



Università di Pisa - Dipartimento di Matematica

ANALISI II

Simmaco Di Lillo

dsimmaco@gmail.com



Rielaborazione delle lezioni di
M. Novaga
C. Carminati

a.a. 2020-21

Indice

1	Alcune nozioni di base	1
1.1	Spazi normati	1
1.2	Disuguaglianze notevoli per norme p	3
1.3	Spazi metrici e cenni di topologia	5
1.4	Spazi completi e teorema delle contrazioni	6
1.5	Spazi di Banach	8
1.6	Lemma di Baire	9
2	Funzioni scalari	10
2.1	Continuità	10
2.2	Derivate parziali	11
2.2.1	Derivate successive e teorema di Schwarz	12
2.3	Differenziabilità	14
2.4	Gradiente nullo su un aperto connesso	17
2.5	Formule di Taylor	18
2.6	Massimi e minimi	19
3	Funzioni vettoriali	21
4	Convessità	22
4.1	Insiemi convessi	22
4.2	Funzioni convesse	24
4.3	Convessità e differenziabilità	25
4.4	Convessità in spazi normati generici	27
4.5	Proiezione su un convesso	29
4.6	Metodo dei minimi quadrati	31
5	Invertibilità e funzioni implicite	32
5.1	Inversione locale	32
5.2	Funzioni implicite	35
5.3	Sottovarietà differenziabili	37
5.4	Moltiplicatori di Lagrange	38
6	Successioni di funzioni	41
7	Serie di funzioni	46
7.1	Serie di potenze	48
8	Misura di Lebesgue	52
8.1	Misure e prime definizioni	52
8.2	Alcuni esempi di misure	53
8.3	Misura esterna e metodo di Carathéodory	54
8.4	Misura di Lebesgue	55
8.4.1	Una definizione “più costruttiva”	56
8.5	Funzioni misurabili	58
8.6	Integrazione rispetto a misure	60
8.6.1	Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale	62
8.7	Spazi prodotti e misura prodotto	67

9	Integrali multipli	71
9.1	Cambiamento di variabili negli integrali multipli	71
9.2	Alcuni cambi notevoli	72
9.2.1	Coordinate polari	72
9.2.2	Coordinate cilindriche	72
9.2.3	Coordinate sferiche	73
9.2.4	Trasformazione lineare	73
10	Serie di Fourier	74
10.1	Sviluppo di Fourier in seni e coseni	76
11	Curve	84
11.1	Prime definizioni	84
11.2	Lunghezza di una curva	85
11.3	Alcuni tipi di curve	87
11.4	Curve piane	88
11.5	Curve biregolari in \mathbb{R}^3	90
11.5.1	Parametrizzazione generale	91
11.6	Integrali curvilinei	91
12	Forme differenziali lineari	92
12.1	Forme esatte	93
12.2	Forme chiuse	95
13	Superfici	98
13.1	Misure di superfici	99
13.2	Integrali su superfici	101
14	Formula di Gauss-Green e divergenza in \mathbb{R}^2	104
15	Superfici nello spazio	107
15.1	Superfici di rotazione	109
16	Equazioni differenziali. Teoria	110
16.1	Teorema di Cauchy e sue conseguenze	111
16.2	Dipendenza continua dal dato iniziali	113
16.3	Teorema di esistenza	115
17	Sistemi lineari	118
17.1	Matrice Wronskiana	119
17.2	Esponenziale di matrici e caso a coefficienti costanti	120
17.2.1	Calcolo dell'esponenziale di matrici	122
17.3	Classificazione dei sistemi 2×2	123
18	Sistemi autonomi	126
18.1	Sistemi autonomi	126
18.2	Integrali primi	127
18.3	Stabilità di sistemi	128
18.4	Funzioni di Lyapunov	129
18.5	Insiemi limite	132
18.6	Dinamica di popolazione	135

19	Appendice	139
19.1	Funzioni armoniche	139
19.2	(DA SISTEMARE) Funzioni omogenee	139
19.3	Funzioni Lipschitz	140
19.4	Una costruzione alternativa della scala del diavolo	141
19.5	Misurabilità secondo Jordan	142
19.6	Spazi L^1	143
19.7	Non so dargli un titolo	145
19.8	Prodotto vettoriale	146
19.9	Disuguaglianza isoperimetrica	149
19.10	Funzioni armoniche (in dimensione 2)	150
19.11	Rotore e nabla calcolo	152
19.12	(DA SCRIVERE) Misura di Hausdorff	154
20	Esercizi	155
20.1	Esercizi su funzioni implicite e moltiplicatori	161
20.2	Esercizi su serie di funzioni	171
20.3	Esercizi sulle curve	173
20.4	Esercizi sulle forme differenziali	174
20.5	Esercizi integrali	177
20.6	Esercizi sulle equazioni differenziali	180

1 Alcune nozioni di base

1.1 Spazi normati

Definizione 1.1. Sia X uno spazio vettoriale (su \mathbb{R}).

Una **norma** su X è una funzione

$$\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$$

con le seguenti proprietà

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

In tal caso la coppia $(X, \|\cdot\|)$ si dice **spazio normato**

Osservazione 1. La terza proprietà della norma (disuguaglianza triangolare) equivale alla convessità della funzione $\|\cdot\|$ (per una definizione di convessità vedere le sezioni successive)

Esempio 1.1. *Alcuni esempi di spazi normati*

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ dove

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

quelle più usate sono

$$\|x\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

tale norma è la norma standard, detta anche norma euclidea. In generale tale norma si denota semplicemente con $|x|$

- $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ dove

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Proposizione 1.2. *La norma infinito è il limite delle norme p*

Dimostrazione. Sia x con $\|x\|_\infty = |x_{\bar{i}}|$ allora

$$|x_{\bar{i}}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (n |x_{\bar{i}}|^p)^{\frac{1}{p}}$$

da cui passando al limite per $p \rightarrow \infty$ si ha la tesi

Teorema 1.3. *Le funzioni $\|\cdot\|_p$ sono delle norme per ogni $p \in [1, \infty]$*

