



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Magistrale in Matematica Applicata

Rielaborazione degli appunti del corso di

Analisi di Sequenza Dati

Simmaco Di Lillo
dsimmaco@gmail.com

a.a. 21-22

Introduzione

Queste note contengono i miei appunti personali presi durante il corso di "Matematica Computazionale" del Prof. G.Visconti e dunque non sono dispense ufficiali del corso. Nelle note potrebbero essere presenti typò o errori, per qualsiasi segnalazione potete scrivermi a dsimmaco@gmail.com, la versione aggiornata verrà caricata sul mio [sito](#)

Indice

1	Modelli microscopici	4
1.1	Dinamica dei pedoni	5
1.2	Dinamica delle opinioni	6
1.3	Traffico di veicoli	7
1.4	Modelli numerici per ODEs	8
2	Linear Advection Equation	10
2.1	Metodo delle caratteristiche	10
2.2	Caratteristiche inflow e outflow	11
2.3	Problema di Riemann	12
2.4	Schemi ai volumi finiti	13
2.5	Schemi alle differenze finite	14
3	Schemi numerici per legge di conservazioni non lineari	15
4	Modelli macroscopici	17
4.1	Traffico di veicoli	17
4.2	Modello LWR	18
4.3	Condizione di Rankine-Hugoniot	20
4.4	Partenza da un semaforo (Greenshield)	21
4.5	Formazione di una coda (Greenshield)	22
4.6	Limite micro-macro per il traffico	23
4.7	Gas dinamica	26
5	Sistemi di PDE lineari	27
5.1	Problema di Riemann	29
6	Sistemi di rilassamento	31
6.1	Metodo numerico per il rilassamento	33
6.2	Metodo delle particelle	34
7	Equazione di Boltzmann	36
7.1	Equazione di Lorentz o di Boltzmann lineare	36
7.2	Equazione di Boltzmann	39
7.3	Proprietà dell'equazione di Boltzmann	40
7.4	Boltzmann e gas dinamica	43
7.5	Boltzmann e opinioni	44
7.6	Traffico con interazioni Mean-Field	47
8	Metodi Monte Carlo	51
8.1	Stimare π	51
8.2	Quadratura Monte Carlo	52
8.2.1	Dimensional curse	52
8.3	Monte Carlo per sistemi di rilassamento equazioni cinetiche	54
8.4	Monte Carlo per equazioni di Boltzmann	55
9	Limiti Mean-Field	57
9.1	Distanza di Wassertein	59
9.2	Limite rigoroso	60

10 Appendice	61
10.1 A-dimensionare	61
10.2 Soluzioni integrali	61
10.3 Operator Splitting	64
10.4 Equazioni cinetiche	65

1 Modelli microscopici

Nei modelli microscopici il focus è su ogni singolo agente del sistema fisico in esame. Vengono individuati gli stati microscopici e attraverso sistemi di ODEs si studia la loro evoluzione temporale.

L'utilizzo di tale scala genera dei modelli molto accurati ma al crescere del numero di agenti occorre risolvere sistemi di elevate dimensioni.

Andiamo a presentare uno schema di modelli che prendono il nome di *N-particle system*; supponiamo di avere N particelle ognuna delle quali soggetta ad una forza F_i . La dinamica di ogni particella è legata alla seguente equazione differenziale

$$\ddot{x}_i(t) = \frac{1}{m_i} F(t, X, \dot{X}) \quad (1)$$

dove

- i denota l' i -esimo agente
- $x_i \in \mathbb{R}^d$ è la posizione di i
- m_i è la massa di i
- $F_i : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}^{Nd} \rightarrow \mathbb{R}^d$ è la funzione di forza che agisce su i
- $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ è la matrice delle posizioni e analogamente con \dot{X}

L'equazione (1) può essere riscritto come un sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \frac{1}{m_i} F_i(t, X, V) \end{cases}$$

Dunque nei vari modelli che presenteremo (dinamica di folle, opinioni e veicoli) la scelta modellistica sarà semplicemente la funzione di forza F

1.1 Dinamica dei pedoni

Per ogni agente individuamo 2 stati microscopici: $x_i(t), v_i(t) \in \mathbb{R}^2$.

Alla base di tale modello ci sono le seguenti assunzioni:

- L'accelerazione e decelerazione di ogni individuo dipendono da interazioni con il background (altri individui o oggetti esterni)
- La massa di ogni agente vale 1
- Le forze che agiscono su ogni agente è descritta dalla seguente identità

$$F_i = F_i^d + \sum_{j \neq i} F_{ij}^r + \sum_A F_{iA}^a + \sum_Q F_{iQ}^r + \xi_i$$

dove

- F_i^d descrive una direzione desiderata del moto dell'agente i da seguire con una certa velocità desiderata v_i^d .

Se non ci fossero ostacoli si avrebbe $\dot{x}_i(t) = v_i^d$; in presenza di ostacoli dobbiamo rilassare l'equazione ottenendo:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \frac{v_i^d(t) - v_i(t)}{\tau} \end{cases} \quad (2)$$

dove τ indica il tempo di reazione.

Osservazione 1. Il sistema (2) ha soluzione data da $x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + v_i^d t + c_2$ dunque per $\tau \rightarrow 0$ si ha $\dot{x}_i(t) \rightarrow v_i^d$: il termine di rilassamento modella la tendenza dell'individuo alla direzione e velocità desiderata

- F_{ij}^r è una forza di repulsione tra l'agente i e quello j . Assumeremo che tale forza è una funzione tra la distanza tra i e j ed è ad esempio una funzione monotona decrescente come

$$F_{ij}^r = -c_1 \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|}{c_2}\right)$$

Notiamo che con questa scelta modellistica tutti gli agenti hanno un'influenza sul moto di i . Per evitare ciò la sommatoria può essere ristretta agli $j \in S_i(t)$ dove $S_i(t)$ è un intorno di i

- F_{iA}^a è una forza di attrazione che descrive l'influenza sull'agente i di altri agenti come amici, guide turistiche, leader ma anche di oggetti (e.g. uscite d'emergenza). Tale forza è una forza crescente della distanza tra i e A , dove con A si indica la posizione dell'altro agente/oggetto.
- F_{iQ}^r modella la presenza di ostacoli (e.g. muri, colonne ...). Anche in questo caso possiamo pensare di avere una funzione decrescente della distanza
- ξ_i è un termine stocastico (moto browniano) e descrive la stocasticità del comportamento (senza tale termine tutti gli individui avrebbero un moto deterministico)

1.2 Dinamica delle opinioni

Per ogni agente individuiamo un unico stato microscopico: l'opinione $x_i(t) \in D$.

In tale modello (detto *bounded confidence model*) si assume che l'interazione avvenga solamente tra agenti con opinione simile; introduciamo dunque un parametro di confidenza ε e una matrice (kernel) d'interazione $A(t, \varepsilon) = (A_{i,j}(t, \varepsilon))_{i,j=1,\dots,N}$ definita da

$$A_{ij}(t, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i(t, \varepsilon)} & \text{se } j \in \mathcal{N}_i(t, \varepsilon) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{dove } \mathcal{N}_i(t, \varepsilon) = \{j \in [N] \setminus \{i\} : |x_i(t) - x_j(t)| \leq \varepsilon\}$$

Il sistema che definisce il modello è dunque

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{j=0}^n A_{ij}(t, \varepsilon) (x_j(t) - x_i(t)) & \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{x}_i(0) = x_i^0 & \forall i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Abbiamo due scelte per σ_i

- $\sigma_i(t, \varepsilon) = N$. In tal caso il modello è a interazione simmetriche (A è simmetrica)
- Se $\sigma_i(t, \varepsilon) = |\mathcal{N}_i(t, \varepsilon)|$. A non è simmetrica ma è stocastica¹.

Definizione 1.1. Se

$$\mathcal{N}_i(t, \varepsilon) = \{1, \dots, N\} \quad \forall t \forall i$$

il modello si dice a **interazioni globale**, altrimenti a interazioni locali.

Definizione 1.2. Il **cluster di opinioni** $C(t)$ è un sottoinsieme di agenti tale che $\forall t$ valga

$$\begin{aligned} i, j \in C(t) &\Rightarrow A_{ij}(t, \varepsilon) \neq 0 \\ i \in C(t), j \notin C(t) &\Rightarrow A_{ij}(t, \varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Diremo che si forma **consenso** se al tempo finale è presente un solo cluster di opinioni.

Osservazione 2.

- In presenza di interazioni globali, si genera consenso verso la media delle opinioni iniziali.
- In presenza di interazioni locali si possono verificare sia situazioni di consenso che di cluster (a seconda delle condizioni iniziali e di ε)

¹Una matrice si dice stocastica per righe se ha elementi non negativi e la somma di ogni riga vale 1

1.3 Traffico di veicoli

Per ogni agente individuiamo due stati microscopici: $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $v_i \in \mathbb{R}^2$.

In entrambi i modelli che andremo a presentare, l'accelerazione di un veicolo dipende solo dal veicolo che gli sta davanti; per tale motivo tali modelli si dicono *car-following models*.

Supponiamo che i veicoli siano ordinati ovvero $x_i(0) = x_i^0$ con $x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_N^0$.

- Modello *follower-the-leader* (FTL)

$$F = \alpha \frac{v_{i+1}(t) - v_i(t)}{(x_{i+1}(t) - x_i(t))^\gamma} + \beta \frac{v_d - v_i(t)}{\tau}$$

La forza è la somma di due termini:

- Il primo termine è quello d'interazione: l'accelerazione diventa positiva se il veicolo va più lentamente del suo leader, viceversa decellera se va più veloce. Inoltre, l'accelerazione aumenta all'aumentare della distanza del leader.
- Il secondo termine è un termine di rilassamento alla velocità desiderata (che non dipende dalle condizioni del traffico)

Osservazione 3. Se $x_{i+1}(t) - x_i(t)$ è grande il termine d'interazione tende a 0 e il veicolo viaggia alla velocità desiderata

- Modello *optimal velocity model* (OVM o di Bando)

$$F = \frac{v_d(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - v_i}{\tau}$$

La velocità desiderata è una funzione che dipende dalla distanza con il leader, generalmente si assume che valga 0 se la distanza è piccola mentre tende a v_M al crescere della distanza.

Notiamo che in v_d viene inglobato il termine di interazione.

- Modello FTL-OVM. Il termine di rilassamento di FTL viene sostituito con la scrittura adoperata nel modello OVM.

1.4 Modelli numerici per ODEs

Consideriamo il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3)$$

e supponiamo siano verificate le condizioni del teorema di esistenza e unicità (continuità delle f e lipschitzianità della f nel secondo argomento uniformemente nel primo) .

Fissata una discretizzazione del tempo con passo uniforme Δt

$$t_i = t_0 + i\Delta t$$

possiamo considerare una **formulazione integrale** del problema (3)

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s)) ds$$

Dato un numero di **stadi** $s \in \mathbb{N}$ di stadi, i vettori $b, c \in \mathbb{R}^s$ e la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$, approssimiamo l'integrale con la seguente formula di quadratura

$$\begin{aligned} t^i &= t_n + c_i \Delta t && \text{per } i = 1, \dots, s \\ y^i &= y_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t^j, y^j) && \text{per } i = 1, \dots, s \\ y_{n+1} &= y_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i f(t^i, y^i) && \text{per } n = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4)$$

ottenendo $y_n \approx y(t_n)$.

I passi in (4) forniscono gli schemi di **Runge-Kutta** a s stadi che sono completamente ricavabili una volta fissati i coefficienti rappresentati dai Tableaux di Butcher 1

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

Tabella 1: Tableaux di Butcher

Proposizione 1.1. Se $\sum b_i = 1$ allora i metodi di Runge-Kutta sono consistenti e di ordine 1

Definizione 1.3. Un metodo di Runge-Kutta si dice esplicito se $a_{ij} = 0 \forall j \geq i$

Osservazione 4. Per alleggerire il calcolo degli ordini di consistenza si assume che

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^s a_{ij} = c_i$$

Esempio 1.2. Presentiamo due metodi di Runge-Kutta

- Se $s = 1$ allora per consistenza $b = 1$ e $a_{11} = c_1 = 0$ abbiamo dunque

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t f(t_n, y_n)$$

tale metodo prende il nome di Eulero esplicito

- Cerchiamo un metodo di Runge-Kutta a 2 stadi di ordine 2. Per avere ordine 2, segue usando gli sviluppi di Taylor che

$$\sum_i b_i c_i = \frac{1}{2}$$

Ottenendo una famiglia ad un parametro di schemi espliciti. Uno di questi è quello con [Tableaux 2](#) detto metodo di Hein

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Tabella 2: Tableaux del metodo di Hein

2 Linear Advection Equation

Sia $a > 0$ e consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + a \partial_x u(t, x) = 0 & \text{per } (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

2.1 Metodo delle caratteristiche

Consideriamo la seguente curva

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

curve caratteristiche. Lungo tale curva la soluzione u è costante:

$$\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \partial_t u(t, x(t)) + \dot{x}(t) \partial_x u(t, x(t)) = \partial_t u + a \partial_x u = 0$$

dunque

$$u(t, x) = u(0, x_0) = u_0(x_0) = u_0(x - at)$$

dove x_0 è detto piede della caratteristica.

Osservazione 5. Il problema di Cauchy (5) propaga verso destra ($a > 0$) la condizione iniziale a velocità costante pari ad a

2.2 Caratteristiche inflow e outflow

Consideriamo il medesimo problema (5) dove $x \geq 0$.

Sia (x, t) con $t > x$; usando il metodo delle caratteristiche, non possiamo determinare $u(t, x)$ infatti la caratteristica è inflow². Per risolvere tale problema occorre definire un dato al bordo ovvero una funzione $u(t, 0) = g(t)$.

Proposizione 2.1. *Sia $a > 0$. Allora il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + a\partial_x u(t, x) = 0 & \text{per } (t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{per } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(t, 0) = g(t) & \text{per } t \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases} \quad (6)$$

ammette un'unica soluzione. Tale soluzione dipende in modo continuo dal dato iniziale e da quello al bordo.

Dimostrazione. L'esistenza e unicità viene garantita dal metodo delle caratteristiche (le curve caratteristiche sono rette parallele e non si intersecano). Verifichiamo la dipendenza dai dati Moltiplicando la PDE per u otteniamo

$$u\partial_t u + au\partial_x u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\partial_t u^2 + \frac{a}{2}\partial_x u^2 = 0.$$

Integrando per $x \in [0, R]$ e usando il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^R u^2(t, x) dx + a(u^2(t, R) - u^2(t, 0)) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_0^R u^2(t, x) dx = au^2(t, 0) - au^2(t, R) &\leq au^2(t, 0) = ag^2(t) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_0^R u^2(t, x) dx \leq ag^2(t) \quad (7)$$

Integrando (7) per $t \in [0, t]$ e utilizzando il dato iniziale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^R u^2(t, x) - u^2(0, x) dx &\leq a \int_0^t g^2(s) ds \\ \int_0^R u^2(t, x) dx &\leq \int_0^R u_0^2(x) dx + a \int_0^t g(s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

Siano u_1, u_2 due soluzioni con dati iniziali u_{01} e u_{02} e dati al bordo g_1 e g_2 . Per la linearità del problema (6) $w = u_1 - u_2$ ne è soluzione con dati $u_{01} - u_{02}$ e $g_1 - g_2$.

