi + \phi\Delta\psi)$$

ma per il Teorema di Gauss il primo integrale é uguale ad

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma\phi\nabla\psi \cdot \nu = \int_{\partial\Omega} d\sigma\phi\partial_\nu\psi$$

Dim. Th. 2.5 Adesso useremo la precedente osservazione con $u = \psi$ ed $\partial_t u = \phi$

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega dx\frac{1}{2}\{(\partial_t u)^2 + c^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2\} =$$

$$= \int_\Omega dx(\partial_t u)(\partial_{tt}u) + c^2\nabla u\partial_t(\nabla u) + \alpha u\partial_t u$$

Adesso per Schwartz si ha che $\nabla u\partial_t(\nabla u) = \nabla u\nabla(\partial_t u)$. Adesso applicando l'Oss.4 arriviamo ad:

$$\dot{E}(t) = \int_\Omega dx\partial_t u(\partial_{tt}u + \alpha u) + c^2\int_{\partial\Omega} d\sigma(\partial_t u)(\partial_\nu u) - c^2\int_\Omega dx\partial_t u\Delta u =$$

$$= \int_\Omega dx(\partial_t u)(\partial_{tt}u + \alpha u - c^2\Delta u) + c^2\int_{\partial\Omega} d\sigma(\partial_t u)(\partial_\nu u)$$

Se $u(x,t)$ é soluzione del problema di cui alla pagina precedente con condizioni di Newmann allora il termine in cui compare la derivata normale é nullo, inoltre poiché per ipotesi $u(x,t)$ soddisfa l'equazione delle onde genarizzata avremo

$$\dot{E}(t) = -\gamma\int_\Omega dx(\partial_t u)^2 + \int_\Omega dxf\partial_t u \quad \diamond$$

Lemma 2.13.1 *Se $u(x,t)$ é soluzione classica dell'equazione con condizioni al bordo omogenee*

$$\partial_{tt} u = c^2 \Delta u - \alpha u - \gamma \partial_t u$$

allora $\dot{E}(t) \leq 0 \ \forall t \in [0,T]$.

Dim. Innanzitutto poniamo $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y-x| < r\}$ ed $S_r(x) = \partial B_r(x)$. Infine sia

$$C_{x_0,t_0} = \{(x,t) : x \in B_{c(t_0-t)}(x_0); t \in [0,t_0]\}$$

Adesso possiamo procedere[10]:

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{c(t_0-t)} dr \int_{S_r(x_0)} d\sigma \frac{1}{2} \{(\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2\} =$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} \{(\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2\} +$$

$$+ \int_0^{c(t_0-t)} dr \int_{S_r(x_0)} d\sigma \{\partial_t u \partial_{tt} u + c^2 \nabla u \nabla \partial_t u + \alpha u \partial_t u\} =$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} \{(\partial_t u)^2 + c^2 |\nabla u|^2 + \alpha u^2\} + \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} dx \partial_t u (\partial_{tt} u + \alpha u) +$$

$$+ c^2 \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} dx \nabla u \nabla (\partial_t u) = -\gamma \int_{B_{c(t_0-t)}(x_0)} dx (\partial_t u)^2 +$$

$$+ \frac{c}{2} \int_{S_{c(t_0-t)}(x_0)} d\sigma \{-(\partial_t u)^2 - c^2 |\nabla u|^2 - \alpha u^2 + 2c \partial_\nu u \partial_t u\}$$

L'ultimo integrale é minore di 0 perché

$$-(\partial_t u)^2 - c^2 |\nabla u|^2 - \alpha u^2 + 2c \partial_\nu u \partial_t u \leq -(\partial_t u)^2 - c^2 |\nabla u|^2 - \alpha u^2 + 2c |\partial_\nu u| |\partial_t u|$$

dove con $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$ si ha

$$-(\partial_t u)^2 - c^2 |\nabla u|^2 + 2c |\nabla u| |\partial_t u| = -(|\partial_t u| - c |\nabla u|)^2 \leq 0 \qquad \diamond$$

Si noti infine che la frontiera era dipendente da t e che l'energia era stata definita su una bolla dipendente sia da x che da t. Per questo ci ritroviamo con energia negativa al bordo.

Teorema 2.6 *La soluzione dell'equazione delle onde, anche in $d > 1$, é unica.*

Dim Al solito, supponiamo per assurdo che esistano due soluzioni distinte dell'equazione e siamo u_1 ed u_2. Sia $u = u_1 - u_2$ la quale soddisferá

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u - \alpha u - \gamma \partial_t u & (x,t) \in Q_T \\ u(x,t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = 0 = \partial_t u(x,0) & \forall x \in Q_T \\ \partial_\nu u(x,t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases}$$

[10] Applicheremo il Teorema di Fubini.

Notiamo che $\forall t$ si ha $\dot{E}(t) \leq 0$; $E(0) = 0$; $E(t) \geq 0$. Allora abbiamo una funzione con derivata decrescente che in 0 assume valore 0 ed é sempre crescente. Ne consegue che

$$E(t) \equiv 0 \Rightarrow \int_\Omega dx(\partial_t u)^2 = 0 = \int_\Omega dx|\nabla u|^2 = \alpha \int_\Omega dxu^2 \Rightarrow u \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 \equiv u_2$$

Questo é assurdo perché avevamo ipotizzato che le soluzioni fossero distinte. $\diamond$

2.14 La formula di Kirchhoff ($d = 3$)

Sia in $\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u \\ u(x, 0) = g(x) \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) \end{cases} \tag{2.43}$$

dove ipotizziamo $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ ed $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.

Allora dimostreremo che vale la seguente:

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right\} + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(x)} d\sigma(y) h(y) \tag{2.44}$$

Dimostreremo il tutto attraverso tre lemmi, ma prima abbiamo bisogno di alcune osservazioni che ci saranno utili, in particolare nei cambi di coordinate.

Oss. 2.6 *Avremo ancora $S_r(x) = \partial B_r(x)$ e data $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ definiamo il volume medio come*

$$M_\varphi(x, r) \doteq \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \varphi(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x + rn)$$

Notiamo che nel secondo integrale abbiamo posto $y = x + rn \Rightarrow d\sigma(y) = r^2 d\sigma(n)$. Utilizzeremo una scrittura o l'altra a seconda delle esigenze.

Lemma 2.14.1 *Sia $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Allora $M_\varphi(x, r)$ é soluzione di*

$$\begin{cases} \partial_{rr} M_\varphi = \Delta_x M_\varphi - \frac{2}{r} \partial_r M_\varphi \\ M_\varphi(x, 0) = \varphi(x) \\ \partial_r M_\varphi(x, 0) = 0 \end{cases} \tag{2.45}$$

Dim. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} M_\varphi(x, r) = \partial_r \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x + rn) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \nabla\varphi(x + rn) \cdot n =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} d\sigma(y) \nabla\varphi(y) \cdot \nu = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r(x)} dy div(\nabla\varphi(y)) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r(x)} dy \Delta\varphi(y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_\varphi(x,r) = \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{B_r(x)} dy\Delta\varphi(y) = -\frac{2}{r}\partial_r M_\varphi(x,r) + \frac{1}{4\pi r^2}\partial_r\int_{B_r(x)} dy\Delta\varphi(y)$$

dove

$$\partial_r\int_{B_r(x)} dy\Delta\varphi(y) = \partial_r\int_0^r d\rho\int_{S_\rho(x)} d\sigma(y)\Delta\varphi(y) = \int_{S_r(x)} d\sigma(y)\Delta(y)$$

Poi abbiamo:

$$\Delta_x M_\varphi(x,r) = \Delta_x\frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} d\sigma(n)\varphi(x+rn) = \frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} d\sigma(n)\Delta\varphi(x+rn) =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r(x)} d\sigma(y)\Delta(y)$$

Allora l'equazione é soddisfatta. Per quanto riguarda i dati iniziali abbiamo:

$$M_\varphi(x,0) = \lim_{r\to 0} M_\varphi(x,r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{S_1(0)} d\sigma(n)\varphi(x+rn) = \varphi(x)$$

$$\partial_r M_\varphi(x,r) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{4\pi r^2}\int_{B_r(x)} dy\Delta\varphi(y) = 0$$

perché

$$\left|\int_{B_r(x)} dy\Delta\varphi(y)\right| \le \frac{4}{3}\pi r^3\left(\max_{B_r(x)}|\Delta\varphi|\right)$$

Lemma 2.14.2 *Sia $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$. Allora $u(x,t) = w_\varphi(x,t) = tM_\varphi(x,ct)$ é soluzione di*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\Delta u \\ u(x,0) = 0 \\ \partial_t u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \tag{2.46}$$

Dim.

$$\partial_{tt}w_\varphi(x,t) = \partial_{tt}tM_\varphi(x,ct) = \partial_t[M_\varphi(x,ct) + ct\partial_r M_\varphi(x,ct)] =$$

$$= 2c\partial_r M_\varphi + c^2 t\partial_{rr}M_\varphi$$

Adesso usiamo il Lemma 1 in $\partial_{rr}M_\varphi$:

$$\partial_{tt}w_\varphi(x,t) = 2c\partial_r M_\varphi + c^2\Delta_x M_\varphi - c^2 t\frac{2}{r}\partial_r M_\varphi = c^2 t\Delta_x M_\varphi(x,ct) = c^2\Delta_x w_\varphi(x,t)$$

Quindi l'equazione é verificata. Restano i dati iniziali:

$$w_\varphi(x,0) = \lim_{t\to 0}\partial_t[tM_\varphi(x,ct)] = \lim_{t\to 0} M_\varphi(x,ct) + t\partial_t M_\varphi(x,ct) = \varphi(x) \qquad \diamond$$

Lemma 2.14.3 *Sia $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$. Allora $u(x,t) = \partial_t w_\varphi(x,t)$ é soluzione di*

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\Delta u \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ \partial_t u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

Dim. Sappiamo per il Lemma 2 che $\partial_{tt} w_\varphi(x,t) = c^2 \Delta w_\varphi(x,t)$. Sia ora $\partial_{ttt} w_\varphi(x,t) = c^2 \partial_t \Delta w_\varphi(x,t) \Rightarrow \partial_{tt}(\partial_t w_\varphi) = c^2 \Delta(\partial_t w_\varphi)$ che soddisfa l'equazione. Per quanto riguarda i dati iniziali, posto $v(x,t) = \partial_t w_\varphi$ abbiamo $v(x,0) = \varphi(x)$ ed

$$\partial_t v(x,0) = \lim_{t\to 0} \partial_t v(x,t) = \lim_{t\to 0} \partial_{tt} w_\varphi(x,t) = \lim_{t\to 0} c^2 \Delta_x w_\varphi(x,t) =$$

$$= \lim_{t\to 0} c^2 t \Delta_x M_\varphi(x,ct) = 0 \qquad \diamond$$

Adesso torniamo al problema (2.43): mettendo insieme i tre lemmi affermiamo di possedere una

$$u(x,t) = w_h(x,t) + \partial_t w_g(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{B_{ct}(x)} d\sigma(y) h(y) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right\}$$

dove l'ultimo termine é uguale ad

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{t}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) g(y) \right\} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) g(x + ctn) +$$

$$+ \frac{tc}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \nabla g(x+ctn) \cdot n$$

Adesso poiché $ctn = y - x$ possiamo compattare tutto nella seguente formula equivalente alla (2.44) :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S_{ct}(x)} d\sigma(y) [th(y) + g(y) + \nabla g(y) \cdot (x - y)] \tag{2.48}$$

Osserviamo che rispetto alla formula di D'Alembert in $d = 1$ manca il termine $\frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} dy h(y)$ il quale valutava $u(x,t)$ sul segmento che prendevamo in considerazione.
Inoltre scopriamo osservando la formulazione di $u(x,t)$ in $d = 3$ che una volta arrivata la perturbazione, il profilo di u torna allo stato iniziale, ovvero posti $t_{min} = \frac{d}{c}$ e $t_{max} = \frac{D}{c}$ dove

$$d = \min\{|y - x| : y \in K\} \qquad D = \max\{|y - x| : y \in K\}$$

e K é il supporto dei dati iniziali, notiamo che

$$\begin{cases} u(x,t) \equiv 0 & t < t_{min} \\ u(x,t) \neq 0 & t_{min} < t < t_{max} \\ u(x,t) \equiv 0 & t > t_{max} \end{cases}$$

Notiamo inoltre che il fronte d'onda é l'inviluppo convesso di sfere con $r = ct$ e che tutti gli x si mettono in movimento solo e unicamente quando sono colpiti da esso.

2.15 La formula di Poisson ($d = 2$)

Sia in $\mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u \\ u(x,0) = g(x) \\ \partial_t u(x,0) = h(x) \end{cases} \tag{2.49}$$

Mostremo che la soluzione di (2.49) in $d = 2$ é

$$u(x,t) = \partial_t \left\{ \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \right\} + \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{h(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \tag{2.50}$$

Partiamo con il seguente

Lemma 2.15.1 *Sia $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ con $\tilde{\varphi}(x, x_3) = \tilde{\varphi}(x)$ con $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Allora*

$$M_{\tilde{\varphi}}(x, x_3, r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x,x_3)} d\sigma(\tilde{y}) \tilde{\varphi}(\tilde{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_r(x)} dy \frac{\varphi(y)}{\sqrt{r^2 - |y-x|^2}}$$

Dim. Abbiamo che

$$M_{\tilde{\varphi}}(x.x_3, r) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1(0)} d\sigma(n) \varphi(x_1 + rn_1, x_2 + rn_2) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} 2 \int_{S_1^+(0)} d\sigma(n) \varphi(x_1 + rn_1, x_2 + rn_2)$$

dove

$$S_1^+(0) \doteq \left\{ (n_1, n_2, n_3) : n_1^2 + n_2^2 \leq 1; n_3 = \sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2} \right\} \tag{2.51}$$

é la sfera unitaria tagliata in due. Adesso osserviamo che, con α angolo compreso tra la normale n uscente dalla superficie e la perpendicolare all'area infinitesima generata da (dn_1, dn_2) si ha

$$d\sigma(n) = \frac{dn_1 dn_2}{\cos\alpha} = \frac{dn_1 dn_2}{n_3} = \frac{dn_1 dn_2}{\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}}$$

Questo ci permette di scrivere

$$M_{\tilde{\varphi}}(x, x_3, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} dn_1 dn_2 \frac{\varphi(x_1 + rn_1, x_2 + rn_2)}{\sqrt{1 - n_1^2 - n_2^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi r} \int_{B_r(x)} dy \frac{\varphi(y)}{\sqrt{r^2 - |y-x|^2}}$$

dove abbiamo operato la sostituzione $y = x + rn \Rightarrow dy_1 dy_2 = r^2 dn_1 dn_2$ $\diamond$

Adesso siano $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ ed $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ i dati iniziali per

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \Delta u & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, +\infty) \\ u(x, x_3, 0) = \tilde{g}(x, x_3) = g(x) \\ \partial_t u(x, x_3, 0) = \tilde{h}(x, x_3) = h(x) \end{cases}$$

Allora $\tilde{g}$ e $\tilde{h}$ soddisfano Kirchhoff, quindi avremo

$$\tilde{u}(x, x_3, t) = \partial_t[t M_{\tilde{g}}(x, x_3, ct)] + t M_{\tilde{h}}(x, x_3, ct)$$

Per il Lemma precedente notiamo che le medie non dipendono da x_3 e quindi si puó porre

$$u(x,t) = \partial_t \left\{ \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \right\} + \frac{1}{2\pi c} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{h(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \tag{2.52}$$

Proviamo ad osservare meglio la formula... Riscalando su $B_1(0)$ con $n = (n_1, n_2)$ abbiamo che il primo termine é uguale ad [11]

$$\partial_t \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{B_1(0)} dn \frac{c^2t^2 g(x+ctn)}{ct\sqrt{1-n^2}} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{B_1(0)} dn \frac{g(x+ctn) + tc\nabla g(x+ctn) \cdot n}{\sqrt{1-n^2}}$$

adesso compattando le formule arriviamo ad una equivalente alla (2.50) :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_{B_{ct}(x)} dy \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} \tag{2.53}$$

Osserviamo che in $d = 2$ la perturbazione si propaga in maniera assolutamente diversa rispetto al caso $d = 3$ perché adesso il dominio di dipendenza non é la superficie di una sfera bensí tutta l'area di un disco, pertanto una volta che K supporto dei dati iniziali viene ad essere toccato e conseguentemente inglobato in $B_{ct}(x)$ non ne uscirá piú e di conseguenza la perturbazione persisterá in un generico punto x anche molto tempo dopo che esso sia stato toccato dal fronte d'onda. Quindi nel caso bidimensionale il *Principio di Huygens* non vale piú e la quiete si recupererá solo per $t \to \infty$.
Osserviamo che se $t > t_{max}$ allora il valore assunto dalla soluzione nella regione di nostro interesse coincide con quello assunto nel supporto, ovvero

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct} \int_K dy \frac{g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + th(y)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}$$

2.16 Relazioni di dispersione e pacchetti d'onda

Torniamo al caso unidimensionale con $\partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u - \alpha u$ in $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ed $\alpha > 0$. Sappiamo dell'esistenza di soluzioni del tipo onda armonica viaggiante

$$u_v = A\cos(kx - \omega t)$$

valide per $\alpha = 0$ e come *relazione di dispersione* $\omega = kc$. Avevamo anche onde stazionarie

$$u_s = A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

con $\omega = \sqrt{\alpha + k^2c^2}$. Ci chiediamo se $u_v(x,t)$ é valida anche per $\alpha > 0$ ed in particolare, in tal caso, con che velocitá si muove il treno d'onde.
Si puó scrivere $u_v(x,t) = A\cos[k(x - \frac{\omega}{k}t)]$ con $c_k = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\alpha + k^2c^2}}{k} > c$. Ma

[11] Abbiamo usato il seguente cambio: $y = x + ctn \Rightarrow dy = dy_1 dy_2 = c^2t^2 dn_1 dn_2 = c^2t^2 dn$.

c dovrebbe stimare dall'alto le velocitá ...allora la velocitá di fase c_k non é quella da prendere in considerazione!!! Si ha che la perturbazione in un punto x dovrebbe sentirsi al tempo ct mentre, stanti le cose, essa vi arriva prima. In effetti, cosí non é perché il treno d'onde non ha supporto e quindi non trasmette segnali o energia.
Sia adesso

$$u(x,0) = \int dk A(k)\cos(kx)$$

dove supponiamo che $\lim_{k\to\infty} A(k)|k|^n = 0 \ \forall n$ cosí da poter derivare rispetto ad x ed avere una maggiore regolaritá . Poi avremo

$$u(x,t) = \int dk A(k)\cos[k(x - c_k t)] \tag{2.54}$$

Cosa rappresenta la (2.54) ? In essa abbiamo preparato il dato iniziale come sovrapposizione di coseni che inizieranno a viaggiare ognuno ad un proprio tempo fissato e che trasporteranno, tutti alla stessa velocitá, il profilo dei dati iniziali..il quale si manterrá sostanzialmente immutato.
Facciamo un bell'esempio...sia

$$u(x,0) = \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}} \cos(kx) = e^{-\frac{x^2}{4}\varepsilon} cos(kx)$$

con

$$u(x,t) = \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}} \cos[kx - \omega(k)t] = \left(q \doteq \frac{k-k_0}{\sqrt{\varepsilon}} \right) =$$

$$= \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos\left[(k_0 + \sqrt{\varepsilon}q)x - \omega(k_0 + \sqrt{\varepsilon}q)x\right] \simeq$$

$$= \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos\left[k_0 x + \sqrt{\varepsilon}qx - \omega(k_0)t - \omega'(k_0)\sqrt{\varepsilon}qt + o(\varepsilon)\right] =$$

$$= \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos\left[(k_0 x - \omega(k_0)t) + \sqrt{\varepsilon}q(x - \omega'(k_0)t)\right] =$$

$$= \sin[k_0 x - \omega(k_0)t] \int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \sin\sqrt{\varepsilon}q[x - \omega'(k_0)t] = 0$$

Sopravvive solo il termine

$$\int dq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-q^2} \cos[k_0 x - \omega(k_0)t] \cos[\sqrt{\varepsilon}q(x - \omega'(k_0)t)] =$$

$$= \cos[k_0 x - \omega(k_0)t] \int dk \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\varepsilon}} \cos\{(k-k_0)[x - \omega'(k_0)t]\} =$$

$$= \cos[k_0 x - \omega(k_0)t] e^{-\frac{\varepsilon}{4}[x - \omega'(k_0)t]^2}$$

con $\omega(k_0) > c$ ma con *velocitá di gruppo* $\omega'(k_0) < c$. Quindi é questa la velocitá da prendere in considerazione e notiamo che non supera c.