Dimostrazione. L'unica cosa non banale della dimostrazione è la disuguaglianza triangolare, che nel caso $p \in (1, \infty)$ si riconduce alla disuguaglianza di Minkowski (successive sezioni)

Per $p = \infty$ è lasciato come esercizio

Teorema 1.4. *Tutte le norme su \mathbb{R}^n sono equivalenti*

Dimostrazione. Sia $\|\cdot\|$ una norma su \mathbb{R}^n e sia $|\cdot|$ la norma euclidea

$$\|x\| = \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \cdot \|x\| = \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \cdot |x|$$

Osserviamo che le norme sono funzioni continue, S^{n-1} è un compatto dunque per il teorema di Weistrass $\|\cdot\|$ assume massimo M e minimo m su tale insieme dunque

$$\|x\| \leq M |x|$$

$$\|x\| \geq m |x|$$

Il che mostra che le 2 norme sono equivalenti □

Osservazione 2. Per spazi vettoriali di dimensione infinita, il teorema precedente, in generale, è falso. Prendiamo come controesempio lo spazio delle funzioni continue su un intervallo; la norma 1 e la norma infinito non sono equivalenti

1.2 Disuguaglianze notevoli per norme p

Definizione 1.2. Sia $p > 1$ allora p e p' si dicono **esponenti coniugati** se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Nel seguito p, p' saranno esponenti coniugati e $x, y \in \mathbb{R}^n$

Lemma 1.5 (Disuguaglianza di Young).

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Dimostrazione. Fissato b consideriamo la funzione

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - bt$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $f(a) \geq 0$.

$$f'(t) = t^{p-1} - b$$

dunque la funzione assume minimo in $t = b^{\frac{1}{p-1}}$ e tale minimo vale

$$\frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - b^{\frac{1}{p-1}+1} = b^{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 \right) = 0$$

dunque la funzione f è sempre maggiore di 0 da cui la tesi □

Lemma 1.6 (Disuguaglianza di Holder).

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_{p'}$$

Dimostrazione. Nel caso che uno tra x e y sia il vettore nullo, la disuguaglianza è banalmente vera. Consideriamo il caso che $x, y \neq 0$.

Applicando n volte la disuguaglianza di Young alle coppie

$$a_i = \frac{|x_i|}{\|x\|_p} \quad b_i = \frac{|y_i|}{\|y\|_{p'}}$$

otteniamo

$$a_i b_i \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{|x_i|^{p'}}{\|x\|_{p'}^{p'}}$$

ora sommando otteniamo

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{\|x\|_p \|y\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{p'} \frac{\|x\|_{p'}^{p'}}{\|x\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

□

Lemma 1.7 (Disuguaglianza di Minkowski). Sia $p > 1$ generico

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Dimostrazione.

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i|$$

Utilizzando la disuguaglianza triangolare osserviamo che

$$\|x + y\|_p^p \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} \right) (|x| + |y|) = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |x| + \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{p-1} |y|$$

Utilizzando la disuguaglianza di Holder otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \|x + y\|_p^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} (\|x\|_p + \|y\|_p) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\|x\|_p + \|y\|_p) = \\ &= \|x + y\|_p^{p-1} (\|x\|_p + \|y\|_p) \end{aligned}$$

Se $\|x + y\|_p = 0$ allora la disuguaglianza è banalmente vera, altrimenti dividendo per $\|x + y\|_p^{p-1}$ otteniamo la tesi. \square

1.3 Spazi metrici e cenni di topologia

Definizione 1.3. Sia X un insieme. Una **distanza** su X è una funzione spazio

$$d: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$$

con le seguenti proprietà

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

In tal caso la coppia (X, d) prende il nome di **spazio metrico**

Osservazione 3. Uno spazio normato induce uno spazio metrico dove $d(x, y) = \|x - y\|$

Definizione 1.4. Sia X uno spazio metrico e $E \subseteq X$ allora

- E si dice **aperto** se

$$\forall x \in E \quad \exists r > 0 \quad B_r(x) \subseteq E$$

- E si dice **chiuso** se $X \setminus E$ è aperto
- E si dice **compatto (per successioni)** se per ogni successione ammette una sotto-successione convergente
- E si dice **compatto (per ricoprimenti)** se da ogni ricoprimento aperto di E è possibile estrarre un sotto-ricoprimento finito

Proposizione 1.8. Sia X metrico con $E \subseteq X$

E chiuso se e solo se ogni successione $(x_n) \subseteq E$ convergente a $x_\infty \in X$ si ha $x_\infty \in E$

Proposizione 1.9. Su \mathbb{R}^n vale la seguente equivalenza.

Un sottoinsieme di \mathbb{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato

Osservazione 4 (Controesempio alla proposizione precedente).

Sia X lo spazio delle funzioni continue su $[0, 1]$ dotato della distanza infinita.

La palla chiusa unitaria $\overline{B_1(0)}$ è un chiuso limitato.

Consideriamo la successione in X

$$f_n = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{se } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{se } x \in [\frac{2}{n}, +\infty) \end{cases}$$

allora $f_n(x) \rightarrow 0$ per ogni x ma $d_\infty(f_n, 0) = 1$ dunque f_n non ammette nessuna sotto-successione convergente

1.4 Spazi completi e teorema delle contrazioni

Definizione 1.5. Una successione (x_n) si dice **successione di Cauchy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_\varepsilon$$

Osservazione 5. Ogni successione convergente è di Cauchy

Definizione 1.6. Uno spazio (X, d) si dice **spazio completo** se ogni successione di Cauchy è convergente

Proposizione 1.10. X spazio metrico completo, $E \subseteq X$ chiuso. Allora E completo

Esempio 1.11.