Usando (13) sostituendo a u , w otteniamo

$$\int_0^R (u_1(t, x) - u_2(t, x))^2 dx \leq \int_0^R (u_{01}(x) - u_{02}(x))^2 dx + a \int_0^t (g_1(s) - g_2(s))^2 ds$$

Dunque abbiamo una dipendenza tra lo scarto quadratico delle soluzioni e lo scarto quadratico dei dati. \square

²il piede è fuori dal dominio

2.3 Problema di Riemann

Se nel Problema (5) utilizziamo come condizione iniziale la funzione discontinua

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{se } x < x_0 \\ u_R & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

otteniamo il così detto problema di Riemann.

Osservazione 6. Applicando il metodo delle caratteristiche otteniamo una soluzione discontinua (la discontinuità si propaga lungo le caratteristiche). La soluzione che si ottiene non è più una soluzione classica ma $u(t, x) = u_0(x - at)$ soddisfa la formulazione integrale

Osservazione 7 (Un ulteriore approccio). Definiamo una successione di funzioni regolari

$$\forall \varepsilon \quad \exists u_0^\varepsilon \text{ regolare} \quad \|u_0 - u_0^\varepsilon\|_1 < \varepsilon$$

Sia u^ε la soluzione del problema di Cauchy con soluzione iniziale u_0^ε (esiste essendo regolare). Poniamo ora

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x).$$

$\forall t > 0$ vale

$$u(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon(x - at) = u_0(x - at)$$

2.4 Schemi ai volumi finiti

Presentiamo un metodo numerico per risolvere (5).

Introdotta un passo di discretizzazione Δx , definiamo le celle

$$I_j = \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}} \right] \text{ dove } x_j = x + \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta x$$

Su ogni cella una definiamo un **media di cella**

$$\bar{u}_j(t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(t, x) dx.$$

Integrando in I_j la PDE otteniamo

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_j(t) = -\frac{a}{\Delta x} \left(u \left(t, x_{j+\frac{1}{2}} \right) - u \left(t, x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right) \quad (9)$$

ovvero la quantità \bar{u}_j si modifica in tempo solo a causa del flusso entrante e quello uscente.

Utilizzando la soluzione ai bordi della cella, l'equazione (9) evolve in tempo le medie di cella. Non disponendo di tali valori, possiamo approssimarli tenendo conto della direzione di propagazione delle informazioni ottenendo uno schema **upwind**³

Supponendo $a > 0$ risulta ragionevole adottare le seguenti approssimazioni:

$$u \left(t, x_{j+\frac{1}{2}} \right) \approx \bar{u}_j(t)$$

$$u \left(t, x_{j-\frac{1}{2}} \right) \approx \bar{u}_{j-1}(t)$$

dunque se $\bar{U}_j(t)$ è l'approssimazione di $\bar{u}_j(t)$ il sistema di ODEs si riscrive come

$$\frac{d}{dt} \bar{U}_j(t) = -\frac{a}{\Delta x} (\bar{U}_j(t) - \bar{U}_{j-1}(t))$$

e applicando Eulero esplicito diventa

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{U}_j^n - \bar{U}_{j-1}^n)$$

Analogamente se $a < 0$ otteniamo:

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_j^n)$$

³segue la direzione del vento (informazioni).

2.5 Schemi alle differenze finite

Lo schema upwind può essere ricavato anche utilizzando schemi alle differenze finite di ordine 1: si approssima la derivata prima con una backward o forward difference a seconda del segno di a . Volendo ottenere uno schema di ordine maggiore si potrebbero usare differenze centrate del secondo ordine ottenendo lo schema:

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n) \quad (10)$$

ma tale metodo è instabile. Diamo due diverse motivazioni

- Spiegazione fisica: per ottenere l'equazione abbiamo usato informazioni sia da sinistra che da destra. Abbiamo considerato anche quelle che provenienti dalla direzioni sbagliata di propagazione
- Spiegazione matematica. Definiamo una versione discreta dell'energia:

$$E^n = \frac{\Delta x}{2} \sum_j (\bar{U}_j^n)^2$$

allora vale

Teorema 2.2. *Se \bar{U}_j^n è la soluzione ottenuta utilizzando lo schema centrato (10), vale la seguente stima*

$$E^{n+1} = E^n + \frac{\Delta x}{2} \sum_j (U_j^{n+1} - U_j^n)^2$$

e dunque l'energia esplode per ogni scelta di Δt e Δx

Dimostrazione. Si utilizzano gli stessi conti di quando abbiamo provato la dipendenza continua dei dati

Lo schema upwind può essere riscritto come

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{a^+ \Delta t}{\Delta x} (\bar{U}_j^n - \bar{U}_{j-1}^n) - a^- \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_j^n)$$

dove $a^+ = \max\{a, 0\}$ e $a^- = \min\{0, a\}$. Con ulteriori manipolazioni algebriche otteniamo

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{a}{2\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - \bar{U}_{j-1}^n) + |a| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n)$$

dunque abbiamo riscritto lo schema come uno schema alle differenze centrate ma abbiamo introdotto anche un termine di diffusione numerica

$$|a| \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{U}_{j+1}^n - 2\bar{U}_j^n + \bar{U}_{j-1}^n) \approx |a| \frac{\Delta t}{2\Delta x} u_{xx}$$

Definizione 2.1. Definiamo la condizione CFL (da Courant-Friedrich-Levy) come

$$|a| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Teorema 2.3. *Se vale la condizione CFL lo schema upwind soddisfa la condizione $E^{n+1} \leq E^n$ e dunque è condizionatamente stabile (in norma 2).*

Osservazione 8. La condizione CFL impone che la velocità numerica $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ sia maggiore della velocità fisica dell'informazione: $|a|$.

3 Schemi numerici per legge di conservazioni non lineari

Sia

$$u_t + f(u)_x = 0$$

con $f(u)$ non è lineare.

Osservazione 9. Poichè la f non è lineare, la velocità di propagazione delle informazioni cambia in punti diversi dello spazio. I metodi di tipo Upwind non sono applicabili.

Presentiamo un metodo basato sui volumi finiti: dividiamo il dominio in celle e, come nel caso lineare, denotiamo con $\bar{u}_j(t)$ la media di cella.

Derivando la definizione di $\bar{u}_j(t)$ e utilizzando l'equazione differenziale otteniamo

$$\frac{d}{dt} \bar{u}_j(t) = -\frac{1}{\Delta x} \left[f(u(t, x_{j+\frac{1}{2}})) - f(u(t, x_{j-\frac{1}{2}})) \right]$$

Considerando la seguente approssimazione

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n \approx f(u(t^n, x_{j+\frac{1}{2}}))$$

e utilizzando Eulero esplicito

$$\bar{U}_j^{n+1} = \bar{U}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n \right]$$

dove $\bar{U}_j^n \approx \bar{u}_j(t^n)$.

F prende il nome di flusso numerico e può essere calcolato in vari modi

- Godunov: generalizza upwind al caso non lineare.

Ad ogni interfaccia posso risolvere esattamente un problema di Riemann

$$u(t^n, x) = \begin{cases} \bar{u}_j^n & \text{se } x < x_{j+\frac{1}{2}} \\ \bar{u}_{j+1}^n & \text{se } x > x_{j+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

e capire quale flusso numerico utilizzare.

- Approximate Riemann solvers: sono schemi centrati che approssimano il problema di Riemann con due onde che si propagano dall'interfaccia verso destra e verso sinistra

$$u(t, x) = \begin{cases} \bar{u}_j^n & \text{se } x < s_{j+\frac{1}{2}}^L t \\ u_{j+\frac{1}{2}}^* & \text{se } s_{j+\frac{1}{2}}^L t < x < s_{j+\frac{1}{2}}^R t \\ \bar{u}_{j+1}^n & \text{se } x > s_{j+\frac{1}{2}}^R t \end{cases}$$

dove lo stato intermedio si calcola con la condizione di R-H

$$\begin{cases} f(u_{j+1}^n) - f_{j+\frac{1}{2}}^* = s_{j+\frac{1}{2}}^R (u_{j+1}^n - u_{j+\frac{1}{2}}^*) \\ f(u_j^n) - f_{j+\frac{1}{2}}^* = s_{j+\frac{1}{2}}^L (u_j^n - u_{j+\frac{1}{2}}^*) \end{cases}$$

e risolvendo ottengo

$$f_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{s_{j+\frac{1}{2}}^R f(U_j^n) - s_{j+\frac{1}{2}}^L f(U_{j+1}^n) + s_{j+\frac{1}{2}}^R s_{j+\frac{1}{2}}^L (U_{j+1}^n - U_j^n)}{s_{j+\frac{1}{2}}^R - s_{j+\frac{1}{2}}^L}$$

Ponendo $s_{j+\frac{1}{2}}^R = -s_{j+\frac{1}{2}}^L = s_{j+\frac{1}{2}}$ otteniamo

$$f_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{f(U_j^n) + f(U_{j+1}^n)}{2} - \frac{s_{j+\frac{1}{2}}}{2} (U_{j+1}^n - U_j^n)$$

e decido che il flusso numerico è dato da $F_{j+\frac{1}{2}}^n = f_{j+\frac{1}{2}}^*$.

La velocità delle onde $s_{j+\frac{1}{2}}$ si sceglie in due modi

– Lax-Friedrich:

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ottenendo uno schema molto diffusivo ma very easy

– Rusanov:

$$s_{j+\frac{1}{2}} = \max(|f'(U_j^n)|, |f'(U_{j+1}^n)|)$$

Osservazione 10. Nel caso di Lax-Friedrich ottengo

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{f(U_{j+1}^n) - f(U_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n)$$

Mentre la condizione CFL diventa

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{\max |f'(u)|}$$

e volendo usare il principio del massimo

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{\max |f'(u_0)|}$$

4 Modelli macroscopici

Nella scala **macroscopica** si studiano l'evoluzione in tempo (tramite PDEs) di quantità sintetiche legate al fenomeno fisico in esame. L'uso di questa scala porta a generare modelli meno accurati ma real-time (il numero di equazioni del sistema non dipende dal numero di agenti in esame ma solo dal numero di quantità sintetiche).

4.1 Traffico di veicoli

Soffermiamoci al caso di una singola corsia senza senza intersezione con altre strade e deriviamo un modello macroscopico utilizzando esclusivamente principi fisici.

Data la densità $\rho = \rho(t, x)$ il numero di veicoli (massa) nel tratto $[x_1, x_2]$ è dato da

$$N(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx$$

Poichè vale la conservazione della massa (nessun veicolo è creato in $[x_1, x_2]$), la variazione di $N(t)$ deriva solo dal flusso di veicoli entrante in x_1 e uscente in x_2 .

Dunque, detta $v(t, x)$ la velocità del flusso otteniamo

$$\frac{d}{dt}N(t) = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx = \rho(t, x_1)v(t, x_1) - \rho(t, x_2)v(t, x_2)$$

Integrando per $t \in [t_1, t_2]$ si ha

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \rho(t_1, x) dx = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_1)v(t, x_1) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(t, x_2)v(t, x_2) dt \quad (11)$$

Assumendo ρ e v differenziabili vale

$$\begin{aligned} \rho(t_2, x) - \rho(t_1, x) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) dt \\ \rho(t, x_2)v(t, x_2) - \rho(t, x_1)v(t, x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x)v(t, x)) dx \end{aligned} \quad (12)$$

Utilizzando le espressioni (12) nell'equazione (11) otteniamo

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x)v(t, x)) dx dt = 0 \quad (13)$$

Poichè (13) vale per ogni rettangolo $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x)v(t, x)) = 0$$

Abbiamo dunque trovato una legge di conservazione. Tale legge dipende da $v(t, x)$ dunque non è chiusa. Possiamo risolvere tale problema in due modi:

- (i) *2nd order models*: attraverso un limite macroscopico derivare una PDE per l'evoluzione di $v(t, x)$
- (ii) *1st order models* o **modello LWR**: la velocità è una funzione assegnata della densità.

4.2 Modello LWR

Supponiamo che

$$v(t, x) = v(\rho(t, x)) \quad \Rightarrow \quad q(\rho) = v(\rho)\rho$$

dunque la legge di conservazione diventa della forma

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x q(\rho(t, x)) = 0 \quad (14)$$

$v(\rho)$ può essere trovata in maniera sperimentale: si raccolgono i dati sul profilo della velocità in funzione della densità, si tracciano i valori nel piano cartesiano (diagrammi fondamentali) e si determina $v(\rho)$ in modo da avere un fit “ottimo” dei dati sperimentali⁴.

Osservazione 11. Generalmente si usano le seguenti funzioni:

- Greenshield

$$v(\rho) = v_M \left(1 - \frac{\rho}{\rho_M} \right)$$

- Greenberg (dati raccolti osservando auto nel Lincoln tunnel)

$$v(\rho) = a\rho \log \left(\frac{\rho_M}{\rho} \right)$$

La legge di conservazione (14) può essere scritta in forma “quasi-lineare” (lineare rispetto alle derivate):

$$\partial_t \rho + q'(\rho) \partial_x \rho = 0 \quad (15)$$

Risolviamo (15) applicando il metodo delle caratteristiche. Connettiamo (t, x) con $(x_0, 0)$ mediante una curva sulla quale ρ è costante. Se $x(t)$ è tale curva allora

$$\rho(t, x(t)) = \rho_0(x_0) \quad (16)$$

dove $\rho_0(x) = \rho(0, x)$ è il dato iniziale associato alla PDE.

Differenziamo l'equazione precedente rispetto al tempo per ottenere

$$0 = \rho_t(t, x(t)) + \dot{x}(t) \rho_x(t, x(t)) \quad (17)$$

Ricordando la “forma quasi-lineare” otteniamo

$$0 = \rho_t(t, x(t)) + q'(\rho(t, x(t))) \rho_x(t, x) = \rho_t(t, x(t)) + q'(\rho_0(x_0)) \rho_x(t, x(t)) \quad (18)$$

Sottraendo (17) a (18) otteniamo

$$\rho_x(t, x) [\dot{x}(t) - q'(\rho_0(x_0))] = 0$$

e assumendo $\rho_x(t, x) \neq 0$ otteniamo l'equazione della curva $x(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = q'(\rho_0(x_0)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dunque le curve caratteristiche sono rette d'equazione

$$x(t) = q'(\rho_0(x_0))t + x_0$$

⁴Nel trovare un fit si assume che $\frac{d}{d\rho} v(\rho) < 0$

In particolare, noto il profilo di densità iniziale ρ_0 , posso esprimere la soluzione come un'onda progressiva con velocità $q'(\rho)$ (la velocità dell'informazione non è costante ma dipende dalle condizioni del traffico).