Capitolo 3

L'Equazione del Calore

Sia $u(x,t) \in \mathbb{R}$; $x \in \mathbb{R}^d$ con $d > 0$. Essa é

$$\partial_t u = D\Delta u \tag{3.1}$$

con $D > 0$ coefficiente di diffusione. Scopriremo che questa equazione é invariante per traslazioni in x e t, ma non lo é per inversioni contrariamente all'equazione delle onde, perché essa descrive fenomeni irreversibili mentre l'equazione delle onde descrive fenomeni reversibili...

3.1 Derivazione euristica

Sia S un solido omogeneo ed isotropo; ρ la sua densitá ed $r(x,t)$ il tasso per unitá di massa per cui S riceve o cede calore. Supponiamo , inoltre, che non ci sia equilibrio termico globale ma solo locale per cui potremo definire, localmente, una $e(x,t)$ energia interna. Sia infine $\vartheta(x,t)$ la temperatura del solido. Avremo $e(x,t) = c_v\vartheta(x,t)$ dove c_v é il calore specifico del solido. Adesso supponiamo che valga il Primo Principio della Termodinamica ($U = Q - L$) e che non ci sia presenza di forze di natura meccanica. Allora avremo

$$\frac{d}{dt}\int dx\rho e = -\int_{\partial V} d\sigma J \cdot \nu + \int_V dx\rho r$$

con J *Corrente di calore* ed ν la normale alla superficie. L'ultima equazionesta ad indicare che la variazione nel tempo dell'energia interna di V é uguale alla velocitá con cui il calore fluisce attraverso la superficie verso l'esterno sommata al contributo dovuto alla sorgente esterna.
Si ha che :

$$-\int_{\partial V} d\sigma J \cdot \nu = -\int_V dx\, divJ \Rightarrow \int_V dx(\rho\partial_t e + divJ) = \int_V dx\rho r$$

Poiché l'ultima uguaglianza deve valere per ogni V , ne consegue la seguente *Equazione di Bilancio* (valida per ogni $(x,t) \in V$)

$$\rho\partial_t e + divJ = \rho r \tag{3.2}$$

Sia ora

$$\partial_t \vartheta(x,t) = \frac{1}{\rho c_v} divJ = \frac{r}{c_v} = f \tag{3.3}$$

Tale equazione non é chiusa perché in essa compaiono sia il campo vettoriale ϑ che f. Allora sará necessario fare delle ulteriori ipotessi su J : possiamo supporre la validitá della *Legge di Fourier* [1] la quale, descrive l'evoluzione di J in tali termini:

$$J(x,t) = -k\nabla\vartheta(x,t) \tag{3.4}$$

con $k > 0$. Quindi dalla (3.3) abbiamo:

$$\partial_t \vartheta = -\frac{k}{\rho c_v}\Delta\vartheta = f \tag{3.5}$$

Adesso basta porre $D \doteq \frac{k}{\rho c_v}$ e si ritrova l'equazione del calore...

3.2 Principio del Massimo per l'Equazione del Calore

Rimandiamo alle note del docente reperibili su
$http : //www.mat.uniroma1.it$

3.3 Soluzione fondamentale

Partiamo dal voler risolvere Il Problema di Cauchy globale in $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ ovvero cerchiamo la soluzione per

$$\begin{cases} \partial_t u = D\partial_{xx} u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.6}$$

Premettiamo che , in $t \neq 0$, $g(y)$ diffonde secondo l'equazione del calore e che quindi, potremo scrivere $u(x,t)$ come sovrapposizione della materia diffusa dall'istante $t = 0$. Ricordiamo infine che in $(y, y + dy)$, $g(y)dy$ rappresenta la quantitá di materia presente.
Cerchiamo un nucleo risolvente [2] $\Gamma_d(x,y,t)$ tale che

$$u(x,t) = \int dy \Gamma_1(x,y,t) g(y) \tag{3.7}$$

Tale nucleo é sicuramente ricostruibile per via della linearitá dell'equazione; inoltre esso dovrá avere le seguenti caratteristiche:

1. $$\partial_t \Gamma_1(x,y,t) = D\partial_{xx}\Gamma_1(x,y,t)$$

2. $$\lim_{t\to 0} \int dy \Gamma_1(x,y,t) g(y) = g(x)$$

[1] Valida per gradienti in qualche misura piccoli ovvero linearizzabili.

[2] L'utilizzo di equazioni integrali é dovuto al fatto che tramite esse é piú semplice gestire assieme sia le proprietá che deve possedere la soluzione e sia i dati iniziali.

Ponendo insieme le due proprietá segue che Γ_1 é soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $\Gamma_1(x,y,0) = \delta(x-y)$.
Adesso dobbiamo mostrare quali proprietá dovrá conservare Γ_1 affinché vengano ereditate dalla soluzione $u(x,t)$. La prima di queste proprietá é l' *Invarianza per traslazioni* .
Sia $z \in \mathbb{R}$ ed $u_z(x,t) = u(x+z,t)$. u_z é soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $u_z(x,0) = g(x+z)$. Ovviamente di questo deve rimanere traccia nel nucleo: si avrá

$$u_z(x,t) = \int dy \Gamma_1(x+z,y,t) g(y) = (\text{ lo imponiamo noi }) =$$

$$= \int dy \Gamma_1(x,y,t) g(y+z) = (y \doteq y+z) = \int dy \Gamma_1(x,y-z,t) g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_1(x+z,y,t) = \Gamma_1(x,y-z,t) \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}, \forall t > 0$$

L'imposizione del primo passaggio c'é stata per far si che a quel dato Γ_1 corrispondesse il giusto dato iniziale in base alle precedenti osservazioni su u_z.
adesso sia $y = z$. Questo ci permetterá di osservare che:

$$\Gamma_1(x+z,z,t) = \Gamma_1(x,0,t) \quad \forall x,z \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_1(x,y,t) = \Gamma_1(x-y,0,t) = \Gamma_1(x-y,t)$$

Ne deduciamo che $\Gamma_1(x,t) = \Gamma_1(x,0,t)$ e quindi

$$u(x,t) = \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(y) \tag{3.8}$$

Una seconda proprietá di cui deve godere in nostro nucleo integrale é l' *Invarianza per dilatazioni paraboliche*: sia $\alpha > 0$ e poniamo $u_\alpha(x,t) \doteq u(\alpha x, \alpha^2 t)$. Osserviamo che u_α é soluzione dell'equazione del calore con dato iniziale $u_\alpha(x,0) = u(\alpha x, 0) = g(\alpha x)$. Allora avremo

$$u_\alpha(x,t) = \int dy \Gamma_1(\alpha x - y, \alpha^2 t) g(y) = (\text{ lo imponiamo noi }) =$$

$$= \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(\alpha y) = (y \doteq \alpha y') = \int dy \alpha \Gamma_1[\alpha(x-y'),t] g(\alpha y') =$$

$$= (y' \doteq y) = \int dy \alpha \Gamma_1[\alpha(x-y),t] g(\alpha y) = \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(\alpha y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma_1(x,t) = \alpha \Gamma_1(\alpha x, \alpha^2 t) \qquad \forall x \in \mathbb{R}; \forall \alpha, t > 0$$

Adesso, quindi, poniamo $\alpha = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Ne consegue un'importante relazione :

$$\Gamma_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right) \tag{3.9}$$

Sia ora $\phi(\xi) = \Gamma_1(\xi,t)$. Adesso dobbiamo capire chi é ϕ .
Ricordiamo che deve valere

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma_1 = D \partial_{xx} \Gamma_1 \\ \Gamma_1(x,0) = \delta(0) \end{cases} \tag{3.10}$$

e che si ha conservazione della massa ovvero si ha sempre

$$\int dx\Gamma_1(x,t) = \int dx\Gamma_1(x,0)$$

Pertanto dovremo imporre che vengano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $$\int d\xi\phi(\xi) = 1$$

2. Deve valere il Principio del Massimo ossia

$$\phi(\xi) \geq 0$$

3. $$\partial_t \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)\right] - D\partial_{xx}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)\right] = 0$$

Affinché sia soddisfatta la terza condizione dovremo avere

$$\partial_t \left[\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)\right] = -\frac{1}{2}\frac{1}{t\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{2t\sqrt{t}\sqrt{t}}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

$$\partial_{xx}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}},1\right)\right] = \frac{D}{t\sqrt{t}}\phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Pertanto dovrá essere soddisfatta la seguente equazione differenziale :

$$-\frac{1}{t\sqrt{t}}\left\{\frac{1}{2}\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x}{2\sqrt{t}}\phi'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + D\phi''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\right\} = 0 \tag{3.11}$$

E quindi di conseguenza, operando il cambio di variabili $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$ sará soddisfatta questa equazione differenziale :

$$\frac{1}{2}\phi(\xi) + \frac{1}{2}\xi\phi'(\xi) + D\phi''(\xi) = 0 \tag{3.12}$$

la quale é riscrivibile come

$$\frac{1}{2}(\xi\phi)'(\xi) + D\phi''(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\xi\phi(\xi) + D\phi'(\xi) = c_1$$

Supponiamo, momentaneamente, $c_1 = 0$. Allora avremo

$$\frac{1}{2}\xi\phi + D\phi' = 0 \Leftrightarrow \frac{\phi'}{\phi} = -\frac{\xi}{2D} \Rightarrow \phi(\xi) = c_0 e^{-\frac{\xi^2}{4D}}$$

adesso ritorniamo a supporre $c_1 \neq 0$. Allora si dovrá avere

$$\phi(\xi) = c_0 e^{-\frac{\xi^2}{4D}} + c_1 d\eta e^{-\frac{\xi^2}{4D}} e^{\frac{\eta^2}{4D}}$$

Usando il metodo di variazione delle costanti assieme al fatto che deve essere soddisfatta la seconda condizione, mostreremo che affinché ϕ risulti integrabile su $\mathbb{R}$ deve aversi $c_1 \equiv 0$ ovvero che non esiste

$$\int_{\mathbb{R}} d\eta e^{-\frac{\xi^2}{4D}} e^{\frac{\eta^2}{4D}}$$

Sia $\xi > 0$. Abbiamo

$$\xi e^{-\frac{\xi^2}{4D}} \int d\eta e^{\frac{\eta^2}{4D}} \geq e^{-\frac{\xi^2}{4D}} \int_0^{\xi} d\eta e^{\frac{\eta^2}{4D}} = \left(z \doteq \frac{\eta^2}{2} \right) = e^{-\frac{\xi^2}{2D}} \int_0^{\frac{\eta^2}{2}} dz e^{\frac{z}{2D}} =$$

$$= 2De^{-\frac{\xi^2}{4D}} \left(e^{\frac{\xi^2}{4D}} - 1 \right)$$

che non é integrabile. Osserviamo che, in generale, se si ha

$$\underline{\lim} \xi f(\xi) \geq 0 \Rightarrow f(\xi) \geq \frac{c}{\xi} \Rightarrow \int f(\xi) \geq \int \frac{c}{\xi} \simeq c \log(\xi)$$

che diverge per $\xi \to +\infty$.
Adesso possiamo affermare che

$$\lim_{\xi \to +\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4D}} \int d\eta e \frac{\eta^2}{4D} \geq \lim_{\xi \to +\infty} \int d\xi \frac{2D}{\xi} = +\infty$$

Abbiamo mostrato che $c_1 \equiv 0$, pertanto adesso resta da far si che venga rispettata la prima condizione... bisogna far si che

$$c_0 \int d\xi e^{-\frac{\xi^2}{4D}} = 1 \Rightarrow \left(z = \frac{\xi}{\sqrt{4D}} \right) \Rightarrow c_0 \int dz \sqrt{4D} e^{-z^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_0 \sqrt{4\pi D} = 1 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}}$$

Quindi affinché le tre condizioni vengano rispettate si dovrá avere

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D}} e^{-\frac{\xi^2}{4D}} \tag{3.13}$$

e quindi scopriamo che

$$u(x,t) = \int dy \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} g(y) \tag{3.14}$$

3.4 Convergenza ai dati iniziali della Soluzione fondamentale

Una questione basilare da affrontare, come sempre, é sotto quali ipotesi é assicurata la convergenza ai dati iniziali da parte della soluzione da noi scovata...tanto per cominciare un Lemma:

Lemma 3.4.1 *Sia $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ limitata ossia con $\|g\|_\infty < +\infty$. Allora*

$$\lim_{t \to 0} \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(y) = g(x)$$

Dim. Dobbiamo valutare

$$\int dy \Gamma_1(x-y,t) g(y) - g(x)$$

Adesso ricordando che Γ_1 ha integrale eguale ad 1 , agendo per integrazione per parti avremo che :

$$\int dy\Gamma_1(x-y,t)g(y) - g(x) = \int dy\Gamma_1(x-y,t)\left[g(y)-g(x)\right] =$$

$$= \int dy\frac{1}{\sqrt{t}}\phi\left(\frac{x-y}{\sqrt{t}}\right)\left[g(y)-g(x)\right] = \left(z \doteq \frac{x-y}{\sqrt{t}}\right) =$$

$$= \int dz\phi(z)\left[g(x-\sqrt{t}z)-g(x)\right]^{3}$$

Adesso spezziamo l'integrale in due code di cui una in un compatto ossia con $N > 0$ avremo:

$$\left|\int dz\phi(z)\left[g(x-\sqrt{t}z)-g(x)\right]\right| \leq \int_{|z|\leq N} dz\phi(z)\left|\left[g(x-\sqrt{t}z)-g(x)\right]\right| +$$

$$+\int_{|z|>N} dz\phi(z)\left|\left[g(x-\sqrt{t}z)-g(x)\right]\right| = (\alpha)+(\beta)$$

Poiché (α) si trova nel compatto $[-N,N]$ possiamo effettuare una maggiorazione del tipo

$$(\alpha) \leq \sup_{|z|\leq N}\left|\left[g(x-\sqrt{t}z)-g(x)\right]\right| \cdot 1$$

Quindi (α) va a 0 quando $N \to \infty$ ossia per $t \to 0$. Per quanto riguarda il secondo integrale abbiamo

$$(\beta) \leq 4\|g\|_\infty \int_N^\infty dz\phi(z)$$

Osserviamo che il 4 é stato posto perché abbiamo fatto la maggiorazione su due code con due volte $\|\cdot\|_\infty$. Anche in questo caso $(\beta) \to 0$ se $N \to \infty$. Quindi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{t\to 0}\int dz\phi(z)\left[g(x+\sqrt{t}z)-g(x)\right] = 0 \qquad \diamond$$

Teorema 3.1 *Sia*

$$\begin{cases} \partial_t u = D\partial_{xx}u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

con $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ed $\|g\|_\infty < +\infty$. Allora esiste unica e limitata la soluzione ed essa é

$$u(x,t) = \int dy\Gamma_1(x-y,t)g(y)$$

Dim. Basta osservare che

$$\left|\int dy\Gamma_1(x-y,t)g(y)\right| \leq \int dy\Gamma_1(x-y,t)|g(y)| \leq \|g\|_\infty \cdot 1 = \|g\|_\infty$$

Allora $\|u(\cdot,t)\| \leq \|g\|_\infty$ perché avevamo supposto di avere la limitatezza.

[3] In realtá sarebbe $\phi(-z)$ ma ϕ é pari...

3.5 Problema di Cauchy in $d > 1$

Sia in $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.15}$$

In $d = 1$ avevamo $u(x,t) = \int dy \Gamma_1(x-y,t)g(y)$ con $\Gamma_1(x,t) = (\sqrt{4\pi Dt})^{-1} \exp(-\frac{x^2}{4Dt})$ dove $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$. Adesso invece avremo

$$\Gamma_d(x,t) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma_1(x_i,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}} \tag{3.16}$$

Per sincerarcene basta osservare che:

$$\partial_t \Gamma_d(x,t) = \partial_t \prod_{i=1}^{d} \Gamma_1(x_i,t) = \sum_{i=1}^{d} \left(\prod_{j \neq i} \Gamma_1(x_j,t) D\partial_{x_i}^2 \Gamma_1(x_i,t) \right) =$$

$$= D \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 \Gamma_d(x,t) = D\Delta\Gamma_d(x,t)$$

3.6 Esistenza ed Unicitá in $d > 1$

Teorema 3.2 *Sia $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ e $\|g\| < +\infty$.*
Allora esiste unica la soluzione dell'equazione del calore nella classe delle funzioni $w \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^d \times (0,+\infty)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \times [0,+\infty))$ e tali che $\forall T > 0$ si abbia che $\sup_{\mathbb{R} \times [0,T]} |w(x,t)| < +\infty$. *Infine*

$$[\Gamma_d(\cdot,t) * g(\cdot)](x) = \int dy \Gamma_d(x-y,t)g(y) \tag{3.17}$$

Dim. L'unicitá é un corollario del principio del massimo perché le soluzioni sono limitate nella classe a cui appartengono. Va dimostrata l'esistenza. Si ha

$$|u(x,t)| = \left| \int dy \frac{1}{(4D\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} g(y) \right| \leq \|g\|_\infty \int dz \frac{1}{(4D\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{z^2}{4Dt}} \leq \|g\|_\infty$$

Quindi la soluzione é limitata e si ha

$$\lim_{t \to 0} \int dy \Gamma_d(x-y,t)g(y) = g(x) \qquad \diamond$$

3.7 Proprietá caratteristiche della Soluzione fondamentale

La soluzione fondamentale dell'equazione del calore gode di alcune proprietá di rilievo delle quali ora parleremo:

1. Posto $g(x) > 0$ il dato iniziale concentrato in una data regione al tempo $t = 0$, abbiamo sempre che per $t > 0$ $u(x,t) > 0$ ed in particolare notiamo che la velocitá di propagazione, contrariamente a quanto avveniva per l'equazione delle onde, non é finita bensí infinita!!! Ció significa che il dato iniziale diffonde *istantaneamente* su tutto $\mathbb{R}$.