- \mathbb{R}, \mathbb{R}^n sono spazi completi
- \mathbb{Q} non è completo.
Sia a_n il troncamento alla n -esima cifra decimale del numero $\sqrt{2}$.
Ora a_n è una successione di Cauchy infatti $d(a_n, a_{n+1}) \leq 10^{-n}$ ma non è convergente in quanto $a_n \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- Lo spazio delle funzioni continue su un intervallo con la distanza infinito è completo
- Lo spazio delle funzioni Riemann integrabili su un intervallo con la distanza L^p non è completo

Definizione 1.7 (Lipschitz e contrazione).

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici.

$f : X \rightarrow Y$ si dice **L -lipschitz** se

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y)$$

Definizione 1.8. Una **contrazione** è una funzione $f : X \rightarrow X$ L -lipschitz con $L < 1$

Lemma 1.12 (Teorema delle contrazioni). Sia X uno spazio metrico completo e sia f una sua contrazione.

Allora f ammette uno ed un solo punto fisso \bar{x} .

Inoltre $\forall x_0 \in X$ la successione definita dal metodo

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge a \bar{x}

Dimostrazione. Andiamo a dimostrare l'unicità.

Sia $y \neq \bar{x} \in X$ con $f(y) = y$. Essendo f contrazione vale

$$d(f(\bar{x}), f(y)) \leq L \cdot d(\bar{x}, y) < d(\bar{x}, y)$$

dunque abbiamo $d(\bar{x}, y) < d(\bar{x}, y)$ il che è assurdo.

Mostriamo l'esistenza. Sia x_n la successione definita per ricorrenza, andremo a mostrare che è di Cauchy dunque ammette un limite e per continuità di f tale limite deve essere un punto

fisso.

Sia $m > n > 0$ allora

$$d(x_n, x_m) \leq Ld(x_{n-1}, x_{m-1}) \leq \cdots \leq L^n \cdot d(x_0, x_{m-n})$$

inoltre

$$d(x_0, x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^k L^i d(x_0, x_1) \leq \frac{1}{1-L} d(x_0, x_1)$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze otteniamo

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

Ora il termine a destra, per $n \rightarrow \infty$ tende a 0 il che mostra che la successione è di Cauchy \square

1.5 Spazi di Banach

Definizione 1.9. Uno **spazio di Banach** è uno spazio normato completo

Esempio 1.13. *Gli spazi \mathbb{R}^n con la norma p e quello delle funzioni continue con la norma infinito sono spazi di Banach*

Definizione 1.10. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ due spazi di Banach; essi si dicono **isomorfi** se esiste una funzione

$$f : X \rightarrow Y$$

lineare e bigettiva tale per cui

$$\begin{aligned}\|f(x)\|_Y &\leq C \|x\|_X \\ \|f^{-1}(y)\|_X &\leq C \|y\|_Y\end{aligned}$$

per ogni $x \in X$ e $y \in Y$

Esercizio 1.14. *Verificare che lo spazio delle funzioni continue su un intervallo con la norma infinito è uno spazio di Banach*

Lemma 1.15. *Sia $L : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ una funzione lineare e continua tra spazi di Banach*

La funzione

$$\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$$

è una norma

Osservazione 6. Vale in particolare la seguente disuguaglianza

$$\|L(x)\|_F \leq \|L\| \|x\|_E$$

Corollario 1.16. *Lo spazio*

$$L(E, F) = \{L : E \rightarrow F \text{ lineare e continua}, \|\cdot\|\}$$

è uno spazio di Banach

Osservazione 7. Specializzando quanto abbiamo detto, se consideriamo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $A \in M(n, m, \mathbb{R})$ allora

$$A = \max_{\|x\| \leq 1} |Ax|$$

è una norma.

1.6 Lemma di Baire

Lemma 1.17 (di Baire).

Sia X uno spazio metrico completo. Allora

(i) Un'unione numerabile di chiusi con parte interna vuota ha parte interna vuota

(ii) Un'intersezione numerabile di aperti densi è denso

Dimostrazione. Osserviamo che le 2 formulazioni sono equivalenti tramite passaggio al complementare. Andiamo a dimostrare la seconda formulazione.

Dimostrazione. Siano (U_n) una successione di aperti densi.

Andiamo a mostrare che $\forall x_0 \in X$ e $\forall r_0 > 0$

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \cap B(x_0, r_0) \neq \emptyset$$

il che mostra la tesi.

Andiamo a costruire la seguente successione (x_k, r_k) .

Dalla densità di U_1 e dal fatto che è aperto esistono x_1, r_1 tali per cui

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) \cap A_1$$

Supponendo di aver definito (x_k, r_k) per $k = 1, \dots, n$, dalla densità di U_{n+1} e dal fatto che è aperto esistono x_{n+1}, r_{n+1} tali per cui

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subseteq B(x_n, r_n) \cap A_{n+1}$$

Possiamo inoltre porre $r_k = \frac{1}{2^k}$.

La successione (x_k) è una successione di Cauchy e per completezza converge a \bar{x} , in particolare per ogni n la successione sta definitivamente in $B(x_n, r_n)$ da cui $\bar{x} \in \overline{B(x_n, r_n)}$.

In particolare $x \in \overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0)$ □

Corollario 1.18. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è una F_σ ovvero non esiste una successione di chiusi C_n tali per cui

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup C_n$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che una tale successione esista, allora ogni C_n deve avere parte interna vuota (segue in maniera ovvia dalla densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}) Allora avremmo

$$\mathbb{R} = \left(\bigcup C_n \right) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \right)$$

dunque \mathbb{R} sarebbe un chiuso a parte interna vuota. Il che è assurdo

Corollario 1.19. Sia X uno spazio vettoriale di dimensione numerabile e $\|\cdot\|$ una norma su X .

Allora $(X, \|\cdot\|)$ non è uno spazio completo.

Dimostrazione. Sia (v_k) una base di X e poniamo per ogni n

$$X_n = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

ora X_n è un chiuso con parte interna vuota.

Se per assurdo lo spazio fosse completo si avrebbe una contraddizione con il lemma di Baire, in quanto $X = \bigcup X_n$ dovrebbe avere parte interna vuota.