$q'(\rho)$ è la velocità delle informazioni e non quella delle auto:

$$\frac{dq}{d\rho} = \frac{d(\rho v)}{d\rho} = v + \rho \frac{dv}{d\rho} \leq v$$

infatti nel modello la velocità è una funzione decrescente della densità.

Osserviamo, in particolare, che la velocità delle informazioni non è mai maggiore della velocità del traffico (le informazioni non viaggiano davanti alle auto)

Osservazione 12. $\frac{dq}{d\rho}$ può essere sia positiva che negativa, dunque può succedere che le rette caratteristiche si intersechino in tempo finito. Anche se $\rho_0 \in C^\infty$ la soluzione può generare discontinuità

4.3 Condizione di Rankine-Hugoniot

Supponiamo che la soluzione del problema presenti una discontinuità che al tempo t si trovi nella posizione $x = s(t)$ e sia $[x_1, x_2]$ un intervallo che contiene $x = s(t)$.

La formulazione integrale

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(t, x) dx = q(\rho(t, x_1)) - q(\rho(t, x_2)) \quad (19)$$

può essere scritta in modo equivalente come:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x_1}^{s(t)} \rho(t, x) dx + \int_{s(t)}^{x_2} \rho(t, x) dx \right] = q(\rho(t, x_1)) - q(\rho(t, x_2))$$

Usando Leibnitz otteniamo

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{s(t)} \rho(t, x) dx = \int_{x_1}^{s(t)} \partial_t \rho(t, x) dx + \rho^-(t, s(t)) \dot{s}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_2} \rho(t, x) dx = \int_{s(t)}^{x_2} \partial_t \rho(t, x) dx - \rho^+(t, s(t)) \dot{s}(t)$$

dove

$$\rho^\pm(t, s(t)) = \lim_{x \rightarrow s(t)^\pm} \rho(t, x)$$

L'equazione (19) diventa

$$\int_{x_1}^{x_2} \partial_t \rho(t, x) dx + [\rho^-(t, s(t)) - \rho^+(t, s(t))] \dot{s}(t) = q(\rho(t, x_1)) - q(\rho(t, x_2))$$

Per $x_1 \rightarrow s(t)^-$ e per $x_2 \rightarrow s(t)^+$ otteniamo

$$\dot{s}(t) = \frac{q(\rho^-(t, s(t))) - q(\rho^+(t, s(t)))}{\rho^-(t, s(t)) - \rho^+(t, s(t))} = \frac{[q(\rho)]_-^+}{[\rho]_-^+} \quad (20)$$

La relazione (20) prende il nome di **condizione di Rankine-Hugoniot**

Definizione 4.1. Una soluzione discontinua che soddisfa la condizione R-H è detta onda d'urto o onda di shock

Osservazione 13. Uno shock ha una velocità diversa da quelle delle caratteristiche. La sua velocità è determinata dagli stati immediatamente a sinistra e a destra della discontinuità

4.4 Partenza da un semaforo (Greenshield)

Assumiamo che ci sia una coda alla sinistra del semaforo (posto in $x = 0$) mentre la strada sia libera a destra, cioè

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_M & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Se al tempo $t = 0$ il semaforo diventa verde: la prima auto ferma accelera e così via ...

Ora

$$q'(\rho) = v_M \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_M}\right) \Rightarrow q'(\rho_0(x_0)) = \begin{cases} -v_M & \text{se } x_0 < 0 \\ v_M & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}.$$

Le rette caratteristiche sono della forma

$$x(t) = \begin{cases} -v_M t + x_0 & \text{se } x_0 < 0 \\ v_M t + x_0 & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$$

e quelle che partono da $x_0 = 0$ dividono il piano (x, t) in 3 regioni:

$$\begin{aligned} R &= \{(x, t) \mid x \leq -v_M t\} & \Rightarrow & \rho(t, x) = \rho_M \\ T &= \{(x, t) \mid x \geq v_M t\} & \Rightarrow & \rho(t, x) = 0 \\ S &= \{(x, t) \mid -v_M t < x < v_M t\} \end{aligned} \quad (21)$$

In S non entrano caratteristiche, dunque per calcolare la soluzione usiamo la seguente strategia:

(a) Approssimiamo il dato iniziale con una successione di funzioni continue $g_\varepsilon \rightarrow \rho_0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \rho_M & \text{se } x < 0 \\ \rho_M \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{se } 0 < x < \varepsilon \\ 0 & \text{se } x > \varepsilon \end{cases}$$

(b) Costruiamo la soluzione ρ_ε con il metodo delle caratteristiche.

Le caratteristiche sono della forma

$$x(t) = \begin{cases} -v_M t + x_0 & \text{se } x_0 < 0 \\ -v_M \left(1 - 2\frac{x_0}{\varepsilon}\right) t + x_0 & \text{se } 0 < x_0 < \varepsilon \\ v_M t + x_0 & \text{se } x_0 > \varepsilon \end{cases}$$

Notiamo che nella regione $-v_M t < x < v_M t + \varepsilon$ si è sviluppato il **rarefaction fan**. La soluzione è

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} \rho_M & \text{se } x \leq -v_M t \\ \rho_M \left(1 - \frac{x + v_M t}{2v_M t + \varepsilon}\right) & \text{se } -v_M t < x < v_M t + \varepsilon \\ 0 & \text{se } x \geq v_M t + \varepsilon \end{cases}$$

(c) Passiamo al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ ottenendo

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_M & \text{se } x \leq -v_M t \\ \frac{\rho_M}{2} \left(1 - \frac{x}{v_M t}\right) & \text{se } -v_M t < x < v_M t \\ 0 & \text{se } x \geq v_M t \end{cases}$$

Si è dunque generata un'onda di rarefazione.

4.5 Formazione di una coda (Greenshield)

Consideriamo il modello LWR dove consideriamo la seguente condizione iniziale

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho_L = \frac{1}{8}\rho_M & \text{se } x < 0 \\ \rho_R = \rho_M & \text{se } x > 0 \end{cases} \Rightarrow q'(\rho_0(x_0)) = \begin{cases} \frac{3}{4}v_M & \text{se } \rho_0(x_0) = \frac{\rho_M}{8} \\ -v_M & \text{se } \rho_0(x_0) = \rho_M \end{cases}$$

Le caratteristiche si intersecano in un tempo finito e, dunque, la soluzione non è continua.

Applichiamo (20) otteniamo

$$\dot{s}(t) = -\frac{1}{8}v_M$$

Ora al tempo iniziale la discontinuità si trova in $x_0 = 0$ e dunque l'onda di shock si muove lungo la retta di equazione

$$s(t) = -\frac{1}{8}v_M t$$

Abbiamo dunque la seguente soluzione

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{8}\rho_M & \text{se } x < s(t) = -\frac{1}{8}v_M t \\ \rho_M & \text{se } x > s(t) \end{cases}$$

Osservazione 14. La velocità di propagazione dello shock è negativa: la coda "aumenta", detta in altri termini le luci dei freni delle auto davanti a noi si propagano all'indietro.

Osservazione 15. Nella formazione della coda non c'è il tempo di reazione. Si vedrà meglio in seguito.

4.6 Limite micro-macro per il traffico

Partiamo dal modello microscopico FTL nelle coordinate (x_i, v_i)

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= v_i \\ \dot{v}_i &= c_\gamma \frac{v_{i+1} - v_i}{(x_{i+1} - x_i)^{\gamma+1}} + \frac{A}{T_r} \left(V \left(\frac{\Delta x}{x_{i+1} - x_i} \right) - v_i \right) \end{cases} \quad (22)$$

dove

- c_γ, A, γ sono parametri
- T_r è il tempo di rilassamento
- Δx è la lunghezza delle auto

Introduciamo delle nuove grandezza

- l'headway ovvero la distanza tra i paraurti

$$l_i = x_{i+1} - x_i$$

- la densità locale attorno all'auto i

$$\rho_i = \frac{\Delta x}{l_i}$$

da' informazione sulla quantità di strada occupata

- Il volume specifico locala attorno all'auto i

$$\tau_i = \frac{1}{\rho_i}$$

da' informazione sulla quantità di strada libera

Notiamo che le grandezze ρ_i e τ_i sono adimensionali: $\rho_M = \tau_M = 1$ ⁵.

Per rendere il modello adimensionale si può verificare che

$$c_\gamma = v_{ref} \left(\frac{\Delta x}{\rho_M} \right)^\gamma = v_{ref} (\Delta x \tau_M)^\gamma = v_{ref} \Delta x^\gamma$$

dove $v_{ref} > 0$ è una velocità di riferimento.

Con le nuove variabili introdotte la seconda equazione di (22) diventa

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= v_{ref} \Delta x^\gamma \tau_M^\gamma \frac{v_{i+1} + v_i}{\Delta x^{\gamma+1} \tau_i^{\gamma+1}} + \frac{A}{T_r} (V(\rho_i) - v_i) = \\ &= \frac{1}{\Delta x} (v_{i+1} - v_i) \frac{v_{ref} \tau_M^\gamma}{\tau_i^{\gamma+1}} + \frac{A}{T_r} (V(\rho_i) - v_i) \end{aligned}$$

Nell'espressione precedente riconosciamo la derivata della funzione

$$\tilde{p}(\tau) = \begin{cases} \frac{v_{ref}}{\gamma} \left(\frac{\tau}{\tau_M} \right)^\gamma & \text{se } \gamma > 0 \\ -v_{ref} \ln \left(\frac{\tau}{\tau_M} \right) & \text{se } \gamma = 0 \end{cases}$$

⁵ ρ_M corrisponde alla situazione *bumper-to-bumper*

dunque introdotta

$$w_i = v_i + \tilde{p}(\tau_i)$$

il modello (22) si può scrivere nelle nuove variabili (τ_i, w_i) :

$$\begin{cases} \dot{\tau}_i &= \frac{1}{\Delta x} (v_{i+1} - v_i) \\ \dot{w}_i &= \frac{A}{T_r} (V(\rho_i) - v_i) \end{cases}$$

Definiamo delle quantità al di fuori della dinamica discreta

$$\tau^L = \tau^L(t, X), \quad w^L = w^L(t, X), \quad v^L = v^L(t, X)$$

dove (t, X) sono le coordinate lagrangiane⁶.

Introduciamo una griglia in spazio dove ogni cella ha ampiezza Δx e contiene esattamente un veicolo e consideriamo la seguente identificazione

$$\tau_i = \tau^L(t, X_i), \quad w_i = w^L(t, X_i), \quad v_i = v^L(t, X_i)$$

Con queste identificazioni il modello diventa

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tau^L(t, X_i) &= \frac{1}{\Delta x} (v^L(t, X_{i+1}) - v^L(t, X_i)) \\ \frac{d}{dt} w^L(t, X_i) &= \frac{A}{T_r} \left(V\left(\frac{1}{\tau^L(t, X_i)}\right) - v^L(t, X_i) \right) \end{cases}$$

Per $\Delta x \rightarrow 0$ la prima equazione diventa la semidiscretizzazione di

$$\partial_t \tau^L(t, X) - \partial_x v^L(t, X) = 0 \tag{23}$$

mentre la secondo

$$\partial_t w^L(t, X) = \frac{A}{T_r} \left(V\left(\frac{1}{\tau^L(t, X_i)}\right) - v^L(t, X_i) \right) \tag{24}$$

Il sistema formato dalle due equazione (23) e (24) è un sistema di PDE in coordinate lagrangiane.

Consideriamo il cambiamento di coordinate da lagrangiano ad euleriano

$$(t, X) \rightarrow (t, x(t, X)) \text{ dove } x(t, X) = \int^X \tau^L(t, \xi) d\xi$$

Lo Jacobiano della trasformazione è

$$J = \frac{\partial(t, x)}{\partial(t, X)} = \begin{pmatrix} \partial_t t & \partial_t x \\ \partial_X t & \partial_X x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & v^L \\ 0 & \tau^L \end{pmatrix}$$

infatti

$$\partial_t x(t, X) = \int^X \partial_t \tau^L(t, \xi) d\xi = \int^X \partial_x v^L(t, \xi) d\xi = v^L(t, X)$$

⁶“seguono le particelle”

Dunque con questo cambiamento di coordinate, l'equazione (23) diventa

$$\begin{aligned}\partial_t \tau^L(t, X) &= \frac{d}{dt} \tau(t, x(t, X)) = \partial_t \tau(t, x) + v(t, x) \partial_x \tau(t, x) \\ \partial_X v^L(t, X) &= \frac{d}{dX} v(t, x(t, X)) = \tau(t, x) \partial_x v(t, x)\end{aligned}$$

ovvero otteniamo

$$\partial_t \tau + v \partial_x \tau - \tau \partial_x v = 0$$

Ma $\tau = \frac{1}{\rho}$ quindi otteniamo

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho^2} \partial_t \rho - \frac{v}{\rho^2} \partial_x \rho - \frac{1}{\rho} \partial_x v &= 0 \\ \partial_t \rho + v \partial_x \rho + \rho \partial_x v &= 0 \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0\end{aligned}\tag{25}$$

L'equazione (23) è l'equazione di continuità letta in formulazione lagrangiana.

La stessa trasformazione per (24) porta a

$$\partial_t w(t, x) + v(t, x) \partial_x w(t, x) = \frac{A}{T_r} (V(\rho(t, x)) - v(t, x))\tag{26}$$

Il sistema (25) e (26) è un sistema di PDE in coordinate euleriane.

Ricapitoliamo:

1. Modello microscopico FTL in (x_i, v_i)
2. Modello microscopico FTL in (τ_i, w_i)
3. Macroscopic limit: il modello microscopico FTL (τ_i, w_i) è una semidiscretizzazione in spazio di un sistema di PDE macroscopico in coordinate lagrangiane
4. Trasformazione del modello macroscopico ottenuto da Lagrangiano a Euleriano

Definizione 4.2. Un sistema è scritto in forma conservativa se è della forma $\partial_t u + \partial_x F(u) = 0$

Osservazione 16. Possiamo riscrivere (26) in forma conservativa moltiplicando per ρ infatti otteniamo

$$\rho \partial_t w + \rho v \partial_x w = \partial_t(\rho w) - w \partial_t \rho + \rho v \partial_x w = \partial_t(\rho w) + w \partial_x(\rho v) + \rho v \partial_x w = \partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho w v)$$

Dunque (26) diventa

$$\partial_t(\rho w) + \partial_x(\rho w v) = \frac{A}{T_r} (\rho V(\rho) - \rho v)\tag{27}$$

Il sistema (25) e (27) è il modello del secondo ordine di Aw-Rascle e Zhang (ARZ)

Osservazione 17. Il modello ARZ è iperbolico. Infatti riscrivendo il modello omogeneo in termini di $(\rho, q) = (\rho, \rho v)$ otteniamo

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ q \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} q - \rho \tilde{p}(\rho) \\ \frac{q^2}{\rho} - q \tilde{p}(\rho) \end{pmatrix} = 0$$

La cui matrice Jacobiana ha autovalori $\lambda_1 = v$ e $\lambda_2 = v - \rho \tilde{p}'(\rho)$.