2. Supponiamo di avere $R > 0$ ed $g(x) \equiv 0$ se $|x| \geq R$ In questa situazione osserviamo che (con $x > R$)

$$|u(x,t)| \leq \int_{-R}^{R} dy \frac{1}{\sqrt{4D\pi t}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4Dt}} |g(y)| \leq \frac{2R\|g\|_\infty}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{\frac{-(x-R)^2}{4Dt}}$$

L'ulltima quantitá va a 0 per $x \to \infty$ e per $t \to 0$

3. Se il dato iniziale $g(x)$ non é sufficientemente regolare al punto da possedere un numero finito di discontinuitá (un salto ogni tanto) , allora la soluzione $u(x,t)$ continua ancora ad avere senso[4]; in particolare si osserva che essa regolarizza il dato iniziale. Per questo si dice che l'equazione del calore é *regolarizzante* .

4. Anche nel caso in cui g non fosse limitata ma avesse un comportamento del tipo $g \simeq e^{c|x|^\delta}$ con $\delta > 2$, la soluzione da noi cercata continuerebbe a soddisfare l'equazione del calore .

5. Osserviamo che si ha un'ottima dipendenza dal dato iniziale perché in presenza di due soluzioni u_1 ed u_2 corrispondenti a due distinti dati iniziali g_1 e g_2 , avremmo $|u_1 - u_2| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$.

3.8 Equazione del calore con sorgente

Sia in $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + f \\ u(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.18}$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$u(x,t) = [\Gamma_d(\cdot,t) * g(\cdot)](x) + w(x,t) = \int dy \Gamma_d(x-y,t) g(y) + w(x,t)$$

Quindi, richiedendo che la soluzione abbia questa forma, andandola a sostituire nel sistema (3.18) notiamo che esso é soddisfatto da w con dato iniziale $w(x,0) = 0$ pertanto ci siamo ricondotti al risolvere

$$\begin{cases} \partial_t w = D\Delta w + f \\ w(x,0) = 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Useremo il metodo di Duhamel ovvero sfruttando la linearitá dell'equazione ed immaginando f come somma di tante forzanti infinitesime attive per $s < t$, avremo una $w(x,t;s)$ tale che

$$\begin{cases} \partial_t w = D\Delta w \\ w(x,s;s) = f(x,s) \end{cases} \Rightarrow w(x,t;s) = \int dy \Gamma_d(x-y,t-s) f(y,s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(x,t) = \int_0^t ds w(x,t;s) = \int_0^t ds \int dy \Gamma_d(x-y,t-s) f(y,s)$$

[4]Ovviamente a patto che g sia ancora limitata ed integrabile nonostante le sue irregolaritá.

Questa dovrebbe essere la soluzione. per sincerarsene basta osservare che:

$$\partial_t w(x,t) = \lim_{s\to t}\int_0^t ds \int dy\Gamma_d(x-y,t-s)f(y,s) = f(x,t)+$$

$$+\int_0^t ds\partial_t \int dy\Gamma_d(x-y,t-s)f(y,s) = f(x,t)+$$

$$+D\Delta\int dy\Gamma_d(x-y,t-s)f(y,s) = f + D\Delta w$$

Allora va bene come soluzione.

Oss. 3.1 *Va precisato che tale risultato é in qualche misura falso perché a rigore si avrebbe*

$$\partial_t\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{4\pi D}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4Dt}}$$

e di conseguenza avremmo che in $t = s$ divergerebbe un integrale del tipo

$$\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}$$

3.9 Esistenza ed Unicitá in $\mathbb{R}^d$ in presenza di una forzante

Teorema 3.3 *Sia $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$; $\|g\| < +\infty$. Siano limitate* [5] *anche $f, \nabla f, \partial_{xx}f$ dove $f \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R}^d \times [0,T])$. Sia infine*

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u + f & \mathbb{R}^d \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3.20}$$

Allora esiste unica e limitata la soluzione ed essa é

$$u(x,t) = \int dy\Gamma_d(x-y,t)g(y) + V(x,t) \tag{3.21}$$

dove

$$V(x,t) = \int_0^t ds\int dy\Gamma_d(x-y,t-s)f(y,s) \tag{3.22}$$

Dim. Dobbiamo mostrare che $V(x,t)$ soddisfa

$$\begin{cases} \partial_t V = D\Delta V + f \\ V(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$V(x,t) = \int_0^t ds\int dy\frac{1}{(t-s)^{\frac{d}{2}}}\Gamma_d\left(\frac{x-y}{\sqrt{t-s}},1\right)f(y,s) = \left(z \doteq \frac{x-y}{\sqrt{t-s}}\right) =$$

$$= \int_0^t ds\int dz\Gamma_d(z,1)f(x+\sqrt{t-s}z,s)$$

[5] In veritá le presenti ipotesi possono essere fortemente indebolite, ma qui le porremo per semplificarci la dimostrazione.

Adesso per le ipotesi fatte possiamo derivare formalmente ed avere

$$\partial_t V(x,t) = f(x,t)\cdot 1 + \int_0^t ds \int dz \Gamma_d(z,1)\nabla f(x+\sqrt{t-s}z,s)\frac{z}{2\sqrt{t-s}}$$

Osserviamo che

$$\Gamma_d(z,1)\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{1}{(4\pi D)^{\frac{d}{2}}}e^{-\frac{|z|^2}{4D}} = D\nabla\Gamma_d(z,1)$$

Di conseguenza

$$\partial_t V(x,t) = f(x,t) + \int_0^t \int dz D\nabla\Gamma_d(z,1)\nabla f(x+\sqrt{t-s}z,s)\frac{1}{\sqrt{t-s}}$$

Adesso non ci resta che integrare per parti. Ora che lo andremo a fare, il contributo al bordo sará nullo perché f é limitata e perché Γ_d é una gaussiana...

$$\partial_t V = f(x,t) + \int_0^t dsD \int dz\Gamma_d(z,1)\Delta f(x+\sqrt{t-s}z,s) = f + D\Delta V$$

Si noti che l'ultimo passaggio é stato possibile perché l'operatore Δ lo abbiamo pensato applicato ad x che non é una variabile d'integrazione; per questo l'abbiamo potuto portare fuori dall'integrale.

3.10 Metodo delle riflessioni per il problema di Cauchy-Dirichlet

Adesso torniamo al caso unidimensionale. Sia

$$\begin{cases} \partial_t u = D\partial_{xx}u & (0,L)\times(0,T) \\ u(x,0) = g(x) & [0,L] \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \forall t \in [0,+\infty) \end{cases} \tag{3.23}$$

Cerchiamo una soluzione valida su tutto $\mathbb{R}$ che in $[0,L]$ coincida con il profilo del dato inizale $g(x)$. Opereremo un'estensione per disparitá e poi per periodicitá sulla soluzione

$$\tilde{u}(x,t) = \int dy\Gamma_1(x-y,t)\tilde{g}(y)$$

con $\tilde{g}$ che dovrá essere tale che

$$\begin{cases} \tilde{g}(x) = g(x) & x\in[0,L] \\ \tilde{g}(x) = -g(-x) & x\in[-L,0] \\ \tilde{g}(x+2L) = \tilde{g}(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Teorema 3.4 *$u = \tilde{u}$ é soluzione dell'equazione del calore* $\forall x \in [0,L]$.

Dim. Vogliamo riportare tutta $\tilde{u}$ in $[0,L]$:

$$u(x,t) = \int dy\Gamma_1(x-y,t)\tilde{g}(y) = \sum_{\mathbb{Z}}\int_{(2n-1)L}^{(2n+1)L} dy\Gamma_1(x-y,t)\tilde{g}(y) =$$

$$= (y' = y - 2nL) = \sum_{\mathbb{Z}} \int_{-L}^{L} dy' \Gamma_1(x - y' - 2nL, t)\tilde{g}(y' + 2nL) =$$

$$= (\text{ per la periodicitá di g }) = {}^{6} \sum_{\mathbb{Z}} \int_{-L}^{L} dy \Gamma_1(x - y - 2nL, t)\tilde{g}(y) =$$

$$= \sum_{\mathbb{Z}} \int_{0}^{L} dy \Gamma_1(x - y - 2nL, t)g(y) - \sum_{\mathbb{Z}} \int_{-L}^{0} dy \Gamma_1(x - y - 2nL, t)g(-y) =$$

$$= (-y \doteq y) = \sum_{\mathbb{Z}} \int_{0}^{L} dy \{\Gamma_1(x - y - 2nL, t) - \Gamma_1(x + y - 2nL, t)\} g(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{0}^{L} dy G_D(x, y, t)g(y)$$

dove per $x, y \in [0, L]$

$$G_D(x, y, t) = \sum_{\mathbb{Z}} \Gamma_1(x - y - 2nL, t) - \Gamma_1(x + y - 2nL, t) \tag{3.24}$$

Adesso resta da verificare che $u(x, t)$ verifichi i dati iniziali e le condizioni di (3.23). Come prima cosa vogliamo che $u(0, t) = u(L, t)$ quindi porremo

$$\int_{0}^{L} dy G_D(0, y, t)g(y) = \int_{0}^{L} dy G_D(L, y, t)g(y) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_D(0, y, t) = G_D(L, y, t) = 0 \qquad \forall t > 0, \forall y \in [0, L]$$

Si ha, osservando da vicino le cose che

$$G_D(0, y, t) = \sum_{\mathbb{Z}} \Gamma_1(-y - 2nL, t) - \Gamma_1(y - 2nL, t)$$

ma Γ_1 é una gaussiana e quindi $\Gamma_1(-y, t) = \Gamma_1(y, t)$ e di conseguenza $G_D(0, y, t) = 0$. Mentre per quanto riguarda $G_D(L, y, t)$ osserviamo che

$$G_D(L, y, t) = \sum_{\mathbb{Z}} \Gamma_1(L - y - 2nL, t) - \Gamma_1(L + y - 2nL, t)$$

ma

$$\Gamma_1(L - y - 2nL, t) = \Gamma_1(-L + y + 2nL, t) = \Gamma_1(y + L + (2n - 2)L, t)$$

Poiché stiamo sommando su tutto $\mathbb{Z}$, sommare su $2(n-1)$ o su $2n$ é del tutto equivalente, per questo abbiamo $G_D(L, y, t) = 0$

[6] Togliamo gli apici per evitare di sovraccaricare la notazione.

3.11 Metodo di Fourier per il problema di Cauchy-Dirichlet

Dopo aver risolto il Problema di Cauchy-Dirichlet col metodo delle riflessioni, proviamo a risolverlo tramite quello di separazione delle variabili. Cerchiamo autovalori ed autofunzioni (λ_n, v_n) tali che

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) & x \in (0, L) \\ v(0) = v(L) = 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

Abbiamo per $n \geq 1$

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Dobbiamo costruire $u(x,t)$ come sovrapposizione di w_n e v_n ovvero

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} w_n(t) v_n(x)$$

con w_n che deve soddisfare $\dot{w}_n(t) = D\lambda_n w_n(t)$.
Andando a sostituire v_n nella scrittura precedente di u , troviamo che

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} w_n(0) e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.26}$$

dove $w_n(0)$ é calcolato imponendo che siano soddisfatte le condizioni iniziali:

$$g(x) = \sum_{n\geq 1} w_n(0) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_n(0) = \hat{g}_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Adesso vanno fatte due piccole precisazioni: come prima cosa si ricordi che Condizione Sufficiente affinché u sia effettivamente soluzione del Problema di Dirichlet é che $g \in \mathcal{C}^1([0, L])$. Infine notiamo che g si prolunga con regolaritá $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}$ prima per disparitá e poi per periodicitá .

3.12 Ipotesi di regolaritá su $g(x)$ e loro indebolimento

Il nostro intento é cercare di richiedere meno regolaritá possibile per il dato iniziale $g(x)$. Possiamo e dobbiamo farlo... Abbiamo chiuso il precedente paragrafo con $g \in \mathcal{C}^1$. Questa adesso sará l'ipotesi di regolaritá da cui partiremo per poi renderci conto che é eccessiva.
Osserviamo come prima cosa che per il Teorema di Fourier, data la regolaritá di g , $u(x,t)$ ammette uno sviluppo del tipo

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \hat{g}_n(t) e^{-\lambda_n D t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.27}$$

solo se converge assolutamente la serie dei coefficienti ossia $\sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n| < \infty$. Allora avrebbe anche senso operare il seguente

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = g(x) \qquad x \in [0,L]$$

ed in tal caso la convergenza che avremmo sarebbe uniforme in $[0,L]$.
Avremo anche che $u(x,t)$ va a 0 molto rapidamente e che i valori da essa assunti in $t > 0$ sono controllati dal valore assunto in $t = 0$. Adesso si osservi che per $t > 0$ si ha:

$$\left| \frac{d^j}{dt^j}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\hat{g}_n(t)e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right| \leq C_{n,\alpha,j}n^{2j+\alpha}e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t} \tag{3.28}$$

Le cose, viste cosí ci portano ad affermare che la serie definisce una u continua su $[0,L]\times[0,\infty)$ ma in particolare da (3.28) é evidente che u é assolutamente sommabile per cui essa non solo é continua ma molto di piú...$u \in \mathcal{C}^\infty((0,L)\times(0,\infty))$.
Adesso facciamo una ulteriore osservazione: allo stato attuale delle ipotesi poste si puó affermare che per $t\to\infty$ si ha

$$|u(x,t)| \leq \sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t} \leq e^{-\frac{\pi^2 D}{L^2}t}\sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|$$

Abbiamo maggiorato il tutto con il primo termine della serie.
É arrivato il momento di indebolire le ipotesi: invece di richiedere che $\sum|\hat{g}_n| < \infty$ possiamo semplicemente richiedere che $|\hat{g}_n| < C$? Il rischio é di perdere la possibilitá di recuperare il dato iniziale per $t \to 0$, potremmo farlo a meno di qualche punto di discontinuitá.
Proviamo ad effettuare una nuova stima, ma stavolta useremo la disuguaglianza di Bessel:

$$\int_0^L dx g(x)^2 = \sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|^2 \Rightarrow |u(x,t)| \leq \sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|^2}\sqrt{\sum_{n\geq 1}e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}} \leq \sqrt{\sum_{n\geq 1}|\hat{g}_n|^2 e^{-\frac{\pi^2 D}{L^2}t}}\sqrt{\sum_{n\geq 2}e^{-\frac{2(n^2-1)\pi^2 D}{L^2}t}} \leq$$

$$\leq Ce^{-\frac{\pi^2 D}{L^2}t} \qquad \forall t \geq 1$$

L'ultima quantitá va a 0 per $t \to \infty$.
In definitiva scopriamo che é sufficiente richiedere che $g \in \mathcal{C}^0$.

3.13 Metodo di Fourier per il Problema di Cauchy-Neumann

Adesso occupiamoci del seguente problema:

$$\begin{cases} \partial_t u = D\partial_{xx}u & (0,L)\times(0,T) \\ u(x,0) = g(x) & [0,L] \\ \partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(L,t) & \forall t \in [0,+\infty) \end{cases} \tag{3.29}$$

Al solito, cerchiamo una coppia $(\lambda_n, v_n(x))$ che soddisfi

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) \\ v'(0) = 0 = v'(L) \end{cases} \tag{3.30}$$

Abbiamo pe $n \geq 0$ (perché in questo caso avremo a che fare con dei coseni)

$$v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Una volta definiti i coefficienti di Fourier come

$$\hat{g}_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx g(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

potremo scrivere lo sviluppo in serie del dato iniziale e la soluzione stessa come:

$$g(x) = \frac{1}{2}\hat{g}_0 + \sum_{n\geq 1}\hat{g}_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad u(x,t) = \frac{1}{2}w_0(t) + \sum_{n\geq 1}w_n(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{3.31}$$

Ricordiamoci che w_n deve soddisfare $\dot{w}_n(t) = \lambda_n D w_n(t)$. Di conseguenza avremo, come nel caso del Problema di Dirichlet, che

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\hat{g}_0 + \sum_{n\geq 1}\hat{g}_n e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Osserviamo adesso che

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{\hat{g}_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L dx g(x)$$

e che quindi, in media, g si dispone per $t \to \infty$ su tutto $\mathbb{R}$ come una funzione costante.
Infine scopriamo che se soddisfatte le ipotesi del Problema di Neumann, la massa totale $\int_0^L dx u(x,t)$ si conserva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_0^L dx u(x,t) &= \int_0^L dx \partial_t u(x,t) = D\int_0^L dx \partial_{xx} u(x,t) = \\ &= D[\partial_x u(L,t) - \partial_x u(0,t)] \equiv 0 \end{aligned}$$

3.14 Osservazioni...spettrali

Sia il seguente

$$\begin{cases} \partial_t u = D\Delta u & \Omega \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = 0 & \overline{\Omega} \\ \begin{cases} (D) \quad u(x,t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ (N) \quad \partial_\nu u(x,t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \end{cases} \end{cases} \tag{3.32}$$

Anche in questo caso ci auguriamo di trovare (λ_n, v_n) che ci permettano di poter esprimere u come

$$u(x,t) = \sum_n w_n(0)e^{\lambda_n D t}v_n(t) \tag{3.33}$$

Si puó dimostrare che esistono certamente questi (λ_n, v_n) ed inoltre essi per il problema (D) saranno del tipo $0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$ mentre per il problema (N) sará presente anche l'autovalore associato ad $n = 0$ e quindi $0 = \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n$.
Notiamo che il fatto che per ogni n si abbia $\lambda_n < 0$ ci assicura una convergenza molto rapida alla soluzione.

Oss. 3.2 *Siano $v_n(x)$ e $v_k(x)$ con i rispettivi autovalori λ_n e λ_k (dei quali supponiamo l'esistenza) tali che sia soddisfatto*

$$\begin{cases} \Delta v_n = \lambda_n v_n \\ \Delta v_k = \lambda_k v_k \end{cases} \tag{3.34}$$

allora avremo

$$\lambda_n \int_\Omega dx v_n v_k = \int_\Omega dx \Delta v_n v_k = (\text{ Teorema di Gauss }) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} d\sigma(y) \partial_\nu v_n(y) v_k(y) - \int_\Omega dx \nabla v_n \nabla v_k = - \int_\Omega \langle \nabla v_n \nabla v_k \rangle$$

Il termine di bordo é sempre nullo sia se si prendono in considerazione le condizioni di (D) che quelle di (N).
Il calcolo che abbiamo effettuato é identico per v_k e quindi scopriamo che ∇ é un operatore simmetrico.

Oss. 3.3 *Dal precedente calcolo si ha*

$$\lambda_n \int_\Omega dx v_n v_k = \lambda_k \int_\Omega dx v_n v_k \Rightarrow (\lambda_n - \lambda_k) \int_\Omega dx v_n(x) v_k(x) = 0$$

Quindi scopriamo che per autovalori distinti le rispettive autofunzioni corrispondenti sono ortogonali ossia $v_k \perp v_n$ se $\lambda_n \neq \lambda_k$

Oss. 3.4 *Se $k \equiv n$ si ha*

$$\lambda_n = \frac{-\int_\Omega dx |\nabla v_n(x)|^2}{\int_\Omega dx v_n(x)^2} \leq 0$$

Tali autovalori sono sempre negativi tranne quando l'autofunzione é una costante. Questo va bene nel caso (N), ma non per (D) dove lo spettro deve essere tutto strettamente negativo.