2 Funzioni scalari

Definizione 2.1 (Notazione). Sia $x \in \mathbb{R}^n$ allora

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

ovvero la norma euclidea di x .

Se $x_i \in \mathbb{R}$ allora $|x_i|$ denota l'usuale valore assoluto

Definizione 2.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

diremo che f è una **funzione scalare**.

In questa sezione non specificheremo il dominio e il codominio di f supponendo sempre $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto

2.1 Continuità

Definizione 2.3 (Funzione continua).

Una funzione f si dice **continua in** x_0 se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

per ogni successione $(x_m) \subseteq \mathbb{R}^n$ convergente a x_0

Osservazione 8. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ un cammino (dunque una funzione continua).

Se f è continua, è continua anche la sua restrizione lungo γ (ovvero $f \circ \gamma$).

In particolare se f è continua allora è continua lungo tutte le rette, in altri termini

$$f \text{ continua} \quad \Rightarrow \quad g : \mathbb{R} \rightarrow A \quad g(t) = f(x_0 + tv) \quad \text{continua } \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Attenzione: la condizione non è sufficiente infatti

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \neq x^2 \\ 0 & \text{se } y = x = 0 \\ 1 & \text{se } y = x^2 \neq 0 \end{cases}$$

è continua su tutte le rette passanti per 0.

Ma se restringiamo la funzione alla parabola $y = x^2$ non è continua.

Abbiamo una funzione continua su tutte le rette che non è continua

Proposizione 2.1.

$$f \text{ continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \gamma \text{ continua in } 0 \quad \forall \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ curva con } \gamma(0) = x_0$$

Dei seguenti teoremi non daremo dimostrazione, la loro dimostrazione è analoga a quella presentata per $n = 1$

Teorema 2.2 (di Weistrass). *Una funzione reale, continua su un compatto ammette massimo e minimo su tale compatto*

Teorema 2.3 (dei valori intermedi). *Una funzione continua su un dominio (chiusura di un aperto) connesso e compatto assume tutti i valori compresi tra il massimo ed il minimo*

2.2 Derivate parziali

Definizione 2.4. Sia $x_0 \in A$ e $i \in \{1, \dots, n\}$.

La **derivata parziale** di f in x è il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i)}{t}$$

se tale limite esiste ed è finito. (dove e_i denota l' i -esimo vettore della base canonica di \mathbb{R}^n).

Tale derivata parziale si può indicare con uno tra i seguenti simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad f_{x_i}(x) \quad D_i f(x) \quad D_{x_i} f(x)$$

Definizione 2.5. Se in un punto x esistono tutte le n derivate parziali, si dice che la funzione è **derivabile** in x . In tal caso il **gradiente** della funzione in x è il vettore le cui componenti sono le derivate parziali ovvero

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

il gradiente di f in x si denota con uno dei seguenti simboli

$$\nabla f(x) \quad Df(x)$$

2.2.1 Derivate successive e teorema di Schwarz

Definizione 2.6. Supponiamo che la derivata i -esima sia derivabile allora le sue derivate parziali,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right) (x)$$

si chiamano **derivate seconde** della funzione x e si indica in uno dei seguenti modi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad f_{x_i, x_j}(x) \quad D_{i,j}f(x) \quad D_{x_i, x_j}f(x)$$

Tutte le derivate secondi di f si ottengono (se esistono) al variare di $i, \in \{1, \dots, n\}$.

Definizione 2.7. Se tutte le derivate seconde di f in x esistono, definiamo la **matrice hessiana** come

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

e la denoteremo con uno dei seguenti simboli

$$D^2f(x) \quad H_f(x)$$

Definizione 2.8. Se esiste la matrice hessiana di f in x diremo che f è **derivabile 2 volte** in x

Diamo una condizione sufficienti affinché le derivate miste commutino (dunque affinché la matrice hessiana sia simmetrica)

Teorema 2.4 (di Schwarz). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte in A .*

Sia $x \in A$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \text{ continue in } x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

Dimostrazione. Mostriamo prima il caso $n = 2$ (f funzione di 2 variabili (x, y)).

Sia $(x_0, y_0) \in A$ tale per cui le derivate $f_{x,y}$ e $f_{y,x}$ sono continue e (x, y) un generico punto di A con $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$

Consideriamo la funzioni

$$H(x) = f(x, y) - f(x, y_0)$$

allora applicando il teorema di Lagrange ($H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) otteniamo

$$H(x) - H(x_0) = H'(x_1)(x - x_0) = (f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0))(x - x_0)$$

dove x_1 è compreso fra x e x_0 .

Applicando nuovamente Lagrange otteniamo

$$H(x) - H(x_0) = f_{xy}(x_1, y_1)(x - x_0)(y - y_0)$$

dove y_1 è compreso fra y e y_0 .

Similmente ponendo

$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

otteniamo

$$G(y) - G(y_0) = f_{y,x}(x_2, y_2)(x - x_0)(y - y_0)$$

dove x_2 è compreso tra x e x_0 mentre y_2 tra y e y_0

Un semplice conto mostra che $G(y) - G(y_0) = H(x) - H(x_0)$ e poichè $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$ otteniamo

$$f_{yx}(x_2, y_2) = f_{xy}(x_1, y_1)$$

Passando al limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ e sfruttando la continuità delle derivate doppie in (x_0, y_0) si ha la tesi.