Osservazione 18. Se $\tilde{p}(\rho) = 0$ ho solo rilassamento e non ho il termine Follower the leader.

Osservazione 19. Se $A = 0$ otteniamo un sistema di due leggi di conservazioni dove le quantità conservate sono $\int \rho$ e $\int \rho w$

Osservazione 20. Il modello LWR si può ottenere in due modi

- Partendo da $\dot{x}_i = V \left(\frac{\Delta x}{x_{i+1} - x_i} \right)$ si possono rifare gli stessi conti per ottenere il modello LWR
- $A \rightarrow +\infty$ e $T_r \rightarrow 0$

4.7 Gas dinamica

Sfruttando la conservazione del momento (28), dell'energia (29) e della densità (30) otteniamo le equazioni di Eulero per la gas dinamica

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0 \quad (28)$$

$$\partial_t E + \partial_x((E + p)v) = 0 \quad (29)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (30)$$

dove $p = p(\rho, v, E)$ è la pressione che viene assegnata mediante l'equazione di stato. Le equazioni di Eulero possono essere scritte in forma compatta

$$\partial_t u(t, x) + \partial_x F(u) = 0 \text{ dove } u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{pmatrix} \text{ e } F(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix}$$

5 Sistemi di PDE lineari

Consideriamo il sistema di PDE

$$\begin{cases} U_t + f(U)_x = 0 \\ U(0, x) = U_0(x) \end{cases} \quad \text{dove } U \in \mathbb{R}^m \text{ e } f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Esempio 5.1 (Equazione delle onde). *Consideriamo la PDE*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

tale equazione può essere scritta come un sistema lineare nelle variabili

$$v = cu_x \quad w = -u_t$$

infatti

$$\begin{aligned} v_t &= cu_{xt} = cu_{tx} = -cw_x \\ w_t &= -u_{tt} = -c^2 u_{xx} = -cv_x \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto il sistema

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}_x = 0$$

Esempio 5.2 (Linearizzazione delle equazioni di Eulero). *Consideriamo il sistema delle equazioni di Eulero*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x ((E + p)v) = 0 \end{cases}$$

Riscriviamo la seconda equazione

$$\partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = \rho \partial_t v + v \partial_t \rho + 2\rho v \partial_x v + v^2 \partial_x \rho + \partial_x p = 0$$

Ora sfruttando la prima equazione e dividendo per ρ otteniamo

$$\partial_t v + v \partial_x v + \frac{1}{\rho} \partial_x p$$

Gli autovalori dello Jacobiano sono $v - c, v, v + c$ dove $c = c(p)$ è la velocità del suono.

Definizione 5.1. Il sistema lineare $U_t + AU_x = 0$ si dice iperbolico se A è diagonalizzabile con autovalori reali. Nel caso non lineare, diremo che il sistema è iperbolico se la matrice Jacobiana è diagonalizzabile

Consideriamo un sistema lineare iperbolico con condizione iniziale assegnata

$$\begin{cases} U_t + AU_x = 0 \\ U(0, x) = U_0(x) \end{cases} \quad (31)$$

Poichè A è diagonalizzabile, se $\{r_1, \dots, r_m\}$ è una base di autovettori relativi a $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ otteniamo

$$A = R\Lambda R^{-1} \text{ dove } R = (r_1 \ \dots \ r_m) \text{ e } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

Da cui

$$U_t + AU_x = 0 \quad \Rightarrow \quad U_t + R\Lambda R^{-1}U_x = 0 \quad \Rightarrow \quad (R^{-1}U)_t + \Lambda (R^{-1}U)_x = 0$$

Ponendo $W = R^{-1}U$ otteniamo un sistema lineare di m equazioni disaccoppiate.

$$W_t + \Lambda W_x = 0$$

Tale sistema si risolve risolvendo m equazioni scalari

$$\begin{cases} W_t^p + \lambda_p W_x^p = 0 \\ W^p(0, x) = W_0^p(x) \end{cases} \quad (32)$$

dove W^p è la componente p -esima di W detta **componente caratteristica**, mentre $W_0^p(x)$ è la p -esima componente di $R^{-1}U_0(x)$.

Il problema di Cauchy (32) ha come soluzione

$$W^p(t, x) = W_0^p(x - \lambda_p t)$$

dunque la soluzione di (31) è

$$U(t, x) = R \begin{pmatrix} W^1(t, x) \\ \vdots \\ W^m(t, x) \end{pmatrix}$$

5.1 Problema di Riemann

Siano $U_L, U_R \in \mathbb{R}^m$ e supponiamo che

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

dunque

$$W_0(x) = R^{-1}U_0(x) = \begin{cases} W_L & \text{se } x < 0 \\ W_R & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

da cui risolvendo (32) otteniamo

$$W^p(t, x) = \begin{cases} W_L^p & \text{se } x < \lambda_p t \\ W_R^p & \text{se } x > \lambda_p t \end{cases}$$

cioè ogni componente di W ha un salto: è un'onda che si propaga con velocità λ_p . La soluzione del problema originario (31) ha invece m salti infatti

$$U_R - U_L = R(W_R - W_L) = \sum_{p=1}^m (W_R^p - W_L^p) r_p = \sum_{p=1}^m \alpha^p r_p$$

Osservazione 21. Lungo la p -esima caratteristica (r_p) solo W^p ha un salto che soddisfa la condizione di Rankino-Hugonot. Dunque, il salto si propaga con una velocità di λ_p

Esempio 5.3 (Equazione delle onde). Consideriamo l'equazione delle onde con condizioni iniziali

$$U(0, x) = U_0(x) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < 0 \\ U_R & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Verifichiamo che la soluzione è

$$U(t, x) = \begin{cases} U_L & \text{se } x < -ct \\ U^* & \text{se } -ct < x < ct \\ U_R & \text{se } x > ct \end{cases} \text{ dove } U^* = \begin{pmatrix} \frac{-U_R^1 + U_R^2}{2} \\ \frac{U_L^1 + U_L^2}{2} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Un semplice calcolo mostra che

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

$$W_0(x) = R^{-1}U_0(x) = \begin{cases} W_L & \text{se } x < 0 \\ W_R & \text{se } x > 0 \end{cases} \text{ dove } W_L = \begin{pmatrix} \frac{-U_L^1 + U_L^2}{2} \\ \frac{U_L^1 + U_L^2}{2} \end{pmatrix} \text{ e } W_R = \begin{pmatrix} \frac{-U_R^1 + U_R^2}{2} \\ \frac{U_R^1 + U_R^2}{2} \end{pmatrix}$$

dunque possiamo risolvere due equazioni linear advection per W^1 e W^2 ottenendo

$$W^1(t, x) = W_0^1(x + ct) = \begin{cases} W_L^1 & \text{se } x < -ct \\ W_R^1 & \text{se } x > -ct \end{cases}$$

$$W^2(t, x) = W_0^2(x - ct) = \begin{cases} W_L^2 & \text{se } x < ct \\ W_R^2 & \text{se } x > ct \end{cases}$$

dunque la soluzione del problema iniziale è data da

$$U(t, x) = RW(t, x)$$

Un semplice calcolo termina l'esercizio.

Osservazione 22. Per risolvere numericamente gli schemi numerici, si possono usare schemi ai volumi finiti come nel caso scalare con alcune differenze.

La condizione CFL diventa

$$\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{|\lambda_{max}(U)|}$$

dove $\lambda_{max}(U)$ è il massimo autovalore della matrice Jacobiana calcolata in U

Se implementiamo il metodo di Rusonov occorre sostituire la derivata con il massimo autovalore ovvero

$$\alpha = \max (|\lambda_{max}(U_j^n)|, |\lambda_{max}(U_{j+1}^n)|)$$

6 Sistemi di rilassamento

Partiamo dal sistema

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (33)$$

e riscriviamolo come il sistema di due equazioni lineari

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0 \\ v_t + a^2 u_x = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v) \end{cases} \quad (34)$$

Il sistema è ottenuto grazie all'introduzione di una nuova variabile v ; la seconda equazione ha un termine di sorgente che descrive un rilassamento $v \rightarrow f(u)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Verifichiamo cosa succede per $\varepsilon \rightarrow 0$. Consideriamo l'espansione di Chapman-Enskog

$$v^\varepsilon(t, x) = v_0(t, x) + \varepsilon v_1(t, x) + O(\varepsilon^2)$$

inserendola nella seconda equazione di (34) e uguagliando i termini dello stesso ordine si ha

$$\begin{cases} v_0(t, x) = f(u(t, x)) & \text{ordine 0} \\ v_1(t, x) = -\partial_t v_0(t, x) - a^2 u_x & \text{ordine 1} \end{cases}$$

Inserendo l'espansione nella prima equazione di (34) otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u + \partial_x v^\varepsilon = \partial_t u + \partial_x [f(u) - \varepsilon (\partial_t f(u) + a^2 \partial_x u)] + O(\varepsilon^2) = \\ &= \partial_t u + \partial_x [f(u) - \varepsilon (f'(u) \partial_t f(u) + a^2 \partial_x u)] + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\partial_t u = -\partial_x f(u) + O(\varepsilon)$$

dunque andando a sostituire otteniamo omettendo $O(\varepsilon^2)$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u + \partial_x [f(u) - \varepsilon (-f'(u) \partial_x f(u) + a^2 \partial_x u)] = \\ &= \partial_t u + \partial_x [f(u) - \varepsilon (f'(u)^2 \partial_x u + a^2 \partial_x u)] \end{aligned}$$

dunque otteniamo

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \varepsilon \partial_x [\mu(u) \partial_x u] \quad (35)$$

dove $\mu(u) = a^2 - f'(u)^2$ è il coefficiente di diffusione.

- Per $\varepsilon \sim 0$ risolvo l'equazione di partenza (33) con l'aggiunta di una perturbazione diffusiva.
- Per $\varepsilon = 0$ risolvo l'equazione di partenza.

Osservazione 23 (Condizione delle sottocaratteristiche).

L'equazione (35) è stabile se e solo se $\mu(u) > 0$ e dunque se e solo se $a \geq |f'(u)|$.

Possiamo riscrivere il sistema (34) come

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v) \end{pmatrix} \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (36)$$

dunque tale condizione afferma che la velocità dell'equazione non lineare deve essere compresa tra le velocità di propagazione per le variabili caratteristiche (gli autovalori di A sono appunto $\pm a$).

Riscriviamo il sistema di rilassamento nelle variabili caratteristiche (w, z)

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_x = \frac{1}{\varepsilon} R^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) - v \end{pmatrix} \text{ dove } R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -a & a \end{pmatrix}$$

che in componenti diventa

$$\begin{cases} w_t - aw_x = \frac{1}{2a\varepsilon} (v - f(u)) \\ z_t + az_x = \frac{1}{2a\varepsilon} (f(u) - v) \end{cases}$$

Usando l'espressione per le variabili caratteristiche

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{cases} w_t - aw_x = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{au - f(u)}{2a} - w \right) \\ z_t + az_x = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{au + f(u)}{2a} - z \right) \end{cases}$$

Introducendo una variabile ξ che assume valori $\pm a$ e considerando le funzioni

$$g(t, x, \xi) = \begin{cases} w(t, x) & \text{se } \xi = -a \\ z(t, x) & \text{se } \xi = a \end{cases} \quad M(t, x, \xi) = \begin{cases} \frac{au - f(u)}{2a} & \text{se } \xi = -a \\ \frac{au + f(u)}{2a} & \text{se } \xi = a \end{cases}$$

il sistema in variabili caratteristiche si scrive come

$$\partial_t g + \xi \partial_x g = \frac{1}{\varepsilon} (M(t, x, \xi) - g(t, x, \xi))$$

6.1 Metodo numerico per il rilassamento

Applichiamo l'operator splitting al sistema di rilassamento.

- Passo di rilassamento:

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) - v \end{pmatrix}$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$, l'equazione diventa stiff, la risolvo con Eulero implicito.

$$\begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n \\ \bar{v}_j^{n+1} = v_j^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n \\ \bar{v}_j^{n+1} = \frac{v_j^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} f(u_j^n)}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Pongo $\bar{y}_n = \begin{pmatrix} u_j^{n+1} \\ v_j^{n+1} \end{pmatrix}$

- passo di trasporto

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -A \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Lo risolvo con Eulero esplicito

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \bar{u}_j^{n+1} - \Delta t (\partial_x v)_j \\ v_j^{n+1} = \bar{v}_j^{n+1} - a^2 \Delta t (\partial_x u)_j \end{cases}$$

Passando in variabili caratteristiche

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = \bar{w}_j^{n+1} - \Delta t (-a \partial_x w)_j'' \\ z_j^{n+1} = \bar{z}_j^{n+1} - \Delta t (-a \partial_x z)_j'' \end{cases}$$

Risolviamo con upwind ottenendo

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = \bar{w}_j^{n+1} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{w}_{j+1}^{n+1} - \bar{w}_j^{n+1}) & \text{da dx} \\ z_j^{n+1} = \bar{z}_j^{n+1} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{z}_j^{n+1} - \bar{w}_{j-1}^{n+1}) & \text{da sx} \end{cases}$$

Sommando e sottraendo $\frac{1}{2}w_{j-1}$ e spezzando $w_{j+1} = \frac{1}{2}w_{j+1} + \frac{1}{2}w_{j+1}$ sulla parte a destra della prima equazione otteniamo ometteremo gli apici $n+1$ e la soprassottolineatura:

$$w_{j+1} - w_j = \frac{1}{2}(w_{j+1} - w_{j-1}) + \frac{1}{2}(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1})$$

analogamente per la seconda

$$z_j - z_{j-1} = \frac{1}{2}(z_{j+1} - z_{j-1}) - \frac{1}{2}(z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1})$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_j^{n+1} = \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{z} \end{pmatrix}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{j+1}^{n+1} - \bar{w}_{j-1}^{n+1} \\ \bar{z}_{j+1}^{n+1} - \bar{z}_{j-1}^{n+1} \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{w}_j + \bar{w}_{j-1}^{n+1} \\ \bar{z}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{z}_j^{n+1} + \bar{z}_{j-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

Riscrivendo di nuovo in variabili conservative (moltiplicando per la matrice degli autovettori)

$$y_j^{n+1} = \bar{y}_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} A (\bar{y}_{j+1}^{n+1} - \bar{y}_{j-1}^{n+1}) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} R|A|R^{-1} (\bar{y}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{y}_j^{n+1} + \bar{y}_{j-1}^{n+1}) \quad \text{dove } y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Osservazione 24. Il passo di trasporto è diventato con upwind una derivata centrata (da sola sarebbe instabile) con un termine diffusivo (che stabilizza) ovvero un metodo di Lax-Friedrichs.