3.15 Derivazione microscopica dell'equazione del calore

Data la natura diffusiva dell'equazione del calore, non si puó attuare una derivazione da un sistema meccanico, bensí seguiremo una strada ti tipo statistico. Partiremo dal moto browniano e facendo qualche passeggiata aleatoria ci ritroveremo tra le mani l'equazione del calore!!!
Supponiamo di avere una soluzione acquosa in cui vi siano immerse delle particelle. Macroscopicamente osserviamo che il sistema é in quiete mentre microscopicamente si osserva che le particelle si muovono con egual probabilitá in

qualsiasi direzione, generando un moto apparentemenmte caotico.[7] Affermiamo che la causa di tali moti é l'infinito sovrapporsi degli urti subiti dalla singola particella a causa delle restanti; tali urti, in media, macroscopicamente non danno variazioni al sistema.
Supponiamo ora di avere un reticolo unidimensionale sul quale faremo muovere la nostra particella con passo ε e discretiziamo i movimenti anche nel tempo. Per cui $x \in \varepsilon\mathbb{Z}$ e $t \in \tau\mathbb{N}$. Nel nostro esperimento mentale pensiamo ad una dinamica in cui la particella si trovi in un mezzo che le dia gli urti provocandone il movimento nelle due direzioni in modo equiprobabile con $\mathbb{P} = \frac{1}{2}$: la particella esegue una passeggiata aleatoria [8]
Siano $\{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ variabili di Bernoulli indipendenti ed identicamente distribuite. Abbiamo

$$\mathbb{P}(\xi_j = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\xi_j = -1) \tag{3.35}$$

ed

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \tag{3.36}$$

Adesso, posto $N = \frac{t}{\tau}$, definiamo $X_t^\varepsilon = \varepsilon S_{\frac{t}{\tau}}$. X_t^ε ci da la posizione della particella al tempo t, inoltre dipende solo da ε perché supponiamo $\tau = \tau(\varepsilon)$. Il nostro obiettivo ora é quello di effettuare ulimite di scala per $\varepsilon \to 0$ in modo tale che X_t^ε non abbia una distribuzione di probabilitá banale. Come prima cosa osserviamo che

$$\mathbb{E}(X_t^\varepsilon) = \varepsilon\mathbb{E}(S_{\frac{t}{\tau}}) = \varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}(\xi_j) = 0$$

$$Var(X_t^\varepsilon) = \mathbb{E}[(X_t^\varepsilon)^2] = \varepsilon^2\sum_{i,j=1}^{N}\mathbb{E}(\xi_j,\xi_i) = \varepsilon^2\sum_{i=j;i=1}^{N}\mathbb{E}(\xi_i^2) = N\varepsilon^2 = \frac{t}{\tau}\varepsilon^2$$

Nello studio del fenomeno dobbiamo pensare t fissato quando scaliamo il passo del reticolo. Ora con degli accorgimenti dobbiamo far si che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^2}{\tau} = C \neq 0$$

e quindi $0 < \mathbb{E}[(X_t^\varepsilon)^2] < \infty$. Bisognerá effettuare una dilatazione parabolica, stando attenti a cosa accade alla ditribuzione di probabilitá...
Sia $P_\varepsilon(x,t) = \mathbb{P}(X_t^\varepsilon = x)$ con $x \in \varepsilon\mathbb{Z}$ ed $t \in \tau\mathbb{N}$, inoltre supponiamo che in $t = 0$ la particella si trovi in $x = 0$ e qundi $X_0^\varepsilon = 0$. Il nostro scopo é costruire un'equazione che descriva le variazioni di P_ε. Si ha

$$P_\varepsilon(x,t+\tau) = \mathbb{P}(X_{t+\tau}^\varepsilon = x) = \mathbb{P}(X_{t+\tau}^\varepsilon = x|X_t^\varepsilon = x+\varepsilon)\mathbb{P}(X_t^\varepsilon = x+\varepsilon)+$$

$$+\mathbb{P}(X_{t+\tau}^\varepsilon = x|X_t^\varepsilon = x-\varepsilon)\mathbb{P}(X_t^\varepsilon = x-\varepsilon) = \frac{1}{2}[P_\varepsilon(x+\varepsilon,t) + P_\varepsilon(x-\varepsilon,t)]$$

Quindi

$$P_\varepsilon(x,t+\tau) - P_\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2}[P_\varepsilon(x+\varepsilon,t) + P_\varepsilon(x-\varepsilon,t) - 2P_\varepsilon(x,t)] \tag{3.37}$$

[7] La grandezza delle particelle del nostro esperimento é dell'ordine di 10^{-3} mm.
[8] Osserviamo che vi é perdita di memoria ad ogni passo effettuato.

Mostreremo che $\forall x, t \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{\varepsilon\to 0} X_t^\varepsilon = X_t$, inoltre tale convergenza sará vera in forma debole. Adesso definiamo per $x \in [a, b]$

$$\mathbb{P}(X_t^\varepsilon \in [a,b]) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{x\in\varepsilon\mathbb{Z}} P_\varepsilon(x,t) = \mathbb{P}(X_t \in [a,b])$$

Se si suppone valida questa convergenza si puó ottenere una caratterizzazione della distribuzione di probabilitá a cui si converge.
Adesso affermiamo che con $F(y, t) \geq 0$ e tale che $\int_{\mathbb{R}} dyF(y, t) = 1$ si ha

$$\mathbb{P}(X_t \in [a,b]) = \int_a^b dyF(y,t) \tag{3.38}$$

Oss. 3.5 *Possiamo vedere le cose in maniera del tutto equivalente prendendo ϕ continua e limitata. Allora scriveremo*

$$\mathbb{E}[\phi(X_t^\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon\to o} \sum_{x\in\varepsilon\mathbb{Z}} P_\varepsilon(x,t)\phi(x) =$$

$$= \mathbb{E}[\phi(X_t)] = \int dyF(y,t)\phi(y)$$

Torniamo a noi. Per come si evolve la cosa, abbiamo che $P_\varepsilon(x, t) \simeq \varepsilon F(x, t)$; proviamo a sosttituire in (3.37) usando gli sviluppi di Tayor:

$$F(x, t+\tau) - F(x,t) = \partial_t F(x,t)\tau + o(\tau)$$

Con la stessa procedura troviamo che[9]

$$F(x+\varepsilon,t)-F(x,t)+F(x-\varepsilon,t)-F(x,t) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_{xx}F(x,t)+\frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_{xx}F(x,t)+o(\varepsilon^2)$$

Scopriamo che[10]

$$\partial_t F(x,t)\tau + o(\tau) = \frac{1}{2}\varepsilon^2\partial_{xx}F(x,t) + o(\varepsilon^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \partial_t F(x,t) + \frac{o(\tau)}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{\tau}\partial_{xx}F(x,t) + \frac{o(\varepsilon^2)}{\tau} \tag{3.39}$$

Ora non ci resta che scegliere ε e τ tali che $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^2}{\tau} = 2D > 0$ Non ci resta che passare al limite per $\varepsilon \to 0$ nella (3.39) e ritrovare finalmente l'equazione del calore!!!

$$\partial_t F(x,t) = D\partial_{xx}F(x,t) \tag{3.40}$$

Oss. 3.6 *Osserviamo che $\mathbb{E}[\phi(X_t^\varepsilon)]$ tende a $\int dyF(y,t)$ per $\varepsilon \to 0$ ed a $\mathbb{E}[\phi(X_0^\varepsilon)]$ per $t \to 0$; tale valore atteso, a sua volta, tende a $\phi(0)$ quando $\varepsilon \to 0$. A tale valore tende anche l'integrale quanto $t \to 0$. Quindi abbiamo che $F(y, t)$ tende a $\delta(y)$ e pertanto*

$$\begin{cases} \partial_t F = D\partial_{xx}F \\ F(x,0) = \delta(x) \end{cases} \tag{3.41}$$

sappiamo giá che questo problema ammette soluzione ed essa risulta essere

$$F(x,t) = \Gamma_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{3.42}$$

[9] Prima deriveremo per ε e poi per $-\varepsilon$.
[10] Ricordiamoci nella prossima formula dell' $\frac{1}{2}$ presente nella (3.37).

3.16 Sul coefficiente di diffusione

Perdendo la struttura reticolare, effettuando il limite di scala, abbiamo avuto accesso ad informazioni importanti: facendo si che

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^2}{\tau} = 2D \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} X_t^\varepsilon = X_t$$

abbiamo imparato che

$$\mathbb{P}(X_t \in [a,b]) = \int_a^b dy \Gamma_1(y,t) \tag{3.43}$$

Inoltre adesso sappiamo che[11]

$$\mathbb{E}(X_t) = \int dy \Gamma_1(y,t) = 0$$

$$Var(X_t) = \mathbb{E}[(X_t)^2] = \int dy \Gamma_1(y,t) y^2 = 2Dt$$

Adesso scopriamo perché D é detto coefficiente di diffusione:la varianza ci dice al tempo t quanta materia si trova in x. Abbiamo allora $D = \frac{\mathbb{E}[(X_t)^2]}{2t}$ e al tempo t $X_t \simeq \sqrt{2Dt}$.
Adesso si vede perché nell'equazione del calore abbiamo velocitá di diffusione infinita: la particella avrá velocitá $v = \frac{\varepsilon}{\tau}$ che per $\varepsilon \to 0$ tende a $+\infty$: la particella ha probabilitá non nulla di trovarsi ovunque per qualsiasi tempo si prenda in considerazione.

3.17 Interpretazione generale nel continuo

É arrivato il momento di chiedersi quale legame ci sia tra la precedente derivazione, dove avevamo una singola particella, e l'equazione stessa, per la quale, invece, abbiamo una concentrazione di massa. Supponiamo di fare, anche in questo caso, una trattazione di tipo statistico (e non deterministico) in cui anche la distribuzione iniziale sia aleatoria, cioé nella quale supporremo che il punto di partenza cambi ad ogni esperimento. Avremo

$$\mathbb{P}(x_0 \in [a,b]) = \int_a^b dy g(y) \tag{3.44}$$

e quindi

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(X_t \in [a,b]) = \int_a^b dy g(y)$$

Ne consegue che $F(y,t)$ dovrá soddisfare l'equazione del calore con dato iniziale non piú $\delta(x)$ ma $g(x)$. Allora con $g(y) \geq 0$[12] dovremo avere

$$\mathbb{P}(X_t \in [a,b]) = \int_a^b dy F(y,t) = \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(y) = C(x,t)$$

[11] Il valore atteso é nullo perché la gaussiana é pari.
[12] Questa richiesta serve a far si che g sia una distribuzione di probabilitá per la posizione iniziale.

dove $C(x,t)$ sará soluzione di

$$\begin{cases} \partial_t C = D\partial_{xx} C \\ C(x,0) = g(x) \end{cases} \tag{3.45}$$

Implicitamente qui abbiamo supposto che ci sia diffusione e che le particelle non interagiscano tra loro, bensí percepiscano solo il mezzo in cui sono immerse; ognuna di esse sará governata dal moto browniano. Avremo allora[13]

$$\int dx C(x,t) \simeq \frac{\#(\text{ particelle in } [a,b])}{N} = \frac{\#(i : X_t^{(i)} \in [a,b])}{N}$$

dove i rappresenta la i-esima particella, alla quale abbiamo associato $X_t^{(i)}$. Adesso l'ultima quantitá ha probabilitá $\mathbb{P} = 1$ per la Legge dei Grandi Numeri di essere eguale ad

$$\int_a^b dx \int dy \Gamma_1(x-y,t) g(y)$$

perché tutte le particelle hanno lo stesso comportamento.

[13] N éil numero totale di particelle immerse nel mezzo ed é dell'ordine di 10^{20}

Capitolo 4

Teoria del potenziale

4.1 Definizioni e prime proprietá

Siano l' *Equazione di Laplace*

$$\Delta u = 0 \tag{4.1}$$

e l'*Equazione di Poisson*

$$\Delta u + f = 0 \tag{4.2}$$

con $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^d$ ed $f = f(x)$ rappresentante un moto. Cercheremo delle soluzioni di tipo classico ovvero delle $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ per il Problema di Dirichlet

$$(D) \begin{cases} \Delta u + f = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = a(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

Osserviamo che il problema (4.3) puó essere scomposto in due problemi distinti (D1) e (D2):

$$(D1) \begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = a(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \qquad (D2) \begin{cases} \Delta u + f = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.4}$$

Una volta in possesso di u_1 soluzione di (D1) e di u_2 soluzione di (D2), $u = u_1 + u_2$ sará soluzione di (D).
Ricordiamo che u si dice *armonica* in Ω se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e soddisfa l'equazione di Laplace.

4.2 Soluzioni per $d = 1$

Sia ora $\Omega = (0, L)$ e siano

$$(D1) \begin{cases} u''(x) = 0 & x \in (0,L) \\ u(0) = a_1 \\ u(L) = a_2 \end{cases} \qquad (D2) \begin{cases} u''(x) = -f(x) & x \in (0,L) \\ u(0) = 0 = u(L) \end{cases} \tag{4.5}$$

Il nostro obiettivo é, ovviamente, quello di arrivare ad una soluzione di (D); ma noi vogliamo che tale soluzione sia espressa in forma di nucleo risolvente di una

opportuna equazione integrale.
La soluzione di (D1) é rapida da calcolare ed essa é

$$u(x) = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{L} x \tag{4.6}$$

mentre la soluzione di (D2) si esprime come

$$u(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x dy \int_0^y dy' f(y') = c_1 + c_2 x - \int_0^x dy' f(y') \int_{y'}^x dy =$$

$$= c_1 + c_2 x - \int_0^x dy (x - y) f(y)$$

Adesso dobbiamo imporre le condizioni iniziali:

$$u(0) = 0 \Rightarrow c_1 \equiv 0$$

$$u(L) = 0 \Rightarrow c_2 L - \int_0^L dy (L - y) f(y) = 0 \Rightarrow c_2 \equiv \frac{1}{L} \int_0^L dy (L - y) f(y)$$

Ci resta qualche altro passaggio da operare...abbiamo

$$u(x) = \frac{1}{L} x \int_0^L dy (L - y) f(y) - \int_0^x dy (x - y) f(y) =$$

$$= \int_0^x dy x \left[\frac{L - y}{y} - (x - y) \right] f(y) + \int_x^L dy \frac{x(L - y)}{L} f(y) =$$

$$= \int_0^x dy \frac{x}{L} (Lx - xy + Ly - Lx) f(y) + \int_x^L dy \frac{x(L - y)}{L} f(y) =$$

$$= \int_0^x dy \frac{y(L - x)}{L} f(y) + \int_x^L dy \frac{x(L - y)}{L} f(y) =$$

$$= \int_0^L dy G(x, y) f(y)$$

dove

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{y(L-x)}{L} & y < x \\ \frac{x(L-y)}{L} & y > x \end{cases} \tag{4.7}$$

Siamo riusciti a porre la soluzione in forma di nucleo integrale cosí da inglobare in un'unica funzione sia le condizioni al bordo che la soluzione stessa.

4.3 Proprietá del Nucleo risolvente

$G(x, y)$ gode di alcune interessanti proprietá che di seguito andiamo ad elencare:

1. $G \in \mathcal{C}([0, L] \times [0, L])$ e si raccorda con continuitá nei punti ove $x = y$ ponendo $G(x, x) = \frac{x(L-x)}{L}$.
2. $G(x, y) = G(y, x)$.
3. $G(0, y) = G(L, y) = 0 \ \forall y \in [0, L]$.

4. $$\partial_x G(x,y) = \begin{cases} -\frac{y}{L} & y < x \\ \frac{L-y}{y} & y > x \end{cases} = \frac{L-y}{y} - H(x-y)$$

Osserviamo che $\partial_x G(y^+, y) - \partial_x G(y^-, y) = -1$ ovvero la derivata ha una discontinuitá nell'attraversare la diagonale.

Oltre a queste proprietá ce n'é un'altra: abbiamo certamente che se $x \neq y$ allora $\partial_{xx} G(x,y) = 0$ ma quest risultato va accettato con cautela. Esso non ha il senso solito che avrebbe per una qualsiasi funzione, dato che giá $\partial_x G(x,y)$ presenta delle irregolaritá. Un senso lo si puó dare utilizzando il formalismo delle distribuzioni e quindi ponendo

$$\partial_{xx} G(x,y) = -\delta(x-y) \tag{4.8}$$

Inoltre se abbiamo una φ regolare e a supporto compatto in $(0, L)$ potremo anche scrivere

$$\int dx G(x,y) \varphi''(x) = -\varphi(y) \tag{4.9}$$

e scoprire che G é soluzione del seguente problema:

$$\begin{cases} \partial_{xx} G + \delta(x-y) = 0 \\ G(0,y) = G(L,y) = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Infine troveremo naturalmente

$$u(x) = \int dy G(x,y) f(y)$$

Oss. 4.1 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e sia il problema (D2). Per questo nucleo risolvente il problema diventa*

$$\begin{cases} \Delta_x G(x,y) + \delta(x-y) = 0 & (x,y) \in \Omega \\ G(x,y) = 0 & (x,y) \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.11}$$

Osserviamo che si ha un certo G_d che soddisfa il (4.11) in tutto $\mathbb{R}^d$ e che di conseguenza $G(x,y) = G_d(x,y) + \gamma(x,y)$ dove γ ci permetterá di controllare le condizioni al bordo e risolverá

$$\begin{cases} \Delta_x \gamma(x,y) = 0 \\ \gamma(x,y) = -G_d(x,y) \end{cases} \tag{4.12}$$

4.4 Soluzione fondamentale

A questo punto sappiamo che il nostro nucleo integrale deve soddisfare $\Delta_x G_d(x,y) = -\delta(x-y)$ con $x, y \in \mathbb{R}^d$. Sia adesso $G_d(x,y) \doteq \Phi_d(x-y)$. Da adesso in poi ricordiamo sempre che

$$\Delta \Phi_d(x) = -\delta(x) \tag{4.13}$$

$$\begin{cases} \Delta \Phi_d(x) = 0 & \forall x \neq 0 \\ \int_{\mathbb{R}^d} dx \Delta \Phi_d(x) \varphi(x) = -\varphi(0) & \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{4.14}$$

Affermiamo che Φ_d gode di certe proprietá: una di queste é l'*invarianza per rotazioni.* Quindi dovrá essere del tipo

$$\Phi_d(x) = \psi(|x|) \tag{4.15}$$

In tal caso prendiamo $R \in SO(3)$ ed $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ e poniamo $f_R(x) = f(Rx)$. Osserviamo che:

$$\partial_{x_i} f_R(x) = \partial_{x_i} f(Rx) = \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k} f(Rx) \partial_{x_i} (Rx)_k = \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k} f(Rx) R_{ki}$$

dove R_{ki} é l'elemento di posto (k,i) in R. Poi

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f_R(x) = \sum_{k,h=1}^{d} \partial_{x_h} \partial_{x_k} f(Rx) R_{ki} R_{hj}$$

Quindi l'Hessiamo di $f_R(x)$ sará

$$D^2 f_R(x) = R^T \{D^2 f(Rx)\} R$$

e di conseguenza all'operatore di Laplace si scriverá come

$$\Delta f_R(x) = Tr\{D^2 f_R(x)\} = Tr\{R^T [D^2 f(Rx) R]\} = Tr\{D^2 f(Rx)\} = \Delta f(Rx)$$

Quindi l'operatore di Laplace commuta con le rotazioni. Adesso, visto che $\Delta\Phi_d(x) = 0 \ \forall x \neq 0$, ne consegue che $\Delta\Phi_d(Rx) = 0 \ \forall x \neq 0$. Quindi anche per $\Phi_d(Rx)$ possiamo ancora affermare che é armonica $\forall x \neq 0$
Sia ora $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ una funzione test.[1] Abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \Delta\varphi(x) \Phi_d(Rx) = (Rx \doteq x') = \int_{\mathbb{R}^d} dx' \Delta\varphi(R^T x') \Phi_d(x') =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dx' \Delta\varphi_{R^T}(x') \Phi(x') = -\varphi_{R^T}(0) = -\varphi(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_d(Rx) = \Phi_d(x)$$

Adesso é arrivato il momento di capire che equazione soddisfa $\Phi_d(x) = \psi(|x|)$. Sappiamo che per $x \neq 0$ dovrá soddisfare

$$\Delta_x \psi(|x|) = 0 \Rightarrow div[\nabla_x \psi(|x|)] = 0 \Rightarrow div\left[\psi'(|x|)\frac{x}{|x|}\right] = 0 \tag{4.16}$$

Adesso ricordando che con $v \in \mathbb{R}^d$ vettore ed $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ si aveva

$$div(fv) = \nabla f \cdot v + f[div(v)]$$

abbiamo che l'ultima quantitá nella (4.16) é uguale ad

$$\nabla_x \left(\frac{\psi'(|x|)}{|x|}\right) \cdot x + \frac{\psi'(|x|)}{|x|} div(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\psi'(|x|)}{|x|} - \frac{\psi(|x|)}{|x|^2}\right) \frac{x}{|x|} \cdot x + \frac{\psi''(|x|)}{|x|} d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} \psi'(|x|) = 0 \qquad \forall x \neq 0$$

[1]Nel prossimo cambio di variabili avremo lo Jacobiano uguale ad 1 perché R é una rotazione.