Nel caso in cui $n > 2$ basta considerare la stessa dimostrazione applicata alla funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x_i, x_j) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$$

al variare di (x_i, x_j) e lasciando fissate le altre coordinate (come parametri)

Osservazione 9. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - y^3 x}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

allora tale funzione è derivabile 2 volte in \mathbb{R}^2 ma le derivate seconde miste non coincidono

2.3 Differenziabilità

Definizione 2.9. Una funzione f si dice **differenziabile** in $x \in A$ se è derivabile in x e vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle}{|h|} = 0$$

o equivalentemente

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(|h|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Osservazione 10. Nella definizione h è un vettore di \mathbb{R}^n mentre $\langle x, y \rangle$ indica il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^n ovvero

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ dove } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Definizione 2.10. Se f è derivabile in x allora definiamo il **differenziale** della funzione f in x l'applicazione lineare

$$df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad df(x)[h] = \langle \nabla f(x), h \rangle$$

Proposizione 2.5.

$$f \text{ differenziabile in } x \Rightarrow f \text{ continua in } x$$

Osservazione 11. La derivabilità non è sufficiente per la continuità. Basta considerare

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

allora tale funzione è derivabile in $(0, 0)$ ma non è continua.

Tale esempio mostra anche che una funzione derivabile, in generale, non è differenziabile

Il seguente teorema ci da una condizione sufficiente che lega la differenziabilità e la derivabilità

Teorema 2.6 (del differenziale totale).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su A .

Se le derivate parziali sono continue in un punto $x \in A$ allora f è differenziabile

Dimostrazione. Consideriamo per semplicità il caso di $n = 2$ dunque consideriamo f funzione delle variabili (x, y) e sia (x_0, y_0) il punto in cui le derivate parziali sono continue

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

Applicando il teorema di Lagrange a $G(x) = f(x, y_0 + k)$ otteniamo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = G(x_0 + h) - G(x_0) = hG'(x_1) = hf_x(x_1, y_0 + k)$$

con x_1 fra x_0 e $x_0 + h$.

Similmente

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = kf_y(x_0, y_1) \text{ con } y_1 \text{ fra } y_0 \text{ e } y_0 + k$$

Dunque

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle = hf_x(x_0+h, y_0+k) + kf_y(x_0, y_0+k) - hf_x(x_0, y_0) - kf_y(x_0, y_0) =$$

$$= h[f_x(x_0+h, y_0+k) - f_x(x_0, y_0)] + k[f_y(x_0, y_0+k) - f_y(x_0, y_0)]$$

Dunque usando $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ e il fatto che $x_1 \rightarrow x_0$ e $y_1 \rightarrow y_0$ per $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ si ha

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \right\rangle >$$

è un $O((x^2 + y^2))$ dunque un $o(\sqrt{x^2 + y^2})$ □

Definizione 2.11. Una funzione f si dice di classe C^k in A e si scrive $f \in C^k(A)$ se f ammette derivate parziali fino all'ordine k e tali derivate parziali sono continue.

Proposizione 2.7 (Derivazione delle **funzioni composte**). Siano $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo con $\gamma(I) \subseteq A$ aperto di \mathbb{R}^n .

Sia $t \in I$ tale che γ è derivabile in t e f è differenziabile in $\gamma(t)$.

Alla $F = f \circ \gamma$ è derivabile in t e ha derivata

$$F'(t) = \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle$$

Dimostrazione. Poichè f è differenziabile si ha

$$f(\gamma(t+h)) = f(\gamma(t)) + \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t+h) - \gamma(t) \right\rangle + o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)$$

Ora il rapporto incrementale di

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t+h) - \gamma(t) \right\rangle + \frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{h}$$

Ora per omogenità del prodotto scalare si ha

$$\frac{1}{h} \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma(t+h) - \gamma(t) \right\rangle = \left\langle \nabla f(\gamma(t)), \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\rangle$$

Che per $h \rightarrow 0$ tende a $\left\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle$

Mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(|\gamma(t+h) - \gamma(t)|)}{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|} \cdot \frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} = 0$$

infatti è il rapporto di un infinitesimo per una limitata in quanto

$$\frac{|\gamma(t+h) - \gamma(t)|}{h} \rightarrow |\gamma'(t)|$$

□

Definizione 2.12. Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La **derivata direzionale** di f lungo v calcolata in x è il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

se tale limite esiste ed è finito.

Tale valore si denota con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

Proposizione 2.8. Una funzione differenziale in x ammette derivata direzionale in x lungo ogni direzione, in particolare

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

Dimostrazione. La derivata direzionale è la derivata della funzione $g(t) = f(x + vt)$ calcolata in 0; usando la formula di derivazione per funzioni composte, abbiamo la tesi \square

Osservazione 12. L'esistenza di tutte le derivate direzionali, non garantisce la differenziabilità. Consideriamo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora si avrà

$$\frac{\partial f}{\partial v}((0, 0)) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \parallel e_1, e_2 \\ \frac{v_2^2}{v_1} & \text{se } v \not\parallel e_1, e_2 \end{cases}$$

f ammette derivate lungo ogni direzione in $(0, 0)$ ma non è differenziabile infatti non vale la formula della proposizione

Un utile conseguenza della proposizione è la seguente:

Osservazione 13. Sia f differenziabile in x , il gradiente, se non nullo, indica la direzione di massima pendenza.

2.4 Gradiente nullo su un aperto connesso

Definizione 2.13. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **connesso** se

$$A_1, A_2 \text{ aperti disgiunti} \quad A_1 \cup A_2 = A \quad \Rightarrow \quad A_1 \text{ o } A_2 \text{ è vuoto}$$

equivalentemente, A non si può scrivere come unione di due aperti disgiunti non vuoti

Definizione 2.14. $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è **connesso per archi** se

$$x, y \in E \quad \Rightarrow \quad \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow E \text{ continua con } \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(1) = y$$

Proposizione 2.9. Valgono le seguenti implicazioni

- E connesso per archi $\Rightarrow E$ connesso
- Se E è aperto valgono entrambe le implicazioni.
In tal caso i cammini che connettono i punti si possono prendere C^∞ a tratti

Proposizione 2.10. Se una funzione f ammette gradiente nullo in tutti i punti di un aperto connesso A allora f è costante in A

Dimostrazione. Poichè le derivate parziali sono nulle, sono continue dunque per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile ovvero continua.