6.2 Metodo delle particelle

Ricordiamo che il sistema di rilassamento può essere visto come

$$\partial_t g(t, x, \xi) + \xi \partial_x g(t, x, \xi) = \frac{1}{\varepsilon} (M - g)(t, x, \xi)$$

Applicando l'operator splitting otteniamo

- Passo di rilassamento:

$$\partial_t g = \frac{1}{\varepsilon} (M - g)$$

Integrando in ξ ottengo

$$\partial_t \int g \, d\xi = \frac{1}{\varepsilon} \left(\int M \, d\xi - \int g \, d\xi \right)$$

ma $\int g \, d\xi = w + z = u$ e $\int M \, d\xi = u$ dunque otteniamo

$$\partial_t \int g \, d\xi = \partial_t u = 0$$

ovvero u è costante.

Poichè

$$M = \begin{cases} \frac{au - f(u)}{2a} & \text{se } \xi = -a \\ \frac{au + f(u)}{2a} & \text{se } \xi = a \end{cases}$$

anche M risulta costante.

Posso integrare esattamente ottenendo

$$g(t + \Delta t, x, \xi) = g(t, x, \xi) e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}} + M(t, x) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}} \right)$$

ovvero

$$g(t + \Delta t, x, \xi) = \begin{cases} g(t, x, \xi) & \text{con probabilità } e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}} \\ M(t, x) & \text{con probabilità } \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}} \right) \end{cases}$$

- Passo di trasporto: $\partial_t g + \xi \partial_x g = 0$ è una linear advection dunque

$$g(t + \Delta t, x, \xi) = g(t, x - \xi \Delta t, \xi)$$

Notiamo che la massa totale è

$$M = \int_{\Omega} u_0(x) \, dx = \int_{\Omega} \int g(0, x, \xi) \, d\xi \, dx$$

e che le condizioni periodiche implicano la conservazione della massa totale.

Consideriamo N_p particelle con massa di $\mu = \frac{M}{N_p}$ e definiamo la media di cella

$$\bar{u}_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_j} u(t, x) \, dx$$

La massa su ogni cella vale $m_j = \Delta x \bar{u}_j$ e dunque all'istante iniziale su ogni cella I_j abbiamo

$$n_j^0 = \left\lfloor \frac{\bar{u}_j^0 \Delta x}{\mu} \right\rfloor$$

Disponiamo le particelle uniformemente nella cella (con probabilità uniforme) e dunque ho definito x_k : la posizione della particella k .

Assegno, inoltre, ad ogni particella una velocità ξ_k

- Nel passo di rilassamento non modifico la posizione delle particelle (il passo di rilassamento non ha convezione) mentre ξ_k cambia seguendo la legge di probabilità

$$\xi_k = \begin{cases} \xi_k & \text{con probabilità } e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}} \\ \xi'_k \text{ campionata da } M & \text{con probabilità } \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

- Il passo di trasporto diventa $x_k = x_k + \xi_k \Delta t$

7 Equazione di Boltzmann

7.1 Equazione di Lorentz o di Boltzmann lineare

Consideriamo una particella di massa m che si muove attraverso un sistema di ostacoli fissi nel piano \mathbb{R}^2 . Supporremo che

- La particella ha massa unitaria.
- Gli ostacoli sono sfere in \mathbb{R}^2 di raggio r , la configurazione degli ostacoli è dunque univocamente determinata dalla posizione dei centri $C = \{c_1, c_2, \dots\}$.
- I centri degli ostacoli sono distribuiti in \mathbb{R}^2 secondo una distribuzione di Poisson ovvero fissato un insieme limitato $A \subset \mathbb{R}^2$ assumeremo che

$$P(|A \cap C| = k) = e^{-n \text{Vol}(A)} \frac{(n \text{Vol}(A))^k}{k!}$$

dove n è un parametro libero che corrisponde al numero di ostacoli per unità di area

- Quando una particella urta contro un'ostacolo, la sua velocità cambia istantaneamente da v (pre-collision state) a v' (post-collision state) in modo che valga

$$v' = v - \alpha \omega$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\omega \in S^1$ (descrive il cambio di posizione della particella).

- Vale la conservazione dell'energia cinetica: $\|v\| = \|v'\|$.
Da tale conservazione segue che $\alpha = 0$ oppure $\alpha = 2\langle v, \omega \rangle$. Ora $\alpha = 0$ è da scartare (non c'è interazione) e dunque

$$T_\omega(v) = v' = v - 2\langle v, \omega \rangle \omega$$

- ω viene scelto naturalmente in modo da avere una riflessione sulla tangente all'ostacolo nel punto di collisione (angolo d'incidenza uguale all'angolo di riflessione) ovvero

$$\omega = \begin{pmatrix} \cos(\pi - \theta) \\ \sin(\pi - \theta) \end{pmatrix} \quad \text{dove } \theta = \arcsin\left(\frac{\rho}{r}\right)$$

dove ρ è la distanza tra il raggio incidente (prolungamento del vettore v) e la retta parallela a v passante per il centro dell'ostacolo.

Teorema 7.1. *Assumendo di avere conservazione dell'energia cinetica, e dato uno stato pre-collisionale v , l'insieme di tutti i possibili stati post-collisionali può essere parametrizzato dal vettore ω come*

$$T_\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad T_\omega(v) = v' = v - 2\langle v, \omega \rangle \omega$$

Questa trasformazione ha le seguenti proprietà

$$(i) \quad T_\omega = T_{-\omega}$$

$$(ii) \quad T_\omega \circ T_\omega = id$$

$$(iii) \quad \left| \det \frac{\partial T_\omega v}{\partial v} \right| = 1$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio

Data la configurazione degli ostacoli C , le particelle si muovono in

$$Z_r = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d(y, c) \geq r \forall c \in C\}$$

Consideriamo una particella con posizione iniziale $x_0 \in Z_r$ e velocità iniziale $v_0 \in S^1$ allora possiamo definire in modo unico la traiettoria come

$$X(t; x_0, v_0, C) \in Z_r \quad V(t; x_0, v_0, C) \in S^1$$

in modo che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t; x_0, v_0, C) = V(t; x_0, v_0, C) \\ \frac{d}{dt} V(t; x_0, v_0, C) = 0 \end{cases}$$

dove la prima uguaglianza è la descrizione fisica mentre la seconda viene imposta (il cambio di velocità tra v e v' è istantaneo) inoltre se

$$d(c_i, X(t_c^-; x_0, v_0, C)) = r$$

ovvero quando una particella urta contro un'ostacolo otteniamo

$$\begin{cases} X(t_c^+; x_0, v_0, C) = X(t_c^-; x_0, v_0, C) \\ V(t_c^+; x_0, v_0, C) = T_\omega V(t_c^-; x_0, v_0, C) \end{cases}$$

dove

- t_c^- è il tempo appena prima della collisione e
- t_c^+ è il tempo appena dopo la collisione

In termini di densità di probabilità siano

- $f_0(x_0, v_0)$ la densità di probabilità degli stati iniziali della particella.
- $f(t, x, v)$ la densità di probabilità degli stati (x, v) al tempo t

e definiamo l'evoluzione della f in tempo muovendoci indietro nel tempo lungo le caratteristiche (traiettoria):

$$f(t, x, v \mid C) = f_0(X(-t; x, v, C), V(-t; x, v, C)) \quad (37)$$

La definizione di C definisce in modo unico una sequenza di tempi di collisione:

$$\tau_j(x, v, C) = \sup \{t \in \mathbb{R} : |\{s \in [0, t] : d(X(-s; x, v, C), C) = r\}| = j - 1\}$$

ovvero τ_j è il tempo massimo nel quale ho già avuto $j - 1$ collisioni (è il tempo appena prima della j -esima collisione).

Dunque possiamo riscrivere (37) come

$$\begin{aligned} f(t, x, v \mid C) &= f_0(x - vt, v) \chi_{t < \tau_1} + \\ &+ \sum_{j \geq 1} f_0 \left(x - \sum_{k=1}^j \Delta \tau_k V(-\tau_k^-; x, v, C) - (t - \tau_j) V(-t_j^+; x, v, C), V(-t_j^+; x, v, C) \right) \chi_{\tau_j \leq t < \tau_{j+1}} \end{aligned} \quad (38)$$

Sofferamoci solo sul primo addendo in (38). La probabilità di non avere collisioni in un tempo t equivale alla probabilità di non avere centri c_i in un tubo T di lunghezza $|v| \Delta t \leq |v| t$ e ampiezza $2r$ intorno alla traiettoria della particella dunque

$$\langle \chi_{0 \leq t < \tau_1} \rangle = \mathbb{P}(|T \cap C| = 0) = e^{-n \text{Vol}(T)} = e^{-n(2r|v|t + \pi \frac{r^2}{2})}$$

Facendo un limite di Boltzman-Gradd:

- $n \rightarrow +\infty$ (numero di ostacoli cresce)
- $r \rightarrow 0^+$ (grandezza ostacoli diminuisce)
- $2nr \rightarrow \sigma > 0$

otteniamo

$$f(t, x, v) = f_0(x - vt, v) e^{-\sigma t}$$

e dunque f è soluzione dell'equazione di Liouville

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \sigma f(t, x, v) = 0$$

Teorema 7.2 (di Gallavotti). *Sia f_0 una funzione sufficientemente smooth (continua e limitata) su $\mathbb{R}^2 \times S^1$ e sia $f(t, x, v | C)$ come in (38). Assumendo che gli ostacoli siano distribuiti secondo una legge poissoniana di parametro $n = \frac{\sigma}{2r}$ allora la media su tutte le configurazioni è tale che*

$$\langle f(t, x, v | C) \rangle \rightarrow f(t, x, v) \text{ in } L^1(\mathbb{R}^2 \times S^1) \text{ per } r \rightarrow 0$$

dove f è la soluzione dell'equazione di Lorentz

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \sigma f(t, x, v) = \frac{\sigma}{4} \int_0^{2\pi} f(t, x, R_\beta v) \sin \frac{\beta}{2} d\beta$$

dove R_β è la matrice di rotazione di angolo $\beta = \pi - 2\theta$

7.2 Equazione di Boltzmann

Consideriamo due particelle, se le loro velocità pre-collisionali sono v, w , indicheremo con v', w' quelle post-collisionali.

Assumeremo che

- valga la conservazione della massa, assumeremo inoltre che tutte le particelle di gas abbiano massa pari ad 1
- valga la conservazione del momento

$$v' + w' = v + w$$

- valga la conservazione dell'energia cinetica

$$||v'||^2 + ||w'||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$$

- tutte le particelle sono indistinguibili
- valga l'ipotesi del caos molecolare: due particelle sono indipendenti

come nel caso dell'interazione particella-ostacoli possiamo descrivere u', w' con una trasformazione

$$\begin{pmatrix} v' \\ w' \end{pmatrix} = T_{\Omega} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v - \langle v - w, \Omega \rangle \Omega \\ w - \langle w - v, \Omega \rangle \Omega \end{pmatrix}$$

che ha le medesime proprietà.

In questo caso, l'evoluzione in tempo della densità di probabilità $f(t, x, v)$ degli stati microscopici x, v di una particella è descritto dall'equazione di Boltzmann

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = Q(f, f)$$

dove

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} ||v - w|| (f(t, x, v')f(t, x, w') - f(t, x, v)f(t, x, w)) dw ds(\Omega)$$

è detto operatore collisionale.

In generale si ha

$$Q(f, f) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} k(v' \rightarrow v | w') (f(t, x, v')f(t, x, w') - f(t, x, v)f(t, x, w)) dw ds(\Omega)$$

dove

- il primo termine descrive in probabilità la crescita della f dovuta al fatto che da v' passo a v dato w'
- il secondo termine descrive in probabilità la decrescita di f dovuta al fatto che interagendo perdo la velocità v

7.3 Proprietà dell'equazione di Boltzmann

Se non espressamente detto, supporremo sempre che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(t, x, v) = 0$$

Definizione 7.1. Data una densità cinetica $f = f(t, x, v)$,

$$q(t) = \int_X \int_V \varphi(v) f(t, x, v) dv dx$$

è una quantità **conservata** se $\frac{d}{dt}q(t) = 0$

Definizione 7.2. Diciamo che una funzione $\varphi = \varphi(v)$ è un invariante collisionale se

$$\int_V \varphi(v) Q(f, f) dv = 0$$

per tutte le densità di probabilità f

Proposizione 7.3. *Un invariante collisionale φ ha sempre una quantità conservata associata:*

$$\int_V \varphi(v) Q(f, f) dv = 0$$

$$q(t) = \int_X \int_V \varphi(v) f(t, x, v) dv dx$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q(t) &= \frac{d}{dt} \int_X \int_V \varphi(v) f(t, x, v) dv dx = \int_X \int_V \varphi(v) \partial_t f(t, x, v) dv dx = \\ &= \int_X \int_V \varphi(v) (-v \cdot \nabla_x f(t, x, v)) dv dx + \int_X \int_V \varphi(v) Q(f, f) dv dx \end{aligned}$$

Ora il primo integrale è nullo (si integra per parti e si usa l'ipotesi) dunque otteniamo

$$\frac{d}{dt}q(t) = \int_X \int_V \varphi(v) Q(f, f) dv dx$$

□

Lemma 7.4.

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v') + \varphi(w') \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ è un invariante collisionale}$$

Corollario 7.5.

- $\varphi_0(v) = 1$ è un invariante collisionale: la massa si conserva

$$q(t) = \int_V \int_X f(t, x, v) dx dv$$

- $\varphi_i(v) = v_i$ per $i = 1, \dots, 3$ è un invariante collisionale: l'integrale del flusso (momento) si conserva

$$q(t) = \int_V \int_X v f(t, x, v) dx dv$$

- $\varphi_4(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2$ è un invariante collisionale: l'energia cinetica si conserva

$$q(t) = \int_X \int_V \frac{1}{2} \|v\|^2 3f(t, x, v) dv dx$$

Teorema 7.6. Sia $\varphi = \varphi(v)$ continua

$$\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v') + \varphi(w') \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(v) \in \text{Span}(\varphi_0, \dots, \varphi_4)$$

Definizione 7.3. Una densità cinetica $f = f(t, x, v)$ è detta **distribuzione di equilibrio** se $Q(f, f) = 0$

Proposizione 7.7. Una distribuzione è di equilibrio se è l'esponenziale di un invariante collisionale della forma $\varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(v') + \varphi(w')$

Dimostrazione. Usando la definizione di operatore collisionale Q , osserviamo che f è una distribuzione di equilibrio se

$$f(v')f(w') = f(v)f(w) \quad \Leftrightarrow \quad \log f(v') + \log f(w') = \log f(v) + \log f(w)$$

e ciò accade ad esempio se $\log f$ è un invariante collisionale della forma vista in precedenza

Definizione 7.4. Una distribuzione della forma

$$M_{(\rho, u, T)}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{\|v - u\|^2}{2T}\right)$$

è detta Maxwelliana dove

$$\begin{aligned} \rho &= \int M dv && \text{è la densità} \\ v &= \frac{1}{\rho} \int v M dv && \text{è la velocità media del gas} \\ T &= \frac{1}{3\rho} \int \|v - u\|^2 M dv && \text{è la temperatura} \end{aligned}$$

Teorema 7.8 (H di Boltzmann). Sia f una soluzione dell'equazione di Boltzmann sufficientemente smooth con $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(t, x, v) = 0$.