Allora ponendo $r = |x|$ avremo la seguente equazione

$$\psi''(r) + \frac{d-1}{r}\psi'(r) = 0 \qquad r > 0 \tag{4.17}$$

Ora distinguiamo i due casi $d = 1$ e $d > 1$. Nel primo caso abbiamo che $\psi''(r) = 0$ ci porta a $\psi(r) = c_1 r + c_2$. La scelta opportuna é $c_1 = -\frac{1}{2}$ e $c_2 = 0$ pertando per $d = 1$ avremo

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{2}|x| \tag{4.18}$$

Osserviamo che

$$\partial_x \Phi_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x < 0 \\ -\frac{1}{2} & x > 0 \end{cases} = -\frac{1}{2} - H(x) \to \Phi_1''(x) = -\delta(x)$$

quindi ritroviamo i dati iniziali. Se $d > 1$ allora l'equazione (4.17) puó scriversi come

$$\frac{d}{dr}\log\psi'(r) = \frac{1-d}{r} \Rightarrow \log\psi'(r) = (1-d)\log r + \tilde{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi'(r) = e^{\tilde{c_1}} r^{1-d} = (c_1 \doteq e^{\tilde{c_1}}) = c_1 r^{1-d}$$

Se $d = 2$ abbiamo $\psi'(r) = c_1\frac{1}{r}$ e di conseguenza $\psi(r) = c_1 \log r + c_2$. Per quanto riguarda $d > 2$ abbiamo $\psi'(r) = c_1 r^{1-d}$ e di conseguenza $\psi(r) = c_1 r^{2-d} + c_2$. In definitiva

$$\Phi_d(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & d = 2 \\ \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x|} & d = 3 \end{cases} \tag{4.19}$$

4.5 Le formule di Green

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$; $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ ed $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Sia $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Abbiamo tre formule di rappresentazione. La prima di queste é

$$\int_\Omega dxv\Delta u = \int_{\partial\Omega} d\sigma v\partial_\nu u - \int_\Omega dx\nabla u\nabla v \tag{4.20}$$

Osserviamo che il primo integrale va inteso in senso improprio perché in realtá esso é un limite ed a priori Δu potrebbe divergere sulla frontiera. Adesso dimostriamo la formula.
Dim. Sappiamo giá che $div(v\nabla u) = \nabla u\nabla v + v\Delta u$. Sia adesso[2] $\Omega' \subset\subset \Omega$ Allora

$$\int_{\Omega'} dxdiv(v\nabla u) = \int_{\Omega'} dx\nabla u\nabla v + \int_{\Omega'} dxv\Delta u$$

ma per il Teorema della Divergenza abbiamo che il primo integrale é eguale ad:

$$\int_{\Omega'} dxdiv(v\nabla u) = \int_{\partial\Omega'} d\sigma v\partial_\nu u$$

Ora bisogna essere cauti: integrare su tutto Ω significa far tendere Ω' ad Ω. Adesso cerceremo di farlo. Sia $\delta > 0$ un parametro definiamo

$$\Omega'_\delta \doteq \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq \delta\}$$

[2] Ossia Compattamente Contenuto.

La formula precedente vale ancora se al posto di Ω' mettiamo Ω'_δ. Poi faremo tendere a zero δ osservando che tale operazione non perde senso quando ci si avvicina alla frontiera perché ∇v e ∇u sono continui fino ad essa. Quindi in definitiva avremo

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma v \partial_\nu u = \int_\Omega dx v \Delta u + \int_\Omega dx \nabla v \nabla u$$

ossia la (4.20).
Adesso, sotto le stesse ipotesi di prima, passiamo alla seconda formula di Green:

$$\int_\Omega dx\,(v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} d\sigma (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) \tag{4.21}$$

Per ricavarla basta sottrarre la (4.20) con la sua corrispondente dove avremo scambiato il ruolo di u e v.
Per quanto riguarda la terza formula, le cose sono lievemente piú complesse. Manteniamo le ipotesi precedentemente fatte e torniamo ad utilizzare $G_d(x,y) = \phi_d(x-y)$. Sia $x \in \Omega$. Avremo

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[G_d(x,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu G_d(x,y)] - \int_\Omega dy G_d(x,y)\Delta u(y) \tag{4.22}$$

Dim. Sia $d = 3$ e sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset\subset \Omega$. In $d = 3$ avevamo

$$G_d(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}$$

Sia adesso $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon(x)$. Useremo la (4.21) su $u(y)$ ed $G(x,y)$ viste come fuzioni di y dato che x é fissato.[3]

Oss. 4.2 *Osserviamo che*

$$\Delta_y G(x,y) = 0 \qquad \forall y \in \Omega$$

Si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} G(x,y)\Delta u(y) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[G(x,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu G(x,y)] +$$

$$+ \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y)[G(x,y)\partial_\nu u(y) - u(y)\partial_\nu G(x,y)]$$

[4] Ovviamente il nostro scopo é capire cosa accade quando $\varepsilon \to 0$, ma prima di farlo notiamo che in $d = 3$ la funzione $\frac{1}{|x-y|}$ é integrabile contro una $u \in \mathcal{C}^1$ e quindi avremo benissimo che per l'integrale a primo membro varrá

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon} dy G(x,y)\Delta u(y) = \int_\Omega dy G(x,y)\Delta u(y)$$

Adesso mancano glia ltri due termi a secondo membro. Notiamo che su $\partial B_\varepsilon(x)$ si ha $G(x,y) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$, inoltre si ha

$$\partial_\nu G(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|^2}\frac{x-y}{|x-y|} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$$

[3] Da adesso invece di G_d scriveremo semplicemente G.
[4] Chiameremo nel seguito,all'occasione, questo ultimo integrale $I_\varepsilon(x)$

Il cambio di segno é dovuto alla scelta di come orientare $\nu = \frac{x-y}{|x-y|}$. In questo caso abbiamo $-\nu$. Ora infine abbiamo

$$I_\varepsilon(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y)u(y) - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(y)\partial_\nu u(y) = (\alpha) + (\beta)$$

Con opportuni punti $y_\varepsilon, y_\varepsilon^0 \in \partial B_\varepsilon(x)$ troveremo

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\alpha) = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2 u(y_\varepsilon) = u(x)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\beta) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\partial_\nu u(y_\varepsilon^0) = 0$$

4.6 Proprietá delle funzioni armoniche

Il questo paragrafo studieremo delle importanti proprietá di cui godono le funzioni armoniche. Lo faremo per mezzo di sei lemmi ed attraverso delle osservazioni sulla particolarissima natura delle suddette funzioni.

Lemma 4.6.1 *Sia $\Omega \in \mathbb{R}^d$ dominio regolare*[5] *e limitato, sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, sia u armonica in Ω ossia $\Delta u = 0$. Allora*[6]

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma(y)\partial_\nu u(y) = 0 \tag{4.23}$$

Dim. Sia $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tale che $v \equiv 1$. Useremo la prima formula di Green (4.20):

$$\int_\Omega dy v\Delta u = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)v\partial_\nu u - \int_\Omega dy\nabla u\nabla v$$

Il primo integrale é nullo perché per ipotesi la funzione é armonica mentre il terzo lo é anch'esso perché, per come abbiamo definito v, $\nabla v = 0$. pertanto si perviene alla tesi. $\diamond$

Lemma 4.6.2 *Questo é un lemma di rappresentazione. Sotto le stesse ipotesi precedentemente fatte, fissato $x \in \Omega$ si ha*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[G_d(x,y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu G_d(x,y)u(y)] \tag{4.24}$$

ossia il valore assunto dalla funzione nei punti interni al dominio é univocamente determinato da quelli assunti sulla frontiera di quest'ultimo da G_d ed u e le loro rispettive derivate normali.

Dim. Basta utilizzare la (4.22) dove il secondo integrale é nullo perché per ipotesi la funzione é armonica in Ω. $\diamond$

Lemma 4.6.3 (Primo teorema della media) *Indeboliamo le ipotesi su u ossia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ dove $\Omega = B_R(x_0)$, sia $\Delta u = 0$. Allora*

$$u(x_0) = \frac{1}{|\partial B_R(x_0)|}\int_{\partial B_R(x_0)} d\sigma(y)u(y) \tag{4.25}$$

ossia il valore assunto da u in un punto x_0 é la media di quelli assunti sulla superficie di una sfera che abbia tale punto come centro.

[5] Per regolare intenderemo aperto e connesso.
[6] Si ricordi nel seguito che $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$

Dim. Sia $d = 3$. Adesso abbiamo ipotesi piú deboli sulla regolaritá di u , pertanto prendiamo $0 < r < R$. Per tale raggio abbiamo $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ Osserviamo ora che su $\partial B_r(x_0)$ si hanno

$$G_d(x_0, y) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$\partial_\nu G_3(x_0, y) = \nabla_y G_3(x_0, y) \cdot \nu = -\nabla_y G_3(x_0, y) \frac{x-y}{|x-y|} = -\frac{1}{4\pi r^2}$$

Adesso possiamo applicare il lemma (4.6.2) ed avere

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi r} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) \partial_\nu u(y) - \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) \left(-\frac{1}{4\pi r^2}\right) u(y)$$

Adesso il primo integrale é nullo per il lemma (4.6.1) quindi ci resta

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y) \qquad \forall r < R$$

Poiché abbiamo posto che $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ $\forall r < R$ possiamo arrivare alla tesi operando il seguente

$$\lim_{r \to R} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R(x_0)} d\sigma(y) u(y) \qquad \diamond$$

Lemma 4.6.4 (Secondo teorema della media) *Sotto le stesse ipotesi del lemma (4.6.3) affermiamo che*[7]

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} dy u(y) \tag{4.26}$$

Dim. Fissiamo $r < R$ e per il lemma (4.6.3) abbiamo che

$$|\partial B_r(x_0)| u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^R dr |\partial B_r(x_0)| u(x_0) = \int_0^R dr \int_{\partial B_r(x_0)} d\sigma(y) u(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |B_R(x_0)| u(x_0) = \int_{B_R(x_0)} dy u(y)$$

Ora dividendo tutto per $|B_R(x_0)|$ abbiamo la tesi. $\diamond$

Lemma 4.6.5 (Principio del massimo) *Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ in Ω. Allora se $u \neq cost$ si ha che*

$$\min_{\partial\Omega} u(x) < u(x) < \max_{\partial\Omega} u(x) \qquad \forall x \in \Omega \tag{4.27}$$

ossia la funzione assume massimo e minimo sulla frontiera del dominio.

[7] Si noti che la (4.26) é caratterizzante per le funzioni armoniche.

Prima di dimostrare il lemma osserviamo, solamente, che contrariamente al caso dell'equazione del calore, qui non abbiamo una qualche frontiera parabolica sulla quale unicamente, la funzione puó assumere il proprio massimo o minimo, ossia non ci sono punti privilegiati e questo accade perché siamo dinanzi ad un'equazione di tipo ellittico.
Dim. Sia $u \neq cost$ ed interessiamoci al caso $u(x) < \max_{\partial\Omega} u$.[8] Sia $x_0 \in int\Omega$ e assumiamo, per assurdo, che

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \equiv M$$

Dimostreremo che $u(x) \equiv M$. Sia $B_R(x_0)$ e ad essa applichiamo il lemma (4.6.4):

$$u(x_0) = \frac{1}{|B_R(x_0)|} \int_{B_R(x_0)} dyu(y) = M$$

L'integrale é uguale ad M per ipotesi. Ora osserviamo che non si puó avere $u(y) > M$, al piú possiamo avere $u(y) < M$; quindi per la continuitá di u e per il fatto che $u < M$ si deve avere necessariamente $u(y) = M \ \forall y \in \overline{B_R(x_0)}$.
Adesso dobbiamo mostrare che per qualsiasi $x_1 \neq x_0$ si ha $u(x_1) = M$. Prenderemo una successione di palle concatente che mettano in collegamento x_0 con x_1 ossia una successione di centri z_j tale che: $z_0 = x_0$, $B_{R_j}(z_j) \subset \Omega$, $z_N = x_1$ e che $z_j \in B_{R_{j-1}}(z_{j-1})$. Per l'arbitrarietá di x_1 si ha che $u(x) = M$ in tutto Ω e questo é assurdo perché avevamo assunto che u non fosse costante. $\diamond$

Oss. 4.3 *Osserviamo che Ω é un aperto e quindi non si potranno avere strozzature, lungo le quali non riusciremmo a prolungare la funzione.*

Lemma 4.6.6 *Sia Ω un dominio regolare e limitato, $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$. Si ha che*

1. *se $u(y) \equiv 0$ allora $u \equiv 0 \ \forall y \in \partial\Omega$.*
2. *se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ ed $\partial_\nu u \equiv 0 \ \forall y \in \partial\Omega$ allora $u \equiv cost$.*

Dim. Il primo caso é diretta conseguenza del lemma (4.6.5) mentre per quanto riguarda il secondo, useremo la (4.20) con $v = u$ e quindi avremo

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma(y) u \partial_\nu u(y) = \int_\Omega dy |\nabla u|^2$$

Il primo integrale é nullo perché per ipotesi $\partial_\nu u = 0$, pertanto abbiamo

$$|\nabla u|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = cost \qquad \diamond$$

Adesso mostriamo in forma di corollari delle dirette conseguenze dei precedenti lemmi. Tramite essi avremo ulteriori informazioni sulla singolare natura delle funzioni armoniche.

Corollario 4.6.1 *Sia $\Delta u = 0$ in Ω. Allora $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

[8] Per l'altra disuguaglianza basterá prendere in esame $-u$.

Dim. Sia $D \subset \Omega$ ed $u \in \mathcal{C}^2(D) \cap \mathcal{C}^1(\overline{D})$. Applichiamo il lemma (4.6.2) ,con $B_\delta(x_0) \subset D$, a D. Quindi sappiamo che per gli $x \in B_\delta(x_0)$ si avrá

$$u(x) = \int_{\partial B_\delta(x_0)} d\sigma(y)[G_d(x,y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu G_d(x,y)u(y)]$$

Vogliamo dimostrare che nel punto x_0 é possibile eseguire infinite derivate, quindi osserviamo che

$$\partial_\nu G_d(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\frac{y-x}{|y-x|} \cdot \nu(y)$$

Adesso allora abbiamo che $x - y$ non puó essere minore di $d(\partial D, \partial B_\delta)$. Di conseguenza ci troviamo in una regione limitata, una sorta di anelllo, nella quale, tenendoci lontani da ∂D abbiamo infinite derivate. $\diamond$

Corollario 4.6.2 *Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$. Allora non esistono in Ω massimi e minimi locali propri.*

Dim. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo l'esistenza in un $x_0 \in \Omega$ di un massimo proprio, prendiamo un dominio D tale che $x_0 \in intD \subset \Omega$. In tale dominio applichiamo il Principio del massimo; ne consegue che in D si ha $u = cost$. Questo é assurdo perché contraddice le ipotesi. $\diamond$

Corollario 4.6.3 *Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $\Delta u = 0$. Allora*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u(x)| \quad \forall x \in \overline{\Omega} \tag{4.28}$$

Dim. Abbiamo

$$|u(x)| \leq \max\left\{\min_{\overline{\Omega}} |u(x)|, \max_{\overline{\Omega}} |u(x)|\right\}$$

Tale valore per il Principio del massimo é eguale a

$$\max\left\{\min_{\partial\Omega} |u(x)|, \max_{\partial\Omega} |u(x)|\right\} = \max_{\partial\Omega} |u(x)| \quad \diamond$$

Corollario 4.6.4 *Sia $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$, $\Delta u = 0$ e supponiamo che $u(x)$ vada a 0 quando $|x| \to \infty$. Allora*

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |u(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \tag{4.29}$$

Dim. Sia $\Omega \subset B_R(0)$ ed u armonica in $B_R(0) \setminus \overline{\Omega}$, il quale é connesso[9]. Adesso usiamo il corollario (4.6.3):

$$|u(x)| \leq \left\{\max_{\partial\Omega} |u(x)|, \max_{\partial B_R(0)} |u(x)|\right\} = \max_{\partial\Omega} |u(x)|$$

L'ultima uguaglianza si ha per $R \to 0$.

[9] Il centro della palla puó essere tranquillamente variato con delle traslazioni.

4.7 Buona posizione del problema di Dirichlet

Sia $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Cerchiamo una soluzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cup \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ per la buona posizione del seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ \Omega \\ u = g & in\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.30}$$

Va dimostrata l'unicitá e l'esistenza di tale soluzione. Qui di seguito ci occuperemo solo della prima: supponiamo di avere due soluzioni distinte di (4.30): siano u_{g_1} e u_{g_2} associate rispettivamente ai dati iniziali g_1 e g_2 . Consideriamo $w = u_{g_1} - u_{g_2}$ e osserviamo che anch'essa soddisfa $\Delta w = 0$ e che su $\partial\Omega$ si ha $w = g_1 - g_2$. Scopriamo che, per il principio del massimo, i dati iniziali al bordo ci permettono di controllare la differenza tra le due soluzioni ossia

$$|w(x)| \leq \max_{\partial\Omega} |w(x)| = \max_{\partial\Omega} |g_1 - g_2| \tag{4.31}$$

Ne segue anche che u é unica! Adesso non ci resta che costruire esplicitamente la soluzione del problema...