Sia x_0 in A e consideriamo gli insiemi

$$A_1 = \{x \in A \quad : \quad f(x) = f(x_0)\}$$

$$A_2 = \{x \in A \quad : \quad f(x) \neq f(x_0)\}$$

A_2 è aperto in quanto controimmagine di un aperto tramite una funzione continua.

Mostriamo che A_2 è aperto. Sia $x \in A_2$ allora essendo A aperto esiste una palla $B(x, r) \subseteq A$.

Sia $y \in B(x, r)$ allora

$$g(t) = f(tx + (1-t)y)$$

Ora per la formula di derivazione delle funzioni composte

$$g'(t) = \langle \nabla f(tx + (1-t)y), x - y \rangle = 0$$

Ora per un teorema di analisi 1 si ha $g(t)$ costante dunque $f(x) = f(y)$ ovvero $y \in A_1$.

Poichè $A = A_1 \cup A_2$ e tale unione è disgiunta $A_2 = \emptyset$ (infatti $x_0 \in A_1$ dunque $A_1 \neq \emptyset$) □

2.5 Formule di Taylor

Definizione 2.15. Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiamo il **segmento** tra x e y come

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

Teorema 2.11 (di Lagrange).

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile.

Siano $x, y \in A$ tali che il segmento che li congiunge è contenuto in A allora esiste $\xi \in [x, y]$ per cui valga la seguente formula

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(\xi), x - y \rangle$$

Dimostrazione. Sia

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad g(t) = f(tx + (1 - t)y)$$

poichè $\gamma(t) = tx + (1 - t)y$ è derivabile in $[0, 1]$ e f è differenziabile in $[x, y] = \gamma([0, 1])$ per la formula di derivazione delle funzioni composte, g è derivabile in $[0, 1]$ e vale

$$g'(t) = \langle Df(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \langle Df(tx + (1 - t)y), x - y \rangle$$

Poichè in $[0, 1]$ la funzione g soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange 1-dimensionale, $\exists t_0 \in (0, 1)$ con

$$g(1) - g(0) = g'(t_0)$$

dunque posto $\xi = t_0x + (1 - t_0)y$ si ha $\xi \in]x, y[$ ed inoltre

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(\xi), x - y \rangle$$

□

Teorema 2.12 (Formula di Taylor con resto di Peano).

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $k - 1$ in A .

Sia $x_0 \in A$ e f differenziabile k volte in x_0 allora

$$f(x) = T_k(x, x_0, f) + o(|x - x_0|^k)$$

dove

$$T_k(x, x_0, f) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} D^{(i)} f(x_0) \cdot [x - x_0]^i$$

Dimostrazione. Applicando Taylor 1-dimensionale alla funzione $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ si giunge alla tesi

Teorema 2.13 (Formula di Taylor con resto di Lagrange).

Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe k in A .

Sia $x_0 \in A$ e f differenziabile $(k + 1)$ volte in x_0 allora esiste $\xi \in [x, x_0]$ tale che

$$f(x) = T_k(x, x_0, f) + \frac{1}{(k + 1)!} D^{(k+1)}(\xi) \cdot [x - x_0]^{k+1} \quad t \in [0, 1]$$

2.6 Massimi e minimi

Definizione 2.16. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si dice punto di **minimo locale** per f se

$$\exists r > 0 \quad f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in B(x_0, r)$$

Analogamente si definisce un punto di massimo locale

Vale la seguente condizione necessaria (detta condizione al primo ordine)

Lemma 2.14 (Principio di Fermat). *In un punto di minimo/massimo locale, se il gradiente esiste è nullo*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale per f .

Sia $i \in \{1, \dots, n\}$, poichè x_0 è un punto di minimo la funzione

$$g_i(t) = f(x_0 + te_i)$$

ha un minimo in $t = 0$ e in tale punto è derivabile. Per il principio di Fermat (1-dimensionale) $g'_i(0) = 0$.

Osservando che $g'_i(0) = f_i(x_0)$ per arbitrarietà di i la tesi □

Definizione 2.17. Un **punto critico** di una funzione differenziale è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione

Osservazione 14. La condizione espressa dal principio di Fermat è necessaria ma non sufficiente. La funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$ ha come punto critico $(0, 0)$ infatti

$$g(x, 0) > 0 \quad \forall x > 0$$

$$g(0, y) < 0 \quad \forall y > 0$$

dunque in ogni palla centrata in 0 g assume sia valori positivi che negativi poichè $g((0, 0)) = 0$ si osserva che $(0, 0)$ non può essere nè minimo nè massimo locale

Definizione 2.18. Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ (cioè una matrice quadrata di taglia $n \times n$ a coefficienti reali)

A si dice **definita positiva** e si denota con $A > 0$ se

$$vAv^t > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

A si dice **semi-definita positiva** e si denota con $A \geq 0$ se

$$vAv^t \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

In modo analogo si definiscono le matrici **definite** e **semi-definite negative**

Osservazione 15. Ricordiamo le seguenti equivalenze.

Sia $A \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica. I seguenti fatti sono equivalenti

- $A \geq 0$
- A ha autovalori non negativi
- Tutti i minori principali di A hanno determinante positivo (criterio di Sylvester)

Proposizione 2.15. Sia f differenziabile 2 volte in x_0 punto critico per f . Allora

$$(i) \quad D^2 f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ massimo locale stretto}$$

$$(ii) \quad D^2 f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \text{ minimo locale stretto}$$

$$(iii) \quad x_0 \text{ massimo locale} \quad \Rightarrow \quad D^2 f(x_0) \leq 0$$

$$(iv) \quad x_0 \text{ minimo locale} \quad \Rightarrow \quad D^2 f(x_0) \geq 0$$

Dimostrazione. Mostriamo solamente (i) e (iii) le altre sono analoghe

(ii) . Sia

$$\delta = \max_{|v|=1} v D^2 f v^t$$

che esiste in quanto $\{v = |1|\}$ è compatto.