Definita l'entropia come

$$H(t) = \int_X \int_V f(t, x, v) \log f(t, x, v) dv dx$$

allora essa decade in tempo e vale

$$\frac{d}{dt} H(t) = \int_X \int_V Q(f, f) \log f dv dx \leq 0$$

inoltre

$$\frac{d}{dt} H(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è una Maxwelliana}$$

Dimostrazione. Con cambi analoghi a quelli utilizzati nel primo lemma e utilizzando le proprietà dei logaritmi si prova che

$$\int_V \log f Q(f, f) dv = \frac{1}{4} \int_V \int_V \int_{S^2} k(v \rightarrow v' | w') f(v') f(w) \left(1 - \frac{f(v)f(w)}{f(v')f(w')}\right) \log \left(\frac{f(v)f(w)}{f(v')f(w')}\right) dv dw ds(\Omega)$$

dunque abbiamo una funzione del tipo $z \rightarrow (1 - z) \log z$ che è non positiva dunque $\frac{d}{dt} H(t) \leq 0$. Si verifichi per esercizio che vale 0 prendendo $f = M$

Osservazione 25. $\log f$ è un invariante collisionale quando $f = M$ e quindi M è un equilibrio

Tipicamente nel cercare soluzioni di equilibrio di un'equazione di tipo Boltzmann, consideriamo l'equazione omogenea associata

$$\partial_t f(t, x, v) = Q(f, f)$$

ovvero l'equazione senza dipendenza dalla variabile x . Non abbiamo il termine di trasporto.

7.4 Boltzmann e gas dinamica

Le equazioni macroscopico di Eulero possono essere derivate a partire da quelle di Boltzmann con un limite idrodinamico.

Integrando l'equazione di Boltzmann rispetto ai 4 invarianti collisionali otteneniamo

$$\partial_t \int_V \varphi(v) f(t, x, v) dv + \partial_x \int_V \varphi(v) v f(t, x, v) dv = \int_V \varphi(v) Q(f, f) dv$$

- Se $\varphi = \varphi_0$ allora otteniamo l'equazione di continuità

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x (\rho u) = 0$$

- Se $\varphi = \varphi_1$ (supponiamo per semplicità $v \in \mathbb{R}$) allora

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x \left(\int v^2 f(t, x, v) \right) = 0$$

Ora supporremo di essere all'equilibrio ovvero $f = M$ ottenendo

$$\int v^2 f dv = \int v^2 M dv = \int u^2 M dv + \int \xi^2 M d\xi$$

dove $\xi = v - u$ è detta velocità termina, mentre il secondo integrale è la pressione. Dunque otteniamo

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2 + P) = 0$$

7.5 Boltzmann e opinioni

Consideriamo una popolazione con opinioni descritte da un parametro $x \in \Omega = [-n_1 R, n_2 R]$:

- $x < 0$ modella un'opinione contraria ad un dato statement;
- $x = 0$ modella un'opinione neutrale;
- $x > 0$ modella un'opinione favorevole.

Assegnata una densità di probailità iniziale f_0 su Ω , la densità di probailità $f : R^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ sulle opinioni degli agenti evolve seguendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = Q[f, f](t, x) \\ f(0, x) = f_0(x) \end{cases} \quad (39)$$

dove

$$Q[f, f](t, x) = \int_{\Omega} \int_{\Omega} \eta(y, z | R) k(x | y, z) f(t, y) f(t, z) dy dz - f(t, x) \int_{\Omega} \eta(x, z | R) f(t, z) dz$$

- η indica se due agenti possono interagire (tasso d'interazione)

$$\eta(y, z | R) = \chi_{|y-z| \leq R}$$

- k è il kernal d'interazione e vale

$$k(x | y, z) = \delta \left(x - \frac{y+z}{2} \right)$$

Il modello è di tipo compromesso: se due agenti interagiscono, mediano la loro opinione.

Usando che l'integrale di una delta di Dirac vale 1, l'operatore collisionale si può scrivere come nella formulazione di Boltzmann

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \eta(y, z | R) k(x | y, z) f(t, y) f(t, z) dy dz - f(t, x) \int_{\Omega} \eta(x, z | R) f(t, z) dz \int_{\Omega} k(y | x, z) dy$$

Per cercare gli invarianti collisionali ricaviamo la formulazione debole di (39):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_X \varphi(x) f(t, x) dx = \\ \int_{\Omega^3} \varphi(x) \eta(y, x | R) k(x | y, z) f(t, y) f(t, z) dy dz dx - \int_{\Omega^2} \eta(x, z | R) f(t, c) f(t, z) \varphi(x) dx dz \end{aligned}$$

Moltiplicando il secondo termine per $1 = \int_{\Omega} k(y | z, x) dy$ e usando il cambio $x \leftrightarrow y$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^3} \eta(y, x | R) k(x | y, z) f(t, y) f(t, z) (\varphi(x) - \varphi(y)) dy dz dx = \\ & = \int_{\Omega^2} \eta(y, z | R) \left(\varphi \left(\frac{y+z}{2} \right) - \varphi(y) \right) f(t, y) f(t, z) dy dz \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che η è una delta di Dirac opportunamente centrata.

- Se $\varphi(x) = 1$ allora ottengo la conservazione del momento 0 (la massa)

$$m_0 = \int_{\Omega} f(t, x) dx$$

- Se $\varphi(x) = x$ allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} x f(t, x) dx &= \int_{\Omega^2} \eta(y, z | R) \left(\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) f(t, y) f(t, z) dy dz = \\ &= \int_{\Omega^2} \eta(y, z | R) \left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2} \right) f(t, y) f(t, z) dy dz = \\ &= \int_{\Omega^2} \eta(z, y | R) \left(\frac{y}{2} - \frac{z}{2} \right) f(t, y) f(t, z) dy dz \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la simmetria del kernel d'interazione.

Utilizzando il cambio $y \leftrightarrow z$

$$\int_{\Omega^2} \eta(y, z | R) \left(\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) f(t, y) f(t, z) dy dz = - \int_{\Omega^2} \eta(y, z | R) \left(\frac{z}{2} - \frac{y}{2} \right) f(t, y) f(t, z) dy dz$$

Abbiamo dunque provato che $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} x f(t, x) dx = 0$ il momento primo (la media delle opinioni) si conserva

Teorema 7.9.

- (i) Se $n = n_1 = n_2 < 1$ allora

$$m_2(t) = \int_{\Omega} x^2 f(t, x) dx \downarrow m_1(0)^2 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

Dunque

$$\text{Var}(t) = m_2(t) - m_1(t)^2 \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

e

$$f(t, x) \rightarrow f^{\infty}(x) = \delta(x - m_1(0)) \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

ovvero si forma consenso

- (ii) Se $n = n_1 = n_2 > 1$ e $f_0(x) = \frac{1}{2nR}$ allora

$$f(t, x) \rightarrow f^{\infty}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \delta(x - x_k)$$

dove

$$x_k \in B \left(nR - (2k + 1)R, \frac{R}{2} \right) \text{ e } \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k = 1$$

ovvero si formano $n - 1$ cluster.

Dimostrazione.

(i)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}m_2(t) &= \int_{-nR}^{nR} \int_{-nR}^{nR} \eta(y, z | R) \left(\left(\frac{y+z}{2} \right)^2 - y^2 \right) f(t, y) f(t, z) dy dz = \\ &= \int_{-nR}^{nR} \int_{-nR}^{nR} \eta(y, z | R) \left(\frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}y^2 + \frac{yz}{2} \right) f(t, z) f(t, y) dy dz = \\ &= -\frac{1}{2}m_2(t) + \frac{1}{2}m_1^2(0)\end{aligned}$$

Abbiamo dunque l'equazione differenziale

$$\dot{m}_2(t) = -\frac{1}{2}m_2(t) + \frac{1}{2}m_1^2(0)$$

che ha come soluzione

$$m_2(t) = m_2(0)e^{-\frac{1}{2}t} + m_1(0)^2 \rightarrow m_1(0)^2 \quad \text{per } t \rightarrow +\infty$$

(ii) Basta verificare che f^∞ è soluzione dell'equazione cinetica in forma debole

Osservazione 26. Nell'equazione (39) manca il termine di trasporto infatti le particelle non si muovono

Osservazione 27. La variabile x gioca il ruolo della velocità dell'equazione di Boltzmann

7.6 Traffico con interazioni Mean-Field

Indicheremo con $x \in \mathbb{R}$ la posizione delle auto e con $v \in [0, v_{max}] = V$ la loro velocità.

Sia

$$f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

dove $f(t, x, v) dx dv$ è la probabilità di avere una macchina in $[x, x + dx]$ che si muove con una velocità in $[v, v + dv]$.

Definiamo le seguenti quantità:

- la densità dei veicoli

$$\rho(t, x) = \int f(t, x, v) dv$$

- il numero dei veicoli

$$N(t) = \int_X \int_V f(t, x, v) dv dx$$

- Il flusso dei veicoli

$$(\rho u)(t) = \int_V v f(t, x, v) dv$$

- il momento del traffico

$$\int_X (\rho u)(t, x) dx$$

Supporremo che i veicoli abbiano solamente due possibili comportamenti.

- Se la velocità pre-interazionale v_* è minore della velocità media del flusso ($v_* \leq u$) i veicoli accelerano: la velocità post-interazionale è:

$$v = v_* + \varepsilon P(\rho) (v_A(v_*, \rho) - v_*) + \sqrt{\varepsilon P(\rho)} (v_A(v_*, \rho) - v_*) \xi$$

dove

- $P(\rho)$ è la probabilità di accelerare che dipende dalle condizioni del traffico,
- ε è un parametro che descrive la forza dell'interazione: se $\varepsilon \rightarrow 0$ allora $v \rightarrow v_*$,
- v_a è una velocità di accelerazione desiderata,
- $\xi \sim \eta(\xi)$ è una variabile aleatoria di media 0 e varianza σ^2 . Tale variabile modella l'incertezza del comportamento umano.

Possiamo dividere l'espressione di v in due parti; la prima parte può essere scritta come

$$v_* (1 - \varepsilon P(\rho)) + v_A \varepsilon P(\rho)$$

Se $\varepsilon P(\rho) \leq 1$ il primo termine assume un valore in $[v_*, v_A]$.

- Se la velocità pre-interazionale è maggiore della velocità media del flusso, i veicoli decelerano : la velocità post-interazionale è:

$$v = v_* - \varepsilon (1 - P(\rho)) (v_* - v_B(v_*, \rho)) + \sqrt{\varepsilon (1 - P(\rho))} (v_* - v_B(v_*, \rho)) \xi$$

Possiamo descrivere l'evoluzione della funzione cinetica f con un'equazione di tipo Boltzmann⁷

$$\begin{aligned} \partial_t f(t, x, w) + w \partial_x f(t, x, w) &= \\ &= \int_V \int_{\mathbb{R}} \int_V k(v_* \rightarrow w | u, \rho) f(t, x, v_*) dv_* \eta(\xi) d\xi f(t, x, v^*) dv^* - f(t, x, w) \int_V f(t, v^*) dv^* = \\ &= \rho(t, x) \int_{\mathbb{R}} \int_V k(v_* \rightarrow w | u, \rho) f(t, x, v_*) \eta(\xi) dv_* d\xi - \rho(t, x) f(t, x, w) \end{aligned}$$

dove per la seconda uguaglianza abbiamo usato $\rho(t, x) = \int_V f(t, x, v^*) dv^* = \rho$.

Il kernel d'interazione è

$$k(v_* \rightarrow w | u, \rho) = \delta(w - v)$$

dove v è una delle velocità post-collisionali viste in precedenza.

Una semplice verifica prova che l'equazione senza dipendenza dal tempo (volendo individuare gli stati stazionari il termine di trasporto è ininfluenza) in forma debole è

$$\frac{d}{dt} \int_V \varphi(w) f(t, w) dw = \left\langle \int_V (\varphi(v) - \varphi(v_*)) f(t, v_*) dv_* \right\rangle \quad (40)$$

Osservazione 28.

- $\varphi(v) = 1$ è un invariante collisionale: il numero di macchine si conserva.
- $\varphi(v) = v$ non è un invariante collisionale: il momento primo non si conserva.

Siamo interessati a determinare la soluzione di equilibrio del modello cinetico, ovvero cerchiamo f^∞ tale che $Q[f^\infty](t, v) = 0$. Trovare tale soluzione risulta difficile; presentiamo un approccio diverso.

Utilizzando il **grazing collision limit** (limite delle collisioni radianti), possiamo passare da un'equazione di tipo Boltzmann (l'operatore collisionale è integrale) ad un'equazione di tipo Fokker-Planck (l'operatore collisionale contiene solo operatori differenziali). L'idea del limite è studiare cosa succede per tempi molto lunghi quando le interazioni diventano tante ma la loro "forza" è bassa ($v \approx v_*$).

Consideriamo uno scaling del tempo $\tau = \varepsilon t$ e sia

$$f(t, v) = \tilde{f}(\tau, v)$$

L'equazione (40) si scrive come

$$\frac{d}{d\tau} \int_V \varphi(w) \tilde{f}(\tau, w) = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_V (\varphi(v) - \varphi(v_*)) \tilde{f}(\tau, v_*) dv_* \right\rangle$$

dove $\langle \cdot \rangle$ rappresenta il valore atteso rispetto a ξ .

Poichè v è definita da due contributi:

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_V (\varphi(v) - \varphi(v_*)) \tilde{f}(\tau, v_*) dv_* \right\rangle = A + B$$

⁷Visto che abbiamo interazioni con il background avremo un'equazione lineare.

dove

$$A = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_0^u (\varphi(v) - \varphi(v_\star)) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_u^{v_{max}} (\varphi(v) - \varphi(v_\star)) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle$$

Espandiamo il termine $\varphi(v) - \varphi(v_\star)$ in serie di Taylor attorno a v_\star :

$$\varphi(v) - \varphi(v_\star) = \varphi'(v_\star)(v - v_\star) + \frac{1}{2}\varphi''(\bar{v}_\star)(v - v_\star)^2 \quad \text{dove } \bar{v}_\star \in (v_\star, v)$$

che con una semplice manipolazione algebrica diventa

$$\varphi(v) - \varphi(v_\star) = \varphi'(v_\star)(v - v_\star) + \frac{1}{2}\varphi''(v_\star)(v - v_\star)^2 + \frac{1}{2}(\varphi''(v_\star) - \varphi''(\bar{v}_\star))(v - v_\star)^2$$

dunque

$$A = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi'(v_\star)(v - v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi''(v_\star)(v - v_\star)^2 \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \langle R_A \rangle$$

dove R_A è il termine di resto che contiene il terzo contributo dello sviluppo.

Usando la definizione di v possiamo riscrivere $v - v_\star$ per ottenere

$$A = \frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi'(v_\star) \left(\varepsilon P \Delta v_A + \sqrt{\varepsilon P} \Delta v_A \xi \right) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi''(v_\star) \left(\varepsilon P \Delta v_A + \sqrt{\varepsilon P} \Delta v_A \xi \right)^2 \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2\varepsilon} \langle R_A \rangle$$

dove abbiamo posto $\Delta v_A = v_A - v_\star$.