4.8 La formula di Poisson

Assumiamo $B_R(0)$ come dominio di validitá della soluzione di (4.30) che andiamo a costruire; assumendo $g \in \mathcal{C}(\partial B_R(0))$ avremo

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ B_R(0) \\ u = g & in\ \partial B_R(0) \end{cases} \tag{4.32}$$

La soluzione sará

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_d R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{g(y)}{|x-y|^d} \tag{4.33}$$

con

$$\sigma_d = \begin{cases} 2\pi & d = 2 \\ 4\pi & d = 3 \end{cases} \tag{4.34}$$

Dim. (d=2) Utilizzeremo il metodo di separazione delle variabili ma prima, per agevolarci nei calcoli, scriveremo tutto in coordinate polari. Allora avremo $x = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ con $0 < r < R$. Quindi $u(x) = u(x_1, x_2) = \tilde{u}(r, \vartheta)$. Adesso abbiamo necessitá di esprimere l'operatore di Laplace in coordinate polari.
Siano i versori $e_r = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ ed $e_\vartheta = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$.[10] allora potremo scriver $x = re_r$ e di conseguenza un incremento infinitesimo di x sará $dx = e_r dr + re_\vartheta d\vartheta$. Pertanto per una generica funzione scalare F avremo

$$dF = \nabla F \cdot dx = (\nabla F \cdot e_r)dr + r(\nabla F \cdot e_\vartheta)d\vartheta$$

ma se $F = F(r, \vartheta)$ allora avremo $\nabla F \cdot e_r = \partial_r F$ ed $\nabla F \cdot e_\vartheta = \partial_\vartheta F$. Di conseguenza osserviamo che l'operatore ∇ possiede una componente lungo e_r ed una lungo e_ϑ ed in definitiva avremo

$$\nabla = e_r \partial_r + \frac{1}{r} e_\vartheta \partial_\vartheta \tag{4.35}$$

[10] Ricordiamo che $\frac{d}{d\vartheta} e_r = e_\vartheta$.

Adesso passiamo all'operatore di Laplace:

$$\Delta F = div(\nabla F) = \nabla \cdot \nabla F = (e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\vartheta\partial_\vartheta)(e_r\partial_r + \frac{1}{r}e_\vartheta\partial_\vartheta) =$$

$$= \partial_{rr}F + \frac{1}{r}\partial_r F + \frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}F$$

Nel giungere all'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $e_r \cdot e_r = 1$ e che l'operatore ∂_r applicato a $\frac{1}{r}e_\vartheta\partial_\vartheta$ da contributo nullo perché $e_r \perp e_\vartheta$.
Adesso, finalmente, passiamo ad applicare il metodo di separazione di variabili cercando una soluzione per $\Delta u(r,\vartheta) = 0$ e quindi una soluzione nella forma

$$u(r,\vartheta) = v(r)\chi(\vartheta)$$

alla quale applicheremo gli operatori, nella forma da noi appena trovata, ricavando la seguente

$$v''(r)\chi(\vartheta) + \frac{1}{r}v'(r)\chi(\vartheta) + \frac{1}{r^2}v(r)\chi''(\vartheta) = 0 \tag{4.36}$$

Supponendo che $v(r)\chi(\vartheta) \neq 0$ dividiamo la (4.36) ritroviamo

$$\frac{\chi''(\vartheta)}{\chi(\vartheta)} = -\frac{r^2v''(r) + rv'(r)}{v(r)} = \lambda$$

dove λ non dipende ne da r ne da ϑ. Adesso abbiamo due problemi agli autovalori. Partiamo da

$$\chi''(\vartheta) = \lambda\chi(\vartheta)$$

con $\lambda = -n^2$ ed $n \geq 0$. Inoltre vogliamo che le soluzioni siano periodiche tali che $\chi(\vartheta) = \chi(\vartheta + 2\pi)$ perché $\chi(\vartheta)$ é un angolo. Adesso abbiamo

$$\chi_n(\vartheta) = a_n\cos(n\vartheta) + b_n\sin(n\vartheta) \tag{4.37}$$

Per quanto riguarda la variabile radiale abbiamo

$$r^2v''(r) + rv'(r) - n^2v(r) = 0$$

Quindi risolvendola troviamo [11]

$$n = 0 \Rightarrow v_0(r) = C_0 + D_0\log r$$

$$n \geq 1 \Rightarrow v_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}$$

Adesso osserviamo che i termini del tipo $\log r$ ed r^{-n} divergono per $r \to 0$ e non consentono di ricostruire una funzione con la regolaritá richiesta pertanto per $n \geq 0$ si deve porre $D_n \equiv 0$.
Adesso abbiamo una collezione di soluzioni particolari

$$u_0(r,\vartheta) = \frac{A_0}{2}$$

$$u_n(r,\vartheta) = [A_n\cos(n\vartheta) + B_n\sin(n\vartheta)]r^n$$

[11] Nella seconda deduzione abbiamo utilizzato per risolvere la (4.37) la sostituzione di Eulero. Essa é $s = \log r$ e quindi abbiamo utilizzato una $\psi(s) = v(e^s)$.

Infine, inseriamo nella formula R, ció ci sará utile nel seguito. Adesso, sfruttando la linearitá dell'equazione possiamo utilizzare il principio di sovrapposizione e scrivere

$$u(r,\vartheta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1}[A_n R^n \cos(n\vartheta) + B_n R^n \sin(n\vartheta)] \left(\frac{r}{R}\right)^n \tag{4.38}$$

Adesso notiamo di avere al bordo $u(r,\vartheta) = g(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta) = \tilde{g}(\vartheta)$ che dipende solo da ϑ poiché R é fissato. Inoltre $g \in \mathcal{C}((0,2\pi))$. Imponendo questo possiamo dedurre che

$$A_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta' \tilde{g}(\vartheta)\cos(n\vartheta') \tag{4.39}$$

$$B_n R^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta' \tilde{g}(\vartheta)\sin(n\vartheta') \tag{4.40}$$

Adesso soffermiamoci sulla regolaritá della soluzione: osserviamo che, essendo limitate le funzioni seno e coseno, i coefficienti sono limitati per n grande ossia

$$|A_n R^n| \leq 2\|\tilde{g}\|_\infty \qquad |B_n R^n| \leq 2\|\tilde{g}\|_\infty$$

Quindi per r piccolo ($r < R$) la serie converge assolutamente con tutte le sue derivate perché il termine $(\frac{r}{R})^n$ va a 0 in modo esponenziale e li controlla.
Adesso é nostra intezione recuperare le condizioni al bordo. Per $r \to R$ perdiamo il fattore di convergenza $(\frac{r}{R})^n$ e quindi la possibilitá di dire che la nostra serie di Fourier converge al bordo. Il motivo di questo risiede nel fatto che le ipotesi fatte su g sono deboli: abbiamo un teorema di convergenza per $g \in \mathcal{C}^1$ ma non per $g \in \mathcal{C}$...questo peró non ci ferma!! Non é necessario passare al limite sotto il segno di somma ma basta sapere che la soluzione, espressa tramite la nostra serie, resta valida al bordo: quindi proviamo a scavalcare il problema risommando la serie in maniera oculata. Si ha $u(r,\vartheta)$ uguale ad [12]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta' \tilde{g}(\vartheta') \left\{1 + 2\sum_{n\geq 1} \cos(n\vartheta')\cos(n\vartheta) + \sin(n\vartheta')\sin(n\vartheta)\left(\frac{r}{R}\right)^n\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta' \tilde{g}(\vartheta') \left\{1 + 2\sum_{n\geq 1} \cos[n(\vartheta - \vartheta')]\left(\frac{r}{R}\right)^n\right\}$$

Adesso poniamo $a = \frac{r}{R}$ e $\psi = \vartheta - \vartheta'$. Ricordiamo che $a < 1$. Ora osserviamo che

$$1 + 2\sum_{n\geq 1}\cos(n\psi)a^n = 1 + 2\Re\sum_{n\geq 1}(e^{i\psi}a)^n$$

Questa serie geometrica ha ragione minore di 1 e quindi converge, anche se é su $\mathbb{C}$, ma anticipatamente, osserviamo che ci sará la presenza di un termine in piú nel numeratore perché stiamo sommando da $n = 1$ e non da $n = 0$. Pertanto abbiamo

$$1 + 2\Re\left(\frac{e^{i\psi}a}{1 - e^{i\psi}a}\right)$$

[12] Il termine 1 tra parentesi graffe si ha perché per $n = 0$ il coseno vale 1.

Moltiplicando per il complesso coniugato si arriva a

$$1+\Re\left[\frac{e^{i\psi}a(1-e^{-i\psi}a)}{|1-e^{i\psi}a|^2}\right]=1+2\frac{a\cos\psi-a^2}{1+a^2-2a\cos\psi}=\frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\psi}$$

Poiché avevamo posto $a=\frac{r}{R}$ ed $\psi=\vartheta-\vartheta'$ ci ritroviamo tra le mani

$$u(r,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\vartheta'\tilde{g}(\vartheta')\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(\vartheta-\vartheta')}$$

Siamo quasi arrivati!! Poniamoci sulla superficie della palla fissando R e quindi ponendo $y=(R\cos\vartheta',R\sin\vartheta')$ ed $x=(r\cos\vartheta,\sin\vartheta)$. Adesso osserviamo che $d\sigma(y)=Rd\vartheta'$. Adesso andando a sostituire il tutto nella precedente formula si ritrova

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}d\sigma(y)\frac{g(y)}{|x-y|^2}$$

che é la formula di Poisson in $d=2$. $\diamond$

4.9 Sulla convergenza al dato iniziale della formula di Poisson

Tutta questa fatica é servita a darci una formula molto importante...ma non é ancora finita. Resta da mostrare che al bordo la funzione assume effettivamente valore $g(x)$, ossia se $\xi\in\partial B_R(0)$ allora va dimostrato che

$$\lim_{x\to\xi}u(x)=g(\xi) \tag{4.41}$$

Il problema sta nel fatto che se $g\in\mathcal{C}^1(\partial B_R(0))$ allora la serie (4.38) convergerebbe assolutamente a $u(x)$ anche senza il termine $(\frac{r}{R})^n$ ma purtroppo la nostra g non é cosí regolare. Adesso cominciamo con l'osservare che se $g\equiv 1$, sul bordo della palla, allora la formula di Poisson soddisferebbe il problema (4.32) e per il principio del massimo i valori assunti da $u(x)$ all'interno di $B_R(0)$ sarebbero dominati da quello assunto al bordo. Cosí si avrebbe

$$1=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}d\sigma(y)\frac{1}{|x-y|^2}$$

quindi per $g\in\mathcal{C}(\partial B_R(0))$ e $\xi\in\partial B_R(0)$ dovremo avere

$$g(\xi)=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}d\sigma(y)\frac{g(\xi)}{|x-y|^2}\Rightarrow$$

$$u(x)-g(\xi)=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}d\sigma(y)\frac{u(x)-g(\xi)}{|x-y|^2} \tag{4.42}$$

La (4.42) ci servirá per capire, appunto, il comportamento dell'integrale perché la singolaritá si ha proprio per $x\to\xi$.
Ora sia Γ un tratto di arco con ampiezza δ e riscriviamo la (4.42) come segue:

$$u(x)-g(\xi)=\frac{R^2-|x|^2}{2\pi R}\int_{\partial B_R(0)}d\sigma(y)\frac{u(x)-g(\xi)}{|x-y|^2}=$$

$$= \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_\Gamma d\sigma(y) \frac{u(x) - g(\xi)}{|x-y|^2} + \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_{\partial B_R(0) \setminus \Gamma} d\sigma(y) \frac{u(x) - g(\xi)}{|x-y|^2}$$

Chiameremo i due integrali rispettivamente $I_1(x, \delta)$ ed $I_2(x, \delta)$, osservando che é il primo a contenere la singolaritá e che su di esso dovremo usare maggior cautela. Partiamo da $I_2(x, \delta)$ oseervando che per $x \to \xi$, se δ é piccolo, l'arco si confonde con la tangente e di conseguenza $|y - \xi| > \frac{\delta}{2}$ $\forall y \in \partial B_R(0) \setminus \Gamma$. Quindi possiamo pensare che $|x - \xi| < \frac{\delta}{4}$ e per la disuguaglianza triangolare avremmo che $|y - x| > \frac{\delta}{4}$ $\forall y \in \partial B_R(0) \setminus \Gamma$. Adesso possiamo operare la seguente stima dal basso:

$$|I_2(x, \delta)| \leq \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} 2\|g\|_\infty \left(\frac{4}{\delta}\right)^2 2\pi R = 8 \frac{R^2 - |x|^2}{\delta^2} \|g\|_\infty$$

La quantitá che appare nell'ultima uguaglianza per δ piccolo e per $x \to \xi$ fa si che $R^2 - |x|^2 \to 0$ pertanto

$$\lim_{x \to \xi} I_2(x, \delta) = 0 \tag{4.43}$$

Per quanto riguarda $I_1(x, \delta)$ non opereremo un passaggio al limite ma attueremo una stima utilizzando δ :

$$|I_1(x, \delta)| \leq \max_{y \in \Gamma} |g(y) - g(\xi)| \frac{R^2 - |x|^2}{2\pi R} \int_\Gamma d\sigma(y) \frac{1}{|x-y|^2} =$$

$$= \max_{y \in \Gamma} = o(\delta)$$

Di conseguenza esiste il

$$\overline{\lim_{x \to \xi}} |u(x) - g(\xi)| \leq o(\delta)$$

. allora per δ piccolo e per la sua arbitrarietá abbiamo che tale limite esiste e vale 0. pertanto

$$\lim_{x \to \xi} u(x) = g(\xi) \tag{4.44}$$

4.10 Caratterizzazione delle funzioni armoniche

In virtú dei risultati precedentemente ottenuti e sapendo che per le funzioni armoniche valgono il primo ed il secondo Teorema della media ossia le (4.26) e (4.25), intendiamo stabilire una caratterizzazione delle funzioni armoniche.

Def. Una $u(x) \in \mathcal{C}(\Omega)$ si dice ammettere *la proprietá di media* se valgono le (4.25) e (4.26) $\forall (x, y) : B_r(x) \subset \Omega$.

Teorema 4.1 *Sia $u(x)$ tale che essa goda della proprietá di media. Allora $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ ed é armonica.*

Dim. Sia $B_r(\bar{x}) \subset \Omega$. Definizamo per $x \in B_r(\bar{x})$ la funzione $v(x)$ come

$$v(x) = \frac{R^2 - |x - \bar{x}|^2}{\sigma^d R} \int_{\partial B_r(\bar{x})} d\sigma(y) \frac{u(y)}{|y-x|^d}$$

Tale funzione soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & in\ B_r(\bar{x}) \\ v = u & in\ \partial B_r(\bar{x}) \end{cases}$$

Dimostreremo che $v = u$ in tutta la palla. Sia $w = u - v$ ed osserviamo che, per la linearitá, w gode della proprietá di media anch'essa. Di conseguenza per essa vale il principio del massimo. Notiamo che sul bordo della palla w vale identicamente 0 e che per il principio del massimo $w = 0$ in tutta $B_r(\bar{x})$. Ora per l'arbitrarietá di $\bar{x}$ si deduce che u é armonica in tutto Ω. Di conseguenza, per il corollario (4.6.1) essa é anche differenziabile infinite volte. $\diamond$

4.11 La disuguaglianza di Harnack

Sia $u \in \mathcal{C}^2(B_R(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{\partial B_R(0)})$ ed $\Delta u = 0$ con $u \geq 0$. La seguente uguaglianza ci permette di effettuare delle stime a priori sui possibili valori assumibili dalla nostra funzione armonica partendo, semplicemente, dal valore che essa assume nell'origine.

$$\frac{R^{d-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{d-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{d-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{d-1}} u(0) \tag{4.45}$$

Dim. Siano $y \in \partial B_R(0)$ ed $x \in B_R(0)$. Osserviamo che vale per x ed y

$$R - |x| \leq |y - x| \leq |R + |x| \tag{4.46}$$

Sfrutteremo in questa dimostrazione solo la seconda disuguaglianza; pe l'altra i passi sono analoghi.
Per Poisson abbiamo che

$$u(x) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma^d R} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) \frac{u(y)}{|x - y|^d} \leq$$
$$\leq \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma^d} \frac{1}{(R - |x|)^d} \int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y) u(y)$$

Adesso moltiplichiamo e dividiamo per R^{d-2} e, sfruttando il primo teorema della media, si ha che l'ultima disuguaglianza é eguale ad

$$\frac{R^{d-2}(R + |x|)}{R^{d-1}(R - |x|)^{d-1}} u(0) \qquad \diamond$$

4.12 Il teorema di Liouville

Sia u armonica in $\mathbb{R}^d$ e limitata superiormente (o inferiormente). Allora u é costante.
Dim. Sappiamo che $\exists M : u(x) \leq M \ \forall x \in \mathbb{R}^d$. SIa la funzione $w(x) = M - u(x)$ e su di essa utilizziamo la disuguaglianza di Harnack, la quale, vale $\forall x$ e $\forall R > |x|$. Quindi operiamo un passaggio al limite per $R \to \infty$:

$$\frac{R^{d-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{d-1}} w(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{d-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{d-1}} w(0)$$

Entrambe le disuguaglianze tendono per $R \to \infty$ al valore $w(0)$ e pertanto la funzione $u(x)$ é schiacciata sia dall'alto che dal basso e per il teorema del confronto assume costantemente valore $w(0)$.$\diamond$

4.13 L'equazione di Poisson

In questo paragrafo ci occuperemo dell'equazione di Laplace in presenza di una forzante ossia dell'equazione di Poisson $\Delta u + f = 0$. Supponiamo di essere in $\mathbb{R}^3$. Abbiamo precedentemente costruito una

$$G(x, y) = \phi(x - y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}$$

la quale era soluzione di $\Delta_x G(x, y) = \delta(x-y)$. Fisicamente la si interpreta come il campo elettrico generato da una carica puntiforme posta in y influenzante il punto x.
Supponiamo ora di avere una $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ integrabile. Essendo la nostra una densitá di carica avremo [13]

$$u(x) = \int dy G(x, y) f(y) = \frac{1}{4\pi} \int dy \frac{f(y)}{|x - y|} \tag{4.47}$$

Supponiamo di poter applicare l'operatore di Laplace sotto il segno d'integrale; di conseguenza avremo

$$\Delta u(x) = \int dy \Delta_x G(x, y) f(y) = -\int \delta(x - y) f(y) = -f(x)$$

Purtroppo tali operazioni sono formali e quindi a priori non sappiamo se siano lecite o meno, pertanto, dovremo fare delle ipotesi su f. Procediamo attuando delle stime in termini della forzante, in modo tale da isolare le singolaritá dovute al termine $\frac{1}{|x-y|}$:

$$|u(x)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{B_1(x)} dy \frac{|f(y)|}{|x - y|} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_1(x)} dy \frac{|f(y)|}{|x - y|} \leq$$

$$\leq \max_{y \in B_1(x)} |f(y)| \int_0^1 dr \frac{1}{r} 4\pi r^2 + \frac{1}{4\pi} \|f\|_1$$

con il termine $\frac{1}{|x-y|}$ che trascuriamo perché é piccolo al di fuori della palla unitaria. Di conseguenza abbiamo, supponendo uleriormente che f sia limitata, che

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2}(\|f\|_\infty + \|f\|_1) \tag{4.48}$$

Adesso enunciamo il seguente

Lemma 4.13.1 *Sia $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3)$ integrabile e limitata.*[14] *Allora u é limitata e si ha*[15]

$$\nabla u(x) = \int dy \nabla_x G(x, y) f(y) = -\frac{1}{4\pi} \int dy \frac{1}{|x - y|} \frac{x - y}{|x - y|} f(y) \tag{4.49}$$

e quindi é possibile operare un primo passaggio sotto il segno di integrale da parte dell' operatore ∇ .