Allora $\forall v \neq 0$ vale

$$v D^2 f v^t = |v|^2 \frac{v}{|v|} D^2 f \frac{v}{|v|} \leq |v|^2 \delta \leq 0$$

dunque

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) \cdot \nabla f(x_0) + o(|x-x_0|) + \frac{1}{2} (x-x_0)^t \cdot D^2 f(x_0) \cdot (x-x_0) + o(|x-x_0|^2) \leq f(x_0) + \delta |x-x_0|^2 + o(|x-x_0|^2) \leq f(x_0)$$

per $|x-x_0|$ abbastanza piccolo

(iii) Sia x_0 un punto di massimo locale e supponiamo, per assurdo, che $D^2 f(x_0) > 0$.

Allora esiste $\lambda > 0$ autovalore e v autovettore relativo a λ .

Dunque

$$f(x_0 + tv) = f(x_0) + \lambda t^2 |v|^2 + o(t^2) > f(x_0) \quad \text{per } t \text{ piccolo}$$

Il che è assurdo essendo x_0 un punto di massimo

Definizione 2.19. Un punto critico, nè di massimo nè di minimo locale è detto **punto di sella**

Corollario 2.16. Se $\nabla f(x_0)$ è nullo e $D^2 f(x_0)$ è indefinita, x_0 è un punto di sella

3 Funzioni vettoriali

Definizione 3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

diremo che f è una funzione **vettoriale**.

Nel seguito, se f è una funzione vettoriale come sopra porremo

$$(f_1, \dots, f_m)$$

le sue componenti dove $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione scalare

Definizione 3.2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ diremo che è derivabile in x se le sue componenti lo sono.

In tal caso il **gradiente** o **Jacobiano** di f in x è la matrice $m \times n$ delle derivate parziali

$$Df(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x) \\ \nabla f_2(x) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x) \end{pmatrix}$$

Definizione 3.3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Si dice che f è **differenziabile** in $x \in A$ se è derivabile in x e vale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - J_f(x) \cdot h}{|h|} = 0$$

o equivalentemente

$$f(x+h) = f(x) + J_f(x) \cdot h + o(|h|) \text{ per } h \rightarrow 0$$

Se f è differenziabile in x , definiamo il suo **differenziale** è l'applicazione lineare

$$df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad df(x)[h] = J_f(x) \cdot h$$

Osservazione 16. $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è differenziabile in x se e sole se tutte le componenti di f sono differenziabili in x .

Proposizione 3.1. Siano $B \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto e $g : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $A \supseteq g(B)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Se f, g sono funzioni di classe C^1 allora la funzione composta $F = f \circ g$ è di classe C^1 e

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(g(x_0)) \cdot Dg(x_0)$$

Dimostrazione. Dalla differenziabilità di g

$$g(x) - g(x_0) = Dg(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad g(x) - g(x_0) = O(|x - x_0|) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Dalla condizione di differenziabilità di f otteniamo

$$f(y) = f(y_0) + Df(y_0) \cdot (y - y_0) + o(|y - y_0|)$$

ponendo $y = g(x)$ e $y_0 = g(x_0)$ otteniamo la tesi in quanto $o(O(x - x_0)) = o(x - x_0)$

4 Convessità

4.1 Insiemi convessi

Definizione 4.1. Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale e $C \subseteq V$.
 C si dice **convesso** se

$$\forall x, y \in C \quad [x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subseteq C$$

cioè se due punti appartengono a C allora anche tutti i punti del segmento che li congiunge vi appartengono.

C si dice **strettamente convesso** se

$$\forall x, y \in C \quad]x, y[= \{tx + (1-t)y : t \in (0, 1)\} \subseteq C^\circ$$

Esempio 4.1. Sia $V = \mathbb{R}^2$ allora

$$C_1 = \{(x, y) \in V \mid |x| + |y| = 1\}$$

è convesso ma non strettamente

$$C_2 = \{(x, y) \in V \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

è strettamente convesso, dunque anche convesso.

Osservazione 17. Osserviamo che C_1 e C_2 sono le palle di raggio 1 e centro 0 rispettivamente indotte dalla norma ∞ e dalla norma 1

Definizione 4.2. Siano x_1, \dots, x_l punti di \mathbb{R}^n una loro **combinazione convessa** è una scrittura della forma $\sum_{i=1}^l \lambda_i x_i$ sotto la condizione $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$

Proposizione 4.2 (Caratterizzazioni equivalenti della convessità).

Sia V un \mathbb{R} -spazio vettoriale e $C \subseteq V$.

I seguenti fatti sono equivalenti

(i) C convesso

(ii) C è chiuso per combinazioni convesse, cioè

$$\forall x_1, \dots, x_l \in C \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i x_i \in C$$

Dimostrazione. (ii) \Rightarrow (i) infatti basta porre $l = 2$.

(i) \Rightarrow (ii) per induzione su l (numero di punti di cui calcoliamo la combinazione convessa).

- $l = 1$ ovvio
- $l = 2$ è la definizione di insieme convesso
- Supponiamo che la tesi valga per l punti.
Siano $x_0, \dots, x_l \in C$ e $\lambda_0, \dots, \lambda_l$ scalari somma uno.

$$\sum_{i=0}^l \lambda_i x_i = \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) \sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} x_i = \lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) x_{l+1}$$

Ora per ipotesi induttiva si ha $x_{l+1} \in C$ infatti

$$\sum_{i=1}^l \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} = \frac{1}{1 - \lambda_0} \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$$

quindi poichè la proprietà vale per $l = 2$ si ha la tesi inquanto $\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0)x_{l+1}$ è la combinazione convessa di 2 punti di C

□

Osservazione 18. Valgono i seguenti risultati

- Intersezione (arbitraria) di convessi è un convesso
- La somma di convessi è convessa, dove $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
- Sia $L : V \rightarrow W$ è lineare e $C \subseteq V$ convesso. $L(C)$ è convesso

Definizione 4.3. Sia $B \subseteq V$, definiamo l' **inviluppo convesso** di B come l'insieme convesso

$$co(B) = \bigcap_{\substack{B \subseteq C \\ C \text{ convesso}}} C$$

ovvero l'intersezione di tutti i convessi contenenti B

Proposizione 4.3.

$$co(B) = \{y \in V : y \text{ è combinazione convessa di punti di } B\}$$

Dimostrazione. Sia $Y = \{y \in V : y \text{ è combinazione convessa di punti di } B\}$.