Poichè φ una funzione test, φ'' è L-lipschitz:

$$|\varphi''(v_\star) - \varphi''(\bar{v}_\star)| \leq Lc\sqrt{\varepsilon} \quad \text{dove } c = c(\max\{\Delta v_A\}, \xi_{max})$$

dunque

$$\frac{1}{\varepsilon} |\langle R_A \rangle| \leq \frac{Lc\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \int_0^u \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \eta(\xi) d\xi \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

Per calcolare il limite degli altri due termini di A usiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(\xi) d\xi = 1 \quad \int_{\mathbb{R}} \xi \eta(\xi) d\xi = 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \eta(\xi) d\xi = \sigma^2$$

ottenendo

$$\frac{1}{\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi'(v_\star) \left(\varepsilon P \Delta v_A + \sqrt{\varepsilon P} \Delta v_A \xi \right) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle \rightarrow P \int_0^u \Delta v_A \varphi'(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star$$

$$\frac{1}{2\varepsilon} \left\langle \int_0^u \varphi''(v_\star) \left(\varepsilon P \Delta v_A + \sqrt{\varepsilon P} \Delta v_A \xi \right)^2 \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \right\rangle \rightarrow \frac{\sigma^2 P}{2} \int_0^u \Delta v_A^2 \varphi''(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star$$

Analogamente, se $\Delta v_B = v_\star - v_B$, otteniamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} = -(1-P) \int_u^{v_{max}} \Delta v_B \varphi'(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star + \frac{\sigma^2(1-P)}{2} \int_u^{v_{max}} \Delta v_B^2 \varphi''(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_V \varphi(w) \tilde{f}(\tau, w) dw = & P \int_V \chi_{[0,u]}(v_\star) \Delta v_A \varphi'(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star - \\ & -(1-P) \int_V \chi_{[u,v_{max}]}(v_\star) \Delta v_B \varphi'(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star + \\ & + \frac{\sigma^2 P}{2} \int_V \chi_{[0,u]}(v_\star) \Delta v_A^2 \varphi''(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star + \\ & + \frac{\sigma^2(1-P)}{2} \int_V \chi_{[u,v_{max}]}(v_\star) \Delta v_B^2 \varphi''(v_\star) \tilde{f}(\tau, v_\star) dv_\star \end{aligned}$$

Usando l'integrazione per parti e il fatto che $\varphi \in C_c^\infty([0, v_{max}])$ ottengo la formulazione forte

$$\partial_\tau \tilde{f}(\tau, v) + \partial_V \left[\tilde{f}(\tau, v) B - D \partial_v \tilde{f}(\tau, v) \right] = 0$$

dove

$$\begin{aligned} B = & P \chi_{[0,u]}(v) \Delta v_A - (1-P) \chi_{[u,v_{max}]}(v) \Delta v_B - \frac{\sigma^2}{2} \partial_v \left(P \chi_{[0,u]}(v) \Delta v_A^2 + (1-P) \chi_{[u,v_{max}]}(v) \Delta v_B^2 \right) \\ D = & \frac{\sigma^2}{2} \left(P \chi_{[0,u]}(v) \Delta v_A^2 + (1-P) \chi_{[u,v_{max}]}(v) \Delta v_B^2 \right) \end{aligned}$$

se \tilde{f}^∞ è lo stato stazionario dell'equazione precedente allora

$$\partial_t \tilde{f}^\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_v \left(\tilde{f}^\infty B - D \partial_v \tilde{f}^\infty \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{f}^\infty B - D \partial_v \tilde{f}^\infty = C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dv} \tilde{f}^\infty = \frac{B}{D} \tilde{f}^\infty - \frac{C}{D}$$

S.P.G. $C = 0$ ottenendo

$$\frac{d}{dv} \tilde{f}^\infty = \frac{B}{D}$$

che ha soluzioni in termini di esponenziali (si separano i due casi $v < u$ e $v > u$)

Osservazione 29. Ad oggi non sappiamo se $\tilde{f}^\infty \approx f^\infty$

Osservazione 30 (Perchè cerco una soluzione di equilibrio?). Abbiamo visto che in equazione di tipo Boltzmann se $\varphi(v)$ è un invariante collisionale allora

$$\partial_t \int \varphi(v) f(t, x, v) dv + \partial_x \int v \varphi(v) f(t, x, v) = \int \varphi(v) Q[f, f](t, x, v) = 0$$

dunque possiamo ottenere l'equazione di continuità macroscopica

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x (\rho u) = 0$$

ma

$$(\rho u) = \int v f(t, x, v) dv$$

non è una quantità nota. Assumendo che la dinamica cinetica è all'equilibrio ($f = f^\infty$) e nota f^\star in modo esplicito

$$(\rho u)(t, x) = \int v f^\infty(t, x, v) dv$$

è una quantità nota. Ottengo un'equazione di continuità chiusa.

8 Metodi Monte Carlo

8.1 Stimare π

Siano (x_i, y_i) le coordinate di N punti distribuiti uniformemente in $[-1, 1] \times [-1, 1]$ e consideriamo

$$z_i = \begin{cases} 1 & \text{se } \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il numero $z = \sum z_i$ conta il numero di punti che cadono dentro il cerchio unitario centrato in $(0, 0)$.

Poichè $\frac{z}{N}$ è la frazione di punti accettati mentre $\frac{A}{Q}$ è la frazione di area occupata dal cerchio (A area del cerchio unitario centrato in $(0, 0)$ e Q area del quadrato circoscritto) si ha

$$Q \frac{Z}{N} \approx \pi$$

In termini probabilistici, posso pensare di avere N v.a. i.i.d $X_i \sim \text{Beroulli}(\frac{\pi}{4})$ e voglio stimare

il loro valore atteso.

Per la legge dei grandi numeri detta

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum X_i$$

la media campionaria, si ha

$$\mathbb{P} (|\bar{X}_N - \mathbb{E} [\bar{X}_N]|) \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

Dal teorema del limite centrale

$$\sqrt{N} \frac{\bar{X}_N - q}{\sigma(X)} \Rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

ovvero l'errore va a 0 con velocità dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{N}}$

8.2 Quadratura Monte Carlo

Lo scopo del metodo è stimare

$$I = \int_A g(x) dx \quad A = [0, 1]^d \text{ e } g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

L'integrale viene formulato in termini di valore atteso di una certa variabile aleatoria.

Sia $p(x)$ la densità di $\mathcal{U}([0, 1]^d)$ allora

$$I = \int_A g(x) dx = \int_A g(x)p(x) dx = \mathbb{E}[g(X)] \quad X \sim p(x)$$

Se stimo il valore atteso con la media campionaria (usando N valori) l'errore va a 0 con velocità dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Possiamo generalizzare l'idea precedente anche a domini $B \subseteq A = [0, 1]^d$ purchè conosciamo $|B|/\mu(B)$ infatti

$$I = \int_B g(x) dx = \int_A g(x)\chi_B(x) dx$$

definisco la distribuzione

$$p(X) = \frac{1}{\mu(B)}\chi_B(x)$$

allora

$$I = \int_B g(x) dx = \mu(B) \int_A g(x)p(x) dx = \mu(B)\mathbb{E}[g(X)]$$

dove $X \sim p$ e analogamente al caso precedente si usa la media campionaria per stimare il valore atteso

Osservazione 31. La quadratura Monte Carlo

- converge lentamente;
- converge indipendentemente da d ;
- converge indipendentemente dalla regolarità di g ;
- converge indipendentemente dalla regolarità del dominio d'integrazione.

Mentre le regole di quadratura standard su un dominio complesso richiedono di costruire un'opportuna triangolazione (che non è sempre facile)

8.2.1 Dimensional curse

Consideriamo la regola dei trapezi

$$I = \int_a^b g(x) dx \approx Q = \frac{\Delta x}{2} \sum_i (g(x_i) + g(x_{i+1}))$$

dove x_i sono i punti equispaziati in $[a, b]$ e Δx è la loro mutua distanza.

Usando la regola composta dei trapezi otteniamo

$$e = |I - Q| \leq C\Delta x^2 \text{ dove } C = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$$

Misurando la complessità della regola dei trapezi con il numero di valutazioni della funzione g otteniamo

$$e \leq \tilde{C} \frac{1}{N^2}$$

dunque questo metodo risulta più veloce del metodo Monte Carlo.

Analogamente, se integro su un dominio $A \subseteq \mathbb{R}^d$ con una regola di quadratura di ordine p ottengo

$$e = |I - Q| \leq C \Delta x^p \leq \tilde{C} \frac{1}{N^{\frac{p}{d}}}$$

dunque il metodo Monte Carlo diventa conveniente se

$$\frac{1}{\sqrt{N}} < \frac{1}{N^{\frac{p}{d}}} \Leftrightarrow \frac{p}{d} < \frac{1}{2}$$

Osservazione 32. Essendo i trapezi un metodo di ordine 2, se $d > 4$ è conveniente usare il metodo Monte Carlo

8.3 Monte Carlo per sistemi di rilassamento equazioni cinetiche

Vogliamo applicare l'idea Monte Carlo all'equazione cinetica ottenuta dal sistema di rilassamento

$$\partial_t g + \xi \partial_x g = \frac{1}{\varepsilon} (M - g)$$

Per prima cosa posso considerare una versione riscalata rispetto a u di g e M

$$\tilde{g} = \frac{g}{u} \quad \tilde{M} = \frac{M}{u}$$

in questo modo \tilde{g} e \tilde{M} sono distribuzioni di probabilità⁸ (nel seguito ometteremo le tildi). Applichiamo l'operator splitting:

- Passo di rilassamento: occorre risolvere

$$\partial_t g = \frac{1}{\varepsilon} (M - g)$$

Come visto nella sezione sui sistemi di rilassamento, tale equazione lascia la u e dunque la M costante. Risolvendo esattamente:

$$g(t + \Delta x, x, \xi) = g(t, x, \xi) e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}}\right) M(t, x, \xi)$$

Ora per Δt sufficientemente piccolo vale $0 < e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} < 1$ e quindi $g(t + \Delta t, \cdot, \cdot)$ rimane una distribuzione di probabilità (combinazione convessa di probabilità) e dunque è possibile dare un'interpretazione probabilistica

$$g(t + \Delta x, \cdot, \cdot) = \begin{cases} g(t, \cdot, \cdot) & \text{con probabilità } e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \\ M(t, \cdot, \cdot) & \text{con probabilità } 1 - e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Computazionalmente, faccio un sampling di particelle dalla distribuzione g : (x^k, ξ^k) per $k = 1, \dots, N$ e nel passo di rilassamento aggiorno le velocità del modo seguente

$$\xi_k^{n+1} = \begin{cases} \xi_k^n & \text{con probabilità } e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \\ \text{campionata da } M & \text{con probabilità } 1 - e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \end{cases}$$

Poichè M è una distribuzione tale che

$$\mathbb{P}(\xi = -a) = \frac{au - f(u)}{2au}$$

$$\mathbb{P}(\xi = a) = \frac{au + f(u)}{2au}$$

L'espressione precedente diventa

$$\xi_k^{n+1} = \begin{cases} \xi_k^n & \text{con probabilità } e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \\ \begin{cases} -a & \text{con probabilità } \mathbb{P}(\xi = -a) \\ a & \text{con probabilità } \mathbb{P}(\xi = a) \end{cases} & \text{con probabilità } 1 - e^{-\frac{\Delta x}{\varepsilon}} \end{cases}$$

- Passo di trasporto: aggiorno le posizioni

$$x_k^{n+1} = x_k^n + \Delta t \xi_k^{n+1}$$

⁸ $\int g d\xi = \int M dx = u$

8.4 Monte Carlo per equazioni di Boltzmann

Per risolvere numericamente l'equazione di Boltzmann

$$\partial_t f + v \partial_x f = Q(f, f)$$

facciamo uso del *direct simulation Monte Carlo*.

Supporremo (a meno di utilizzare un operator splitting) di non avere alcuna dipendenza dal tempo cioè andremo a risolvere

$$\partial_t f = Q(f, f)$$

Ricordiamo che

$$\int Q(f, f) dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \int f dv = 0$$

quindi assumeremo che f sia una distribuzione di probabilità (normalizziamo la f al tempo iniziale).

Usando Eulero esplicito:

$$f^{n+1} = f^n + \Delta t Q(f^n, f^n) \quad (41)$$

Ora l'operatore collisionale può essere scritto nella forma

$$Q(f, f) = \frac{1}{\varepsilon} G(f, f) - \frac{\mu}{\varepsilon} f$$

dove la μ è un parametro che esprime il fatto che l'interazione non è globale.

L'equazione (41) diventa dunque

$$f^{n+1} = \left(1 - \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon}\right) f^n + \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} \frac{G(f^n, f^n)}{\mu}$$

dunque per $\frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} \in [0, 1]$ è ancora una probabilità (combinazione convessa di probabilità) e ho di nuovo un'interpretazione probabilistica dell'update in tempo della f

$$f^{n+1} = \begin{cases} f^n & \text{con probabilità } 1 - \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} \\ \text{aggiornata} & \text{con probabilità } \frac{\mu \Delta t}{\varepsilon} \end{cases}$$

L'idea di tale metodo è alla base dell'algoritmo di Nanbu [1](#)

Osservazione 33. L'algoritmo di Nanbu non conserva l'energia.

Algorithm 1 Nanbu

```
1: Si scegli un tempo finale  $t_{fin}$  e un passo  $\Delta t$ 
2:  $n_{tot} = \frac{t_{fin}}{\Delta t}$ 
3: Calcoliamo le velocità iniziali delle  $N$  particelle  $\{v_i^0, i = 1, \dots, N\}$  campionandole dalla
   distribuzione iniziale  $f_0(v)$ 
4: for  $n = 1$  to  $n_{tot}$  do
5:   for  $i = 1$  to  $N$  do
6:      $r = \text{random in } [0, 1]$ 
7:     if  $r \leq \mu \frac{\Delta t}{\epsilon}$  then
8:        $j = \text{random in } \{1, \dots, N\} \setminus \{i\}$ 
9:        $v'_i = \text{velocità post-collisionale data dall'interazione tra } i \text{ e } j$ 
10:       $v_i^{n+1} = v'_i$ 
11:     else
12:        $v_i^{n+1} = v_i^n$ 
13:     end if
14:   end for
15: end for
```

9 Limiti Mean-Field

Consideriamo un modello microscopico multiagente (N particle system)

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k(x_i, x_j, v_i, v_j) \end{cases} \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

dove k è il kernal d'interazione.