[13] La (4.47) definisce quello che si dice un potenziale newtoniano o volumetrico.
[14] Ossia $\|f\|_\infty + \|f\|_1 \leq \infty$.
[15] L'ipotesi di continuitá della f é non necessaria...ma ce ne accorgeremo a posteriori.

Dim. Sappiamo, per ipotesi, che u é limitata e definiamo $v(x) = \nabla u(x)$. Dobbiamo mostrare che tale funzione é ben definita. Si ha

$$\|v(x)\| \leq \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{f(y)}{|x-y|^2} \leq \|f\|_\infty + \|f\|_1$$

Resta da mostrare che v é continua ossia che $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ed é effettivamente il gradiente della funzione u. Sia ora $\varepsilon > 0$ e definiamo, ponendo $z = x - y$

$$G_\varepsilon(x,y) = \phi_\varepsilon(z) = \begin{cases} \phi(z) & |z| > \varepsilon \\ \frac{1}{4\pi}\left(\frac{3}{2\varepsilon} - \frac{z^2}{2\varepsilon^3}\right) & |z| \leq \varepsilon \end{cases} \tag{4.50}$$

Osserviamo che in $z = \varepsilon$ si ha $\phi_\varepsilon(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}$ e che essa in tale punto si raccorda con continuitá $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$; inoltre, per come é stata costruita, si ha che valgono puntualmente le seguenti stime

$$\phi_\varepsilon(z) \leq \phi(z) \qquad |\nabla\phi_\varepsilon(z)| \leq |\nabla\phi(z)|$$

Il motivo dell'introduzione della funzione ϕ_ε risiede nel fatto che la sfrutteremo per costruire un'approssimazione di $u(x)$.
Sia

$$u_\varepsilon(x) = \int dy G_\varepsilon(x,y) f(y) \tag{4.51}$$

Tale funzione é regolare e per essa valgono i teoremi di passaggio al limite per le successioni; si ha che $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ e che

$$\nabla u_\varepsilon = \int dy \nabla_x G_\varepsilon(x,y) f(y) \tag{4.52}$$

Adesso bisogna dimostrare la convergenza uniforme in $\mathbb{R}^3$ di u_ε alla funzione u per $\varepsilon \to 0$ e la convergenza uniforme in $\mathbb{R}^3$ di ∇u_ε alla funzione v sempre per $\varepsilon \to 0$. Partiamo dalla prima; per essa basterá fare la seguente stima[16] :

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} dy |\phi(x-y) - \phi_\varepsilon(x-y)||f(y)| \leq$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x)} dy \frac{1}{4\pi|x-y|} = 2\frac{\|f\|_\infty}{2}\varepsilon^2 = \|f\|_\infty \varepsilon^2$$

Tale quantitá tende a 0 per $\varepsilon \to 0$.
Per quanto concerne la convergenza del gradiente di u_ε abbiamo che

$$|\nabla u_\varepsilon(x) - v(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} dy |\nabla\phi_\varepsilon(x-y) - \nabla\phi(x-y)||f(y)| \leq$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x)} dy \frac{1}{4\pi|x-y|^2} = 2\|f\|_\infty \varepsilon$$

ed anche quest'ultima quantitá si annulla per $\varepsilon \to 0$. $\diamond$

[16] Questo é dovuto ai teoremi di convergenza precedentemente nominati.

Teorema 4.2 *Sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, $\|f\| + \|\nabla f\| < \infty$ ed integrabili. E sia*

$$u(x) = \int dy G(x,y) f(y) \tag{4.53}$$

Allora $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ ed é l'unica soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) + f(x) = 0 \\ \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \end{cases} \tag{4.54}$$

Dim. Dimostriamo innanzitutto l'unicitá della soluzione. Siano per assurdo u_1 ed u_2 entrambe soluzioni di (4.54) e poniamo $w = u_1 - u_2$. La funzione w soddisfa l'equazione di Laplace e si annulla all'infinito, dato che u_1 ed u_2 sono associate alla stessa forzante. Quindi é armonica e limitata, pertanto, per il teorema di Liouville essa vale identicamente $w \equiv 0$. Di conseguenza $u_1 = u_2$. Adesso passiamo all'esistenza della soluzione.
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^3$ e sia $\varepsilon > 0$. Adesso spezziamo il dominio in due settori separati definendo una $B_\varepsilon(x_0)$. Scriveremo $u(x) = u_0(x) + u_1(x)$ ed $\nabla u(x) = \nabla u_0(x) + \nabla u_1(x)$ dove

$$u_0(x) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy G(x,y) f(y) \qquad u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(x_0)} dy G(x,y) f(y)$$

$$\nabla u_0(x) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \nabla_x G(x,y) f(y) \qquad \nabla u_1(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(x_0)} dy \nabla_x G(x,y) f(y)$$

Osserviamo ora che all'interno degli integrali si avrá

$$\nabla_x G(x,y) f(y) = \nabla_x \phi(x-y) f(y) = -(\nabla_y \phi(x-y)) f(y) =$$

$$= -\partial_y \phi(x-y) f(y) = \phi(x-y)\partial_{y_i} f(y) - \partial_{y_i}[\phi(x-y) f(y)]$$

Inoltre notiamo che la derivata parziale rispetto alla i-esima componente dell'ultimo termine sopra indicato é equivalente alla divergenza calcolata lungo la direzione i-esima ossia

$$\partial_{y_i}[\phi(x-y) f(y)] = div[\phi(x-y) f(y) e_i]$$

Pertanto, utilizzando il teorema della divergenza potremo scrivere

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \partial_{y_i}[\phi(x-y) f(y)] = \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \phi(x-y) f(y) e_i \cdot \nu(y)$$

Pertanto

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(x_0)} dy \nabla_x G(x,y) f(y) + \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy \phi(x-y) \nabla f(y) -$$

$$- \int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y) \phi(x-y) f(y) \nu(y)$$

Prendiamo un generico $x \in B_\varepsilon(x_0)$ ed osserviamo che $\nabla u(x) \in \mathcal{C}^\infty$ e quindi $u \in \mathcal{C}^\infty(B_\varepsilon(x_0))$. Le cose non sono cosí semplici per il secondo integrale ma possiamo provare a mettere le cose in un certo modo:

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} dy\phi(x-y)\nabla f(y) = \int dy G(x,y)\partial_{y_i} f(y)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}$$

Adesso é possibile applicare il lemma (4.13.1) a $\partial_{y_i} f(y)\chi_{B_\varepsilon(x_0)}$. Di conseguenza abbiamo che anche in questo caso $u \in \mathcal{C}^2(B_\varepsilon(x_0))$ e quindi per l'arbitrarietá nella scelta sia di ε che di x_0 si ha $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$.
Adesso dobbiamo operare un'altra derivazione...vediamo cosa succede.

$$\Delta u(x) = div(\nabla u(x)) = \int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon(x_0)} dy\Delta_x G(x,y)f(y) + \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy\nabla G(x,y)\cdot\nabla f(y) -$$

$$-\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y)\nabla_x G(x,y)\cdot\nu(y)f(y)$$

Osserviamo che $\nabla_x G(x,y) = 0$ all'interno della palla, nel primo integrale, perché é come se la distribuzione di carica fosse esterna. Ci chiediamo adesso come sia fatto $\Delta(x_0)$. Ricordandoci che

$$\nabla_x G(x_0,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x_0-y|^2}\frac{y-x_0}{|x_0-y|}$$

notiamo che se $y \in \partial B_\varepsilon(x_0)$, l'ultima uguaglianza equivale a

$$\nabla_x G(x,y)\cdot\nu(y)$$

perché

$$\nu(y) = \frac{y-x_0}{|x_0-y|}$$

Allora arriviamo ad

$$\Delta u(x_0) = \int_{B_\varepsilon(x_0)} dy\frac{1}{4\pi|y-x_0|^2}\frac{y-x_0}{|x_0-y|}\cdot\nabla f(y) - \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon(x_0)} d\sigma(y)f(y) \tag{4.55}$$

Chiamiamo il primo integrale $I_0(\varepsilon)$ ed il secondo $I_1(\varepsilon)$. Fatto questo procediamo nel maggiorarli per capire qual' é il loro andamento all'infinito.

$$|I_0(\varepsilon)| \le \|\nabla f\|_\infty \frac{1}{4\pi}\int_{B_\varepsilon(x_0)} dy\frac{1}{|y-x|^2} = \varepsilon\|\nabla f\|_\infty$$

L'ultima quantitá si annulla per $\varepsilon \to 0$ inoltre

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|I_1(\varepsilon)| = -f(x_0)$$

pertanto per il teorema della media integrale si ha in $x = x_0$ che $\Delta u + f = 0$. Poiché x_0 é arbitrario questo vale per ogni x.
Ci resta da mostrare che le condizioni al bordo sono soddisfatte ossia che

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$$

Prendiamo $R > 0$ e sia $|x| > 2R$. Allora

$$u(x) = \int dyG(x,y)f(y) = \int_{B_R(0)} G(x,y)f(y) + \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} dyG(x,y)f(y) =$$

$$= I_0(x) + I_1(x)$$

Ricordando che $|x| > 2R \Rightarrow |x-y| > |x| - |y| > R$ si ha che

$$|I_0(x)| \le \frac{1}{4\pi R} \int_{B_R(0)} dy|f(y)| \le \frac{1}{4\pi R} \|f\|_1$$

Per $R \to \infty$ l'ultima quantit'a si annulla. Passiamo ora ad $I_1(x)$. Scomponiamolo ulteriormente, introducendo una palla di raggio ε, come $I_1(x) = I_2(x) + I_3(x)$. Essi sono rispettivamente

$$I_2(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} dyG(x,y)f(y)$$

$$I_3(x) = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus (B_R(0) \cup B_\varepsilon(x))} dyG(x,y)f(y)$$

Si ha

$$|I_2(x)| \le \frac{1}{2} \|f\|_\infty \varepsilon^2 \qquad |I_3(x)| \le \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)} dy|f(y)|$$

Si noti che nel maggiorare $|I_3(x)|$ lo si é fatto con il massimo assumibile da $G(x,y)$ per qualsiasi ε. Inoltre f é integrabile e quindi avrá code infinitesime quindi,in defintiva per $R \to \infty$ avremo che si annullerá il termine

$$|I_3(x)| \le \frac{o_R(1)}{4\pi\varepsilon}$$

Di conseguenza esiste il

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} |u(x)| \le \frac{1}{2} \|f\|_\infty \varepsilon^2 + \frac{1}{4\pi R} \|f\|_1 + \frac{o_r(1)}{4\pi\varepsilon} \qquad \forall R, \varepsilon > 0$$

Di conseguenza tale limite esiste ed esso vale 0. $\diamond$

4.14 L'equazione di Poisson in domini limitati

Sia adesso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ed in esso cerchiamo una $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ per il seguente problema:

$$\begin{cases} \Delta u + f = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = a(x) & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.56}$$

Cerchiamo una funzione di Green $\mathcal{G} : \overline{\Omega} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ che goda delle seguenti proprietá:

1. $\mathcal{G}(x,y) = \phi(x-y) + g(x,y)$ dove $\forall y \in \Omega$ si ha che $x \mapsto g(x,y)$ e g é armonica in Ω e continua in $\overline{\Omega}$;

2. $\mathcal{G}(x,y) = 0$ se $x \in \partial\Omega$ ed $y \in \Omega$.

$\mathcal{G}(x,y)$ fa si che $G(x,y)$ si annulli sol bordo del dominio Ω e di conseguenza soddisfa

$$\begin{cases} \Delta_x \mathcal{G}(x,y) = -\delta(x-y) & x \in \Omega \\ \mathcal{G}(x,y) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.57}$$

$\mathcal{G}(x,y)$ rappresenta un dominio come superficie conduttrice, equipotenziale, che é stato messo a terra.
Se supponiamo l'esistenza di tale funzione allora essa é unica perché definire $\mathcal{G}$ implica il dover definire la funzione g la quale a sua volta soddisfa il problema

$$\begin{cases} \Delta_x g(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ g(x,y) = -\phi(x-y) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

che altri non é se non un problema di Laplace con dato al bordo continuo. Per questo problema abbiamo giá dimostrato che la soluzione é unica e quindi $g(x,y)$ é unica.
Osserviamo che $g(x,y)$ é la parte regolare di $\mathcal{G}(x,y)$ e che quindi la singolaritá é tutta concentrata in ϕ.

Oss. 4.4 *Si ha che* $g \in \mathcal{C}(\overline{\Omega} \times \Omega)$.

Dim. Prendiamo in considerazione $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega} \times \Omega$. Si ha che

$$|g(x,y) - g(x_0,y_0)| \leq |g(x,y) - g(x_0,y)| + |g(x_0,y) - g(x_0,y_0)|$$

Il primo termine al secondo membro si annulla pe $x \to x_0$ per ogni y fissato, mentre, il secondo, non avendo operato nessuna restrizione su y puó essere cosí maggiorato, essendo g armonica:

$$|g(x_0,y) - g(x_0,y_0)| \leq \max_{x' \in \partial\Omega} |\phi(x'-y) - \phi(x'-y_0)|$$

e l'ultima quantitá si annulla per $y \to y_0$. Pertanto la tesi é dimostrata. $\diamond$

Lemma 4.14.1 *La funzione* $\mathcal{G}(x,y)$ *soddisfa le seguenti proprietá:*

1. $\mathcal{G}(x,y) = \mathcal{G}(y,x)\ \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$
2. $\mathcal{G}(x,y) > 0\ \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$
3. *In* $d = 3$ *si ha* $\mathcal{G}(x,y) < \phi(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}\ \forall x \neq y$

Dim. (Proprietá 1) Utilizzeremo la seconda identitá di Green ossia

$$\int_\Omega dy (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)$$

Isoliamo x ed y con due palle di raggio ε che li abbiano come centro e poniamo $u(z) = \mathcal{G}(z,x)$ ed $v(z) = \mathcal{G}(z,y)$. Si ha che u e v sono funzioni armoniche in $\Omega \setminus (\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)})$ e quindi il primo termine dell'identitá é nullo. Inoltre esse sono le soluzioni fondamentali del problema (4.57) rispettivamente con $\delta(z-x)$ e $\delta(z-y)$, di conseguenza avremo che $u = v = 0$ su $\partial\Omega$ e che quindi la circuitazione nel secondo membro della seconda identitá di Green dovrá essere calcolata solo su $\partial B_\varepsilon(x)$ e $\partial B_\varepsilon(y)$. Quindi avremo

$$0 = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} d\sigma(z)[\partial_\nu \mathcal{G}(z,x)\mathcal{G}(z,y) - \partial_\nu \mathcal{G}(z,y)\mathcal{G}(z,x)] +$$

$$+\int_{\partial B_\varepsilon(y)} d\sigma(z)[\partial_\nu \mathcal{G}(z,x)\mathcal{G}(z,y) - \partial_\nu \mathcal{G}(z,y)\mathcal{G}(z,x)]$$

Adesso va osservato che, nel primo integrale, per $\varepsilon \to 0$ il termine $\partial_\nu \mathcal{G}(z,x)$ é singolare nella forma di $\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}$ e che $\mathcal{G}(z,x)$ lo é nella forma di $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$; pertanto si ha che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \partial_\nu \mathcal{G}(z,y)\mathcal{G}(z,x) = 0 \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} \partial_\nu \mathcal{G}(z,x)\mathcal{G}(z,y) = G(x,y)$$

L'ultimo limite si ha per il teorema della media.
Adesso passiamo al secondo integrale: considerazioni analoghe alle precedenti ci portano ad affermare che, tenuto conto che la singolaritá stavolta si trova in y, esso tende a $-G(y,x)$. Ne segue che G é simmetrica ossia

$$G(x,y) = G(y,x) \qquad \diamond$$

Dim. (Proprietá 2) Sia il dominio Ω ed in esso la solita palla $B_\varepsilon(y)$. Sia $\mathcal{G}(x,y) = \phi(x-y) + G(x,y)$ ed osserviamo che per $x \to y$ ϕ diverge mentre di g possiamo dire che é armonica e dunque regolare. Ne consegue che in $B_\varepsilon(y)$ $\mathcal{G}(x,y) > 0$. Inoltre si ha che $\mathcal{G}$ é armonica anche in $\partial\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ mentre é non negativa su $\partial B_\varepsilon(y)$ e si annulla su $\partial\Omega$. Applicando il principio del massimo a $\Omega \setminus B_\varepsilon(y)$ e per l'arbitrarietá di ε concludiamo che $\mathcal{G} > 0$ in tutto Ω . $\diamond$

Dim. (Proprietá 3) Voler dimostrare la terza proprietá significa mostrare che $g(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. Ma noi sappiamo che $\Delta g = 0$ e che sulla frontiera si ha $g(x,y) = -\phi(x-y)$. Tale quantitá é sempre minore di 0, per il principio del massimo, in tutto il dominio. $\diamond$

Teorema 4.3 *Sia $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ soluzione del problema (4.56). Allora*

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} d\sigma(y)\partial_\nu \mathcal{G}(x,y)a(y) + \int_\Omega dy \mathcal{G}(x,y)f(y) \tag{4.58}$$

Dim. Per ipotesi in Ω si ha $\Delta u = -f$. Prendiamo in considerazione la terza identitá di Green

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[\phi(x-y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu \phi(x-y)u(y)] - \int_\Omega dy\phi(x-y)\Delta u(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[\phi(x-y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu \phi(x-y)a(y)] + \int_\Omega dy\phi(x-y)f(y)$$

Chiamiamo quest'ultima uguaglianza (α) . Adesso usiamo la seconda identitá di Green applicata ad $u(y)$ ed $v(y) = g(x,y)$ la quale, ricordiamo, é armonica e quindi $\Delta_x g = \Delta_y g = 0$ .Di conseguenza il termine $u\Delta v$ sará nullo. Pertanto ritroviamo che

$$-\int_\Omega dy g(x,y)f(y) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[g(x,y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu g(x,y)a(y)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow o = \int_\Omega dy g(x,y)f(y) + \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)[g(x,y)\partial_\nu u(y) - \partial_\nu g(x,y)a(y)]$$

Chiamiamo ques'altra uguaglianza (β) e procediamo nel sommare membro a membro (α) e (β) . Cosí facendo si ritrova che

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} d\sigma(y)\partial_\nu u(y)\mathcal{G}(x,y) - \partial_\nu \mathcal{G}(x,y)a(y) + \int_\Omega dy\mathcal{G}(x,y)f(y)$$

Ci resta da osservare che il termine $\partial_\nu u(y)\mathcal{G}(x,y) = 0$ perché su $\partial\Omega$ si ha $\mathcal{G} = 0$. Di conseguenza ritroviamo la (4.58) . $\diamond$

4.15 Il metodo delle cariche immagine: esempi e applicazioni

Sia al solito Ω un dominio regolare e sia $\mathcal{G}(x,y) = \phi(x-y) + q\phi(x-\bar{y})$ dove $q = q(y) \in \mathbb{R}$ ed $\bar{y} = \bar{y}(y) \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ un punto esterno al dominio e dipendente da y. Si ha che per ogni x ed y fissati vanno cercate $q(y)$ ed $\bar{y}(y)$ tali che per $x \in \partial\Omega$ si abbia $\mathcal{G}(x,y) \equiv 0$.
Dal punto di vista fisico stiamo considerando il nostro dominio come un conduttore, che é sempre equipotenziale, e stiamo disponendo intorno ad esso una carica elettrica fittizia cosí da imporre che sulla sua superficie il potenziale si annulli.
Prendiamo ad esempio $d = 3$ e sia $\Omega = B_R(0)$. Sappiamo che

$$\phi(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} \qquad \mathcal{G}(x,y) = \frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{q}{4\pi|x-\bar{y}|}$$

Stiamo richiedendo che $\forall x : |x| = R$ e $\forall y \in B_R(0)$ ed $\forall \bar{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ si abbia

$$\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{q}{4\pi|x-\bar{y}|} = 0$$

Per $|x| = R$ si ha

$$q^2|x-y|^2 = |x-\bar{y}|^2 \Rightarrow x^2(\bar{y} - q^2y) = (1-q^2)R^2 + |\bar{y}|^2 - q^2|y|^2 \Rightarrow$$

Adesso affinché non ci sia la dipendenza da x dovremo porre $\bar{y} - q^2y = 0$. Ne consegue che

$$q^2 = \frac{R^2}{|y|^2} \Rightarrow q = -\frac{R}{|y|}$$

Osserviamo che $q(y)$ deve essere negativa per ar si che $\mathcal{G} = 0$ abbia soluzione. Quindi in definitiva abbiamo

$$\mathcal{G}(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|x-y|} - \frac{R}{|y|}\frac{1}{\left|x - \frac{R^2}{|y|^2}y\right|}\right\} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{|x-y|} - \frac{R|y|}{||y|^2x - R^2y|}\right\} \tag{4.59}$$

Con questo risultato possiamo arrivare ad una formulazione esplicita della soluzione del problema di Poisson nel caso $d = 3$. Data la nostra funzione $\mathcal{G}$ si avrá quindi il seguente

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & in\ B_r(0) \\ u = g & in\ \partial B_R(0) \end{cases}$$

allora sappiamo che la soluzione si esprime come

$$u(x) = -\int_{\partial B_R(0)} d\sigma(y)\partial_\nu \mathcal{G}(x,y)g(y)$$

Adesso si osservi che con $|y| = R$

$$-\partial_\nu \mathcal{G}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial |y|}\mathcal{G}(x,y) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{|x|^2 - r^2 - 2r|x|\cos\vartheta}} - \frac{1}{\sqrt{r^4|x|^2 + R^4 r^2 - 2r^3 R^2 |x|\cos\vartheta}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^3}$$

Capitolo 5

Esercizi importanti

5.1 Formulazione variazionale dell'equazione della corda vibrante

In questo paragrafo cerchiamo di dare una formulazione variazionale della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet seguente:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u & (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = g(x) & (x,t) \in \overline{Q_T} \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & (x,t) \in \overline{Q_T} \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \forall t \in [0,T] \end{cases}$$

Ricordiamo che $Q_T \doteq (0,T) \times (0,L)$. Siano u_0, u_1 le traiettorie limite tra le quali puó configurarsi il profilo della corda e definiamo

$$X_{u_0,u_1} \doteq \left\{ u \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T}) : \begin{array}{l} u(x,0) = u_0(x) \\ u(x,T) = u_1(x) \end{array} \right\}$$

Adesso sia il funzionale d'azione $\mathcal{A} : X_{u_0,u_1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dove

$$\mathcal{A}[u] = \int_0^L dt L(\partial_t u(\cdot,t), u(\cdot,t)) = \int_0^T dt \int_0^L dx [\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{\tau}{2}(\partial_x u)^2] \tag{5.1}$$

Teorema 5.1 *u é soluzione di $\partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u$ con $c^2 = \frac{\tau}{\rho}$ se e solo se dato $\forall h \in \mathcal{C}^2(\overline{Q_T})$ con $h|_{\partial Q_T} = 0$ si ha*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}[u+\varepsilon h]\bigg|_{\varepsilon=0} = 0$$

Dim. Si ha

$$\mathcal{A}[u+\varepsilon h] = \int_0^T dt \int_0^L \frac{\rho}{2}[(\partial_t u)^2 + 2\varepsilon(\partial_t u)(\partial_t h) + \varepsilon^2(\partial_t h)^2] -$$

$$-\frac{\tau}{2}[(\partial_x u)^2 + 2\varepsilon(\partial_x u)(\partial_x h) + \varepsilon^2(\partial_x h)^2] =$$

$$= \mathcal{A}[u] + \varepsilon \int_0^T \int_0^L dx \rho(\partial_t u)(\partial_t h) - \tau(\partial_x u)(\partial_x h) + o(\varepsilon^2)$$

Di conseguenza

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}[u+\varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T dt \int_0^L dx[\rho(\partial_t u)(\partial_t h) - \tau(\partial_x u)(\partial_x h)] =$$

$$= \int_0^L dx\, \rho[\partial_t u(x,T)h(x,T) - \partial_t u(x,0)h(x,0)] - \int_0^T dt \int_0^L dx\rho[(\partial_{tt}u)h] -$$

$$- \int_0^T dt\tau[\partial_x u(L,t)h(L,t) - \partial_x u(0,t)h(0,t)] + \int_0^T dt \int_0^L dx[\tau(\partial_{xx}u)h]$$

Adesso osserviamo che per ipotesi i termini di bordo sono tutti nulli e che quindi di conseguenza

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{A}[u+\varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^T dt \int_0^L dx[-\rho\partial_{tt}u + \tau\partial_{xx}u](x,t)h(x,t) = 0 \tag{5.2}$$

Questo deve valere $\forall h \in X_{0,0}$ e quindi CNES affinché questo avvenga é che $u(x,t)$ soddisfi l'equazione delle onde. Il fatto che sia Condizione Sufficiente é ovvio. Per quanto riguarda la Necessitá di tale ipotesi, bisogna lavorare un pó. Sia $f(x,t) = -\rho\partial_{tt}u + \tau\partial_{xx}u$. Si ha che $f \in \mathcal{C}^0$. Ci resta da mostrare che $\forall h$ si ha $f \equiv 0$.
Per assurdo esistano $(x_0,t_0) \in Q_T$ tali che $f(x,t) > 0$. Per il teorema di permanenza del segno esiste un intorno $I = B_\varepsilon(x_0,t_0)$ dove $f(x,t) > 0$ per ogni $(x,t) \in B_\varepsilon(x_0,t_0)$. Adesso prendiamo una $h \in X_{0,0}$ tale che $h(x,t) = 0$ se $(x,t) \in Q_T \setminus B_\varepsilon(x_0,t_0)$ e che $h(x,t) > 0$ se $(x,t) \in B_\varepsilon(x_0,t_0)$. Allora avremo che

$$\int_0^T dt \int_0^L dx f(x,t)h(x,t) \leq \int_0^{t_0} dt \int_0^{x_0} dx f(x,t)h(x,t) > 0$$

Giungiamo ad un assurdo $\diamond$

5.2 Metodo di Fourier per il problema di Cauchy-Neumann

Cerchiamo attraverso il metodo di Fourier una soluzione per il seguente problema:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u & x \in (0,L) \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,L] \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in [0,L] \\ \partial_x u(0,t) = 0 = \partial_x u(L,t) & \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{5.3}$$

Al solito vogliamo esprimere la soluzione come $u(x,t) = w(t)v(x)$ in modo da soddisfare

$$\begin{cases} \ddot{w}(t)v(x) = c^2 w(t)v''(x) \\ v'(0) = v'(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{w} = \lambda c^2 w \\ v'' = \lambda v \\ v'(0) = v'(L) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale di $v(x)$ sará

$$v(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \lambda = 0 \\ c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx) & \lambda = -k^2 < 0 \end{cases}$$

ed includendo le condizioni iniziali nella casistica ritroviamo

$$v(x)' = \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) & \lambda > 0 \\ c_2 & \lambda = 0 \\ k(-c_1\sin(kx) + c_2\cos(kx)) & \lambda = -k^2 < 0 \end{cases}$$

Imponendo che le condizioni di Neumann siano soddisfatte ritroviamo che nel primo caso la soluzion é banale, nel secondo si ha $v_0(x) \equiv 1$ e nel terzo caso si ha $\sin(kL) = 0$. Ritroviamo $\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ e quindi

$$\begin{array}{ll} v_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & n \geq 1 \\ v_0(x) = 1 & n = 0 \end{array}$$

Dopo aver seguito gli stessi passi per studiare l'equazione $\ddot{w}_n(t) = \lambda_n c^2 w_n(t)$ arriviamo a poter scrivere

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} w_n(t)v_n(x) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\left[A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t$$

$$\partial_t u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\frac{n\pi c}{L}\left[-A_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{B_0}{2}$$

ed infine

$$g(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad h(x) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\frac{n\pi c}{L}B_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

5.3 Metodo di Fourier per il problema di Cauchy-Dirichlet con forzante

Sia

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u + f & x \in (0,L) \\ u(x,0) = g(x);\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in [0,L] \\ u(0,t) = 0 = u(L,t) & \forall t \in [0,T] \end{cases} \tag{5.4}$$

Cerchiamo la soluzione supponendo $g = h = 0$ ed assumendo che $f(x,t)$ sia sviluppabile in serie. Di conseguenza avremo

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} w_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad f(x,t) = \sum_{n\geq 1} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Sostituendo in (5.4) tali espressioni di u ed f ritroviamo che

$$\sum_{n\geq 1}\ddot{w}_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = c^2\sum_{n\geq 1}\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)w_n(t) + \sum_{n\geq 1} f_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\left(\ddot{w}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}w_n - f_n\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0$$

la quale é soddisfatta se e solo se

$$\ddot{w}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}w_n = f_n \tag{5.5}$$

La validitá della (5.5) é dovuta al fatto che stiamo supponebdo la convergenza uniforme delle w_n la quale ci consente di poter scambiare le operazioni di somma e di integrazione e pertanto

$$\sum_{n\geq 1}\left(\ddot{w}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}w_n - f_n\right)\int_0^L dx\,\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\delta_{k=n}\sum_{n\geq 1}\left(\ddot{w}_n + \frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}w_n - f_n\right) = 0$$

Adesso sia $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$. Arriviamo al seguente probelama

$$\begin{cases} \ddot{w}_n(t) = -\omega_n^2 w_n(t) + f_n(t) \\ w_n(0) = \dot{w}_n(0) = 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

Ora utilizzeremo il metodo di Duhamel, ossia ponendo s come paramentro e $t > s$ cerchiamo una

$$w_n(t) = \int_0^t ds\, w_n(t;s)$$

che sia soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{w}_n(t;s) = -\omega_n^2 w_n(t;s) \\ w_n(s;s) = 0 \\ \dot{w}_n(s;s) = f_n(s) \end{cases}$$

Con i soliti procedimenti ricaviamo

$$w_n(t;s) = \frac{f_n(s)}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_n(t) = \int_0^t ds\,\frac{f_n(s)}{\omega_n}\sin[\omega_n(t-s)] =$$

$$= \int_0^t ds\int_0^l dx\frac{2}{L\omega_n}\sin[\omega_n(t-s)]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)f(x,s)$$

Ricordiamoci che

$$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, f(x,t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Oss. 5.1 *La soluzione da noi trovata oltre che formale diventa effettiva se i $w_n(t)$ decadono a 0 rapidamente. Ció é possibile se si fanno ulteriori ipotesi su $f(x,t)$, ossia se si suppone che $f \in \mathcal{C}^2([0,L]\times\mathbb{R})$.*

5.4 Continuitá rispetto ai dati iniziali per la soluzione dell'equazione delle onde

Sia l'equazione delle onde in $d = 1$. Per essa supponiamo di avere due distinte soluzioni u_1 ed u_2 con dati iniziali distinti a loro volta. Nostro intento é mostrare che esse dipendono in maniera continua da essi, ovverosia che si ha la possibilitá di controllarne l'andamento tramite essi.
Siano $\delta_g = g_1 - g_2$ ed $\delta_h = h_1 - h_2$ e $T > 0$. Utilizzando la formula di D'Alembert si ha che

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = \frac{1}{2}\{\delta_g(x+ct) + \delta_g(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} dy\delta_h(y)$$

Di conseguenza avremo che

$$|u_1 - u_2| \leq \|\delta_g\|_\infty + \frac{1}{2c}ct\|\delta_h\|_\infty \leq \|\delta_g\|_\infty + T\|\delta_h\|_\infty$$

Quindi possiamo dedurne l'esistenza di una costante $c(t)$ con la quale si potrá controllare la differenza tra le due soluzioni. Essa potrá essere, per esempio, del tipo $c(t) = 1 + T$ oppure $c(t) = \max\{1, T\}$.

5.5 Un problema misto...

Nel presente paragrafo cercheremo una soluzione, tramite il metodo di Fourier, per il seguente problema misto con condizioni di Dirichlet-Neumann:

$$\begin{cases} \partial_{tt}u = c^2\partial_{xx}u & (x,t) \in Q_T \\ u(x,0) = g(x) & x \in \overline{Q}_T \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \overline{Q}_T \\ \partial_x u(0,t) = 0 = u(L,t) & (x,t) \in \overline{Q}_T \end{cases} \tag{5.7}$$

Al solito cercheremo di porre

$$u(x,t) = \sum_n w_n(t)v_n(x)$$

dove avremo (λ_n, v_n) soluzione del problema agli autovalori

$$\begin{cases} v''(x) = \lambda v(x) \\ v'(0) = 0 = v(L) \end{cases}$$

Di conseguenza $v(x)$ e $v'(x)$ avranno integrale generale

$$v(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \lambda = 0 \\ c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx) & \lambda = -k^2 < 0 \end{cases}$$

$$v'(x) = \begin{cases} \sqrt{\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\right) & \lambda > 0 \\ c_2 & \lambda = 0 \\ k[-c_1\sin(kx) + c_2\cos(kx)] & \lambda < 0 \end{cases}$$

Ancora una volta scopriamo che una soluzione non banale si ha quando gli autovalori sono negativi. Fatto questo andiamo ad imporre che siano rispettate le condizioni del problema: avremo $c_1 = 0$ e per far si che $\cos(kn) = 0$ troveremo per $n \geq 0$

$$k = k_n = \frac{2n+1}{2L}\pi \qquad \lambda_n = -\left(\frac{2n+1}{2L}\pi\right)^2$$

. Di conseguenza abbiamo

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 0} w_n(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \tag{5.8}$$

Non é finita. Ci resta da trovare la soluzione per

$$\ddot{w}_n(t) = c^2 \lambda_n w_n(t)$$

Adesso poniamo

$$\lambda_n c^2 = -\omega_n^2$$

Con le solite procedure si ritrova

$$w_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$$

Adesso possiamo passare alle condizioni iniziali per scoprire chi sono A_n e B_n . Osserviamo che

$$\int_0^L dx \, \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \cos\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right) = \frac{L}{4}\delta_{n=k}$$

In definitiva troveremo

$$A_n = \frac{4}{L}\int_0^L dx \, g(x) \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \qquad B_n = \frac{4}{L\omega_n}\int_0^L dx \, h(x) \cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right) \tag{5.9}$$

Oss. 5.2 *Si osservi che il termine*

$$\cos\left(\frac{2n+1}{2L}\pi x\right)$$

ha periodo $T = 4\pi$; é pari per riflessioni da $[-L, 0]$ ed é dispari per riflessioni da $[0, L]$.

5.6 Energia in termini di serie di Fourier

Supponiamo di avere una $u(x,t) = \sum_{n \geq 1} w_n(t) v_n(x)$ soluzione di

$$\begin{cases} \partial_{tt} u = c^2 \partial_{xx} u & x \in (0, L) \\ u(x, 0) = g(x) & x \in [0, L] \\ \partial_t u(x, 0) = h(x) & x \in [0, L] \\ u(0, t) = 0 = u(L, t) & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Mostreremo che esiste un'espressione dell'energia vista come sovrapposizione di oscillatori armonici. Innanzitutto ricordiamo l'espressione dell'energia:

$$E(t) = \int_0^L dx\, \frac{1}{2}[(\partial_t u)^2 + c^2(\partial_x u)^2]$$

Al solito, l'utilizzo del metodo di Fourier ci porta a trovare

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Per $w(t)$ abbiamo

$$\ddot{w}_n(t) = -\omega_n^2 w_n(t) \qquad \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

Possiamo procedere...ricordando che $c = \sqrt{\tau\rho^{-1}}$. Si ha che

$$E(t) = \int_0^L dx\, \left[\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{\tau}{2}(\partial_x u)^2\right] =$$

$$= \int_0^L dx \left[\frac{\rho}{2}\left(\sum_{n\geq 1} \dot{w}_n(t) v_n(x)\right)^2 + \frac{\tau}{2}\left(\sum_{n\geq 1} w_n(t) v_n'(x)\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{n,k\geq 1}\left[\frac{\rho}{2}\dot{w}_n(t)\dot{w}_k(t)\int_0^L dx v_n(x) v_k(x) + \frac{\tau}{2} w_n(t) w_k(t) \int_0^L dx v_n'(x) v_k'(x)\right] =$$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{\rho}{2}\dot{w}_n(t)^2 + \frac{\tau}{2}\frac{n^2\pi^2}{L^2} w_n(t)^2 = \sum_{n\geq 1}\frac{\rho}{2}\left[\dot{w}_n(t)^2 + \omega_n^2 w_n(t)^2\right]$$

In definitiva abbiamo

$$E(t) = \int_0^L dx\, \left[\frac{\rho}{2}(\partial_t u)^2 + \frac{\tau}{2}(\partial_x u)^2\right] = \sum_{n\geq 1}\frac{\rho}{2}\left[\dot{w}_n(t)^2 + \omega_n^2 w_n(t)^2\right] \tag{5.10}$$

Oss. 5.3 *Si noti che abbiamo utilizzato le seguenti identitá:*

$$\int_0^L dx v_n' v_k' = \frac{2}{L}\frac{n\pi}{L}\frac{k\pi}{L}\int_0^L dx\, \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\delta_{n=k}$$

$$\int_0^L dx v_n v_k = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \delta_{n=k}$$

MD [1]

[1] La presente é frutto della volontá di uno studente. Eventuali errori, omissioni, imprecisioni e varii ed eventuali strafalcioni matematici sono imputabili in via esclusiva al suddetto. Ció detto...in bocca al lupo.