Introduciamo la distribuzione empirica

$$f^N(t, x, v) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t))$$

Per calcolare la sua evoluzione in tempo, introduciamo unna funzione test $\varphi \in C_c^1(X)$ dove $X = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle f^N, \varphi \rangle &= \frac{d}{dt} \int_X f^N(t, x, v) \varphi(x, v) dx dv = \frac{d}{dt} \int_X \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t)) \varphi(x, v) dx dv = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m \frac{d}{dt} \varphi(x_i(t), v_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \cdot \nabla_x \varphi(x_i(t), v_i(t)) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{v}_i(t) \cdot \nabla_v \varphi(x_i(t), v_i(t)) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(t) \cdot \nabla_x \varphi(x_i(t), v_i(t)) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k(x_i(t), x_j(t), v_i(t), v_j(t)) \right) \cdot \nabla_v \varphi(x_i(t), v_i(t)) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int_X v \cdot \nabla_x \varphi(x, v) \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t)) dx dv + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k(x, x_j(t), v, v_j(t)) \right) \cdot \nabla_v \varphi(x, v) \delta(x - x_i(t)) \delta(v - v_i(t)) dx dv = \\ &= \int_X v \cdot \nabla_x \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv + \int_X \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k(x, x_j(t), v, v_j(t)) \right) \cdot \nabla_v \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv = \\ &= \int_X v \cdot \nabla_x \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv + \\ &+ \int_X \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_X k(x, y, v, w) \delta(y - x_j(t)) \delta(w - v_j(t)) dy dw \right) \cdot \nabla_v \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv = \\ &= \int_X v \cdot \nabla_x \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv + \int_X \left(\int_X k(x, y, v, w) f^N(t, y, w) dy dw \right) \cdot \nabla_v \varphi(x, v) f^N(t, x, v) dx dv \end{aligned}$$

Abbiamo dunque provato

$$\frac{d}{dt} \langle f^N, \varphi \rangle = \langle f^N, v \cdot \nabla_x \varphi(x, v) + \left(\int_X k(x, y, v, w) f^N(t, y, w) dy dw \right) \cdot \nabla_v \varphi(x, v) \rangle$$

ovvero f^N è una soluzione debole di una PDE che, in forma forte, si scrive come

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot \left(f \int_X K(x, y, v, w) f(t, y, w) dy dw \right) = 0$$

tale equazione si chiama di mean-field o di Vlasov.

Andiamo a presentare vari kernal

- Modello di Cucker-Smale ($d = 3$)

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = \frac{\gamma}{N} \sum_{j=1}^N \frac{v_j - v_i}{(1 + \|x_i - x_j\|^2)^\beta} \end{cases}$$

dunque l'equazione mean-field diventa

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla v \cdot \left(f \int_{\mathbb{R}^6} \frac{w - v}{(1 + \|x - y\|^2)^\beta} dy dw \right) = 0$$

- Equazione di Liouville

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = F(t, x_i(t), v_i(t)) \end{cases}$$

dunque l'equazione mean-field diventa

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + \nabla_v \cdot (F(t, x, v)f) = 0$$

Se $\nabla_v \cdot F(t, x, v) = 0$ otteniamo l'equazione di Liouville

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f + F(t, x, v) \cdot \nabla_v f = 0$$

che tipicamente descrive sistemi Hamiltoniani⁹

⁹Non ci sono interazioni tra le particelle.

9.1 Distanza di Wassertein

Definizione 9.1. Data una densità di probabilità $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ e una biezione $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il **push-forward** $\Phi\#f$ è la densità di probabilità tale che

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) (\Phi\#f)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(\Phi(x')) f(x') dx' \quad \forall \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabile}$$

Definizione 9.2. Date $f, g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ due densità di probabilità. La densità di probabilità $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è detta **accoppiamento** (coupling) di f e g se

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\varphi(x) + \psi(y)) \pi(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) + \int_{\mathbb{R}} \psi(y) g(y) \quad \forall \varphi, \psi \text{ integrabili}$$

Denotiamo con $\Pi(f, g)$ l'insieme di tutti gli accoppiamenti di f e g

Osservazione 34. In altre parole, π è un accoppiamento di f e g se f e g sono le marginali di π

Consideriamo due misure

$$\mu = \sum_{j=1}^3 \beta_j \delta(y - y_j) \quad \text{dove } \beta = 0.3, 0.4, 0.3$$

$$\nu = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \delta(y - y_i) \quad \text{dove } \beta = 0.4, 0.1, 0.3, 0.2$$

Consideriamo un "transport plan" da μ a ν ovvero trasportiamo massa da una all'altra

		x_1	x_2	x_3	x_4
		0.4	0.1	0.3	0.2
y_1	0.3	0.3	0	0	0
y_2	0.4	0.1	0.1	0.2	0
y_3	0.3	0	0	0	0.2

Chiaramente il transport plain non è unico, cerchiamo quello con costo minore. Questo concetto di distanza definisce la distanza di Wassertein

$$W_1(\mu, \nu) = \inf \left\{ \sum_{i,j} \pi_{ij} d(x_i, y_j) : \pi_{ij} \geq 0 \quad \sum_{ij} \pi_{ij} = 1 \quad \sum_{i=1}^4 \pi_{ij} = \beta_j \quad \sum_{j=1}^3 \pi_{ij} = \alpha_i \right\}$$

ovvero è il minimo tra tutti i transport plan dove il minimo è inteso nel senso del costo che devo pagare per trasportare massa ($\pi_{ij} d(x_i, y_j)$) può essere visto come il lavoro impiegato per portare la massa π_{ij} tra x_i a y_j)

Osservazione 35. π è un coupling tra le due misure

Per misure assolutamente continue (e non atomiche come le delte di Dirac) su uno spazio metrico M definiamo la distanza come

$$W(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{M \times M} d(x, y) d\pi(x, y)$$

9.2 Limite rigoroso

Teorema 9.1. *Assumiamo di avere il sistema multiagente del primo ordine*

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k(x_i(t), x_j(t)) \\ x_i(0) = x_i^0 \end{cases}$$

e assumiamo che

- $k(x, x) = 0$
- k è globalmente L -lipschitz rispetto ad entrambi gli argomenti cioè

$$|k(x, x') - k(y, y')| \leq L (|x - y| + |x' - y'|)$$

Sia f_0 una densità di probabilità con momento primo finito. Allora il problema di Cauchy descritta dall'equazione mean-field

$$\partial_t f + \partial_x (fk[f]) = 0$$

dove

$$k[f](t, x) = \int_{\mathbb{R}} k(x, x') f(t, x') dx'$$

con condizione iniziale f_0 ha un'unica soluzione debole.

Data una seconda condizione g_0 con momento primo finito, la soluzione g dell'equazione mean-field verifica la stima di stabilità di Dobrushin

$$W_1(f, g) \leq e^{2L|t|} W_1(f_0, g_0) \quad \forall t \geq 0$$

Corollario 9.2. *Sia f_0 la condizione iniziale dell'equazione mean-field e sia*

$$F_0^N(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i(0))$$

la distribuzione empirica della condizione iniziale del sistema microscopico.

Se

$$W_1(f_0, F_0^N) \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

allora

$$W_1(f, F^N) \rightarrow 0 \text{ per } N \rightarrow +\infty$$

dove f è la soluzione dell'equazione mean-field e F^N è la distribuzione empirica delle soluzioni del modello microscopico

Dimostrazione. La convergenza di F_0^N a f_0 in distanza W_1 è data dal teorema di Glivenko-Cantelli.

La convergenza di F^n a f in W_1 è data dalla stima di Dobrushin □

10 Appendice

10.1 A-dimensionare

Definizione 10.1 (A-dimensionare). Supponiamo di avere una variabile dimensionale \bar{w} che può assumere valori in un certo intervallo chiuso e limitato. A-dimensionalizzare \bar{w} significa associare a \bar{w} la nuova variabile $w \in [0, 1]$

Osservazione 36. Se $\bar{w} \in [w_m, w_M]$ possiamo porre

$$w = \frac{\bar{w} - w_m}{w_M - w_m}$$

Nel caso volessimo a-dimensionare variabili spaziali \bar{x}, \bar{y} e \bar{z} possiamo applicare una trasformazione simile mantenendo però inalterate le proporzioni. Ad esempio se $\bar{x} \in [0, x_M]$, $\bar{y} \in [0, y_M]$ e $\bar{z} \in [0, z_M]$ e vale

$$y_M = ax_M \quad z_M = bx_M \quad \text{con } a, b < 1$$

allora possiamo porre

$$x = \frac{\bar{x}}{x_M} \in [0, 1], \quad y = \frac{\bar{y}}{x_M} \in [0, a] \quad z = \frac{\bar{z}}{x_M} \in [0, b]$$

10.2 Soluzioni integrali

Teorema 10.1 (Condizione sufficiente). *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + q(u)_x = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (42)$$

Supponiamo che $q \in C^2(\mathbb{R})$ e $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

Se $q''(u_0(x_0))u_0'(x_0) \geq 0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ il problema ammette un'unica soluzione. Inoltre la soluzione è di classe $C^1([0, +\infty] \times \mathbb{R})$

Dimostrazione. La soluzione del problema può essere scritta lungo le curve caratteristiche come

$$u(t, x) = u_0(x_0) = u_0(x - q'(u_0(x_0))t)$$

e quindi può essere determinata risolvendo l'equazione implicita

$$G(x, t, u) := u - u_0(x - q'(u)t) = 0$$

Per il teorema sulle equazioni implicite, questa equazione ammette soluzione finché $G_U(x, t, u) \neq 0$. Poiché

$$G_u(x, t, u) = 1 + tq''(u)u_0(x - q'(u)t) > 0$$

L'equazione implicita definisce la curva $u = u(t, x)$ come l'unica soluzione del problema di Cauchy \square

Osservazione 37. Cosa succede se $q''(u_0(x_0))u_0'(x_0) < 0$?

Il teorema continua ad essere valido per tempi piccoli. Al crescere di t ci aspettiamo di vedere una discontinuità.

Cerchiamo di risolvere alcuni dubbi

1. In che senso l'equazione differenziale è soddisfatta attraverso un'onda di shock?

2. Le soluzioni costruite sono uniche?

3. Se non sono uniche, come si può scegliere quella fisicamente "giusta"?

Definizione 10.2. Sia $u \in C^1([0, +\infty] \times \mathbb{R})$ che soddisfa (42) allora diremo che u è soluzione **classica** del problema di Cauchy.

Definizione 10.3. Una funzione u limitata in $[0, +\infty] \times \mathbb{R}$ si dice soluzione **integrale debole** del problema di Cauchy se l'equazione integrale

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [uv_t + q(u)v_x] dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)v(0, x) dx = 0$$

vale per ogni funzione test v (cioè $v \in C^1([0, +\infty] \times \mathbb{R})$ a supporto compatto)

Osservazione 38. Nella definizione di soluzione debole richiediamo solamente che u sia limitata. La soluzione può essere discontinua.

Osservazione 39. Una soluzione classica è una soluzione debole.

Dimostrazione. Sia v un funzione test allora

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} [u_t + q(u)_x] v dx dt = 0$$

da cui integrando per parti otteniamo che u soddisfa l'equazione integrale

Esempio 10.2 (Equazione di Burgers). *Consideriamo il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad \text{dove } u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Allora tale problema ammette una soluzione debole

Dimostrazione. Le caratteristiche sono le rette di equazione

$$x = \begin{cases} x_0 & \text{se } x < 0 \\ t + x_0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

abbiamo dunque la divisione del piano in 3 settori e come nel caso del traffico la formazione di un'onda di rarefazione ottenendo

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & \text{se } 0 < x < t \\ 1 & \text{se } x \geq t \end{cases}$$

u risulta essere una soluzione integrale ma non è l'unica. Esiste anche un'onda di shock che esce dall'origine e che si muove con velocità data dalla condizione di R-H

$$\dot{s}(t) = \frac{q(u_R) - q(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{1}{2}$$

È possibile verificare che

$$u(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ 1 & \text{se } x > \frac{t}{2} \end{cases}$$

Osservazione 40. L'unicità delle soluzioni deboli non è garantita. Bisogna determinare quelle fisicamente rilevanti utilizzando la condizione d'entropia

Definizione 10.4. Diremo che uno shock è fisico se le caratteristiche entrano nello shock. Altrimenti diremo che non è fisico

10.3 Operator Splitting

Supponiamo di avere un problema della forma

$$\begin{cases} \dot{y} = ay + by \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

allora sappiamo che la soluzione è data da

$$y(t) = y_n e^{(a+b)(t-t_n)} = y_n e^{a(t-t_n)} e^{b(t-t_n)}$$

dunque posso risolvere

$$\begin{cases} \dot{y} = ay \\ y(t_n) = y_n \end{cases}$$

ottenendo \bar{y}_n in (t, t_n) e poi risolvere

$$\begin{cases} \dot{y} = by \\ y(t_n) = \bar{y}_n \end{cases}$$

Numericamente posso utilizzare Eulero esplicito

$$\begin{cases} \dot{y} = ay \\ y(t_n) = y_n \end{cases} \Rightarrow y_{n+1} = y_n(1 + a\Delta t) := \bar{y}_n$$

$$\begin{cases} \dot{y} = by \\ y(t_n) = \bar{y}_n \end{cases} \Rightarrow \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n(1 + b\Delta t)$$

Con questo metodo otteniamo lo stesso ordine di troncamento di Eulero esplicito infatti $\bar{y}_{n+1} - y(t_{n+1}) = y_n C(a, b) \Delta t^2$

10.4 Equazioni cinetiche

Un'equazione cinetica può essere scritta come

$$\partial_t f(t, x, v) + v \cdot \nabla_x f(t, x, v) = \sigma \int_V k(v' \rightarrow v) f(t, x, v') dv' - \sigma f(t, x, v) \quad (43)$$

dove

- LHS descrive il trasporto puro delle particelle
- RHS descrive il cambio della f in tempo dovuto alle collisioni ed è chiamato **operatore collisionale**
- $k(v' \rightarrow v)$ è detto **kernal d'interazione**: descrive la probabilità di passare da uno stato v' ad uno stato v . Si richiede che

$$\int_V k(v' \rightarrow v) dv = 1 \quad k(v' \rightarrow v) = k(v \rightarrow v')$$

- RHS è la differenza di due termini: il primo è il termine di gain (guadagno) mentre il secondo è detto termine di loss.

Andiamo a ricavare la formulazione debole.

Moltiplichiamo per $\varphi(v)$ e integriamo ottenendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \varphi(v) f(t, x, v) dv &= \int \int \varphi(v) k(v' \rightarrow v) f(v') dv' dv - \int \varphi(v) f(v) dv = \\ &= \int \int \varphi(v) k(v' \rightarrow v) f(v') dv' dv - \int \int \varphi(v) f(v) dv \int k(v \rightarrow v') dv' \end{aligned}$$

Ora cambiando $v' \rightarrow v$ e $v \rightarrow v'$ otteniamo la formulazione debole:

$$\frac{d}{dt} \int \varphi(v) f(t, x, v) dv = \int \int k(v' \rightarrow v) (\varphi(v) - \varphi(v')) f(v') dv dv' \quad (44)$$

Osservazione 41. Nel calcolo della formulazione debole, non abbiamo considerato il termine di trasporto. Se lo avessimo fatto $\varphi = \varphi(x, v)$ ma il termine di trasporto sarebbe sparito integrandolo per parti