Y è banalmente convesso e contiene B dunque $co(B) \subseteq Y$.

Se C è convesso e contiene B allora deve contenere tutti i punti y che si scrivono come combinazione convessa di punti di B dunque. $Y \subseteq C$ per ogni C convesso con $B \subseteq C$.

Abbiamo dunque provato che $Y \subseteq co(B)$

□

4.2 Funzioni convesse

Definizione 4.4. Sia V uno spazio vettoriale e $E \subseteq V$ un convesso.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **convessa** se

$$\forall x, y \in \Omega \quad x \neq y \quad f(tx + (1-t)x) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \text{ per } t \in [0, 1]$$

f si dice **strettamente convessa** se

$$\forall x, y \in \Omega \quad x \neq y \quad f(tx + (1-t)x) < tf(x) + (1-t)f(y) \text{ per } t \in (0, 1)$$

Esercizio 4.4. *Mostrare che vale la seguente caratterizzazione*

$$f \text{ convessa} \quad \Leftrightarrow \quad \text{epi}(f) = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\} \text{ è convesso}$$

Dimostrazione. Non data a lezione.

\Rightarrow Siano $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \text{epi}(f)$ e sia $t \in [0, 1]$

$$tz_1 + (1-t)z_2 \in \text{epi}(f) \quad \Leftrightarrow \quad (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in \text{epi}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq ty_1 + (1-t)y_2$$

Dalla convessità di f si ha

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \leq ty_1 + (1-t)y_2$$

dove abbiamo usato che se $(x, y) \in \text{epi}(f)$ allora $f(x) \leq y$ ed inoltre sappiamo $t, (1-t) \geq 0$.

\Leftarrow Siano $x, y \in V$ allora $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f)$. Ora l'epigrafo è convesso dunque

$$\forall t \in [0, 1] \quad (tx + (1-t)y, tf(x) + (1-t)f(y)) \in \text{epi}(f) \quad \Rightarrow \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

per arbitrarietà di x, y la tesi.

Proposizione 4.5. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ con Ω aperto convesso*

$$f \text{ convesso} \quad \Rightarrow \quad f \text{ localmente limitata}$$

cioè ogni punto ammette un intorno su cui f è limitata

Dimostrazione. Sia $\bar{x} \in \Omega$ allora essendo Ω aperto e le norme su \mathbb{R}^n topologicamente equivalenti esiste $\delta > 0$

$$\begin{aligned} B_\delta &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \bar{x}\|_1 \leq \delta\} = \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) : |x_1 - \bar{x}_1| + \dots + |x_n - \bar{x}_n| \leq \delta\} \subseteq \Omega \end{aligned}$$

Ora i punti di B_δ sono combinazione convessa dei punti $\bar{x} \pm \delta e_j$ dove e_j è il j -esimo vettore della base canonica (osservazione successiva)

Di conseguenza posto $M = \max_{i=1, \dots, n} f(\bar{x} + \delta e_i)$ otteniamo che f è superiormente limitata su B_δ

Osservazione 19. A meno di traslazione e di scalare per un fattore δ , basta dimostrare che se $x \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_1 = 1$ allora x è combinazione convessa dei vettori $\pm e_j$.

Infatti da $\|x\|_1 = 1$ abbiamo $|x_1| + \dots + |x_n| = 1$ dunque

$$x = \sum_{i=1}^n |x_i| (\text{sgn}(x_i) e_i)$$

Osservazione 20. Nelle stesse ipotesi della proposizione possiamo dimostrare che la funzione è continua in ogni punto di Ω essendo localmente lipschitz.

4.3 Convessità e differenziabilità

Lemma 4.6. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

I seguenti fatti sono equivalenti

(i) f è convessa

(ii) $\forall x, x_0 \in \Omega$ vale

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

ovvero la funzione sta sopra al piano tangente

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii).

Se f è convessa allora

$$f(x_0 + t(x - x_0)) \leq f(x_0) + t(f(x) - f(x_0))$$

dunque

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} \leq f(x) - f(x_0)$$

Per $t \rightarrow 0$ il primo membro tende alla derivata di $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ dunque usando la regola di derivazione delle funzioni composte

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

da cui la tesi.

(ii) \Rightarrow (i) Sia $x(t) = tx + (1 - t)x_0$ dunque $x(0) = x_0$ e $x(1) = x$. Dalla condizione (ii) segue

$$f(x) \geq f(x(t)) + \langle \nabla f(x(t)), x - x(t) \rangle$$

$$f(x_0) \geq f(x(t)) + \langle \nabla f(x_0), x_0 - x(t) \rangle$$

Facendo una combinazione convessa otteniamo

$$tf(x) + (1 - t)f(x_0) \geq f(x_t) + \langle \nabla f(x(t)), t(x - x(t)) + (1 - t)(x_0 - x(t)) \rangle = f(x_t)$$

infatti

$$t(x - x(t)) + (1 - t)(x_0 - x(t)) = 0$$

□

Lemma 4.7. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 .

I seguenti fatti sono equivalenti

(i) f è convessa

(ii) La matrice hessiana è semi-definita positiva in ogni punto

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii) Dal lemma precedente

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

quindi

$$\phi(x) = f(x) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

ha un minimo globale per $x = x_0$ ed essendo di classe C^2 ne segue

$$H_\phi(x_0) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad H_f(x_0) \geq 0$$

infatti f e ϕ differiscono per un termine lineare affine.

(ii) \Rightarrow (i) Supponiamo $D^2f(x_0) \geq 0$ per ogni $x_0 \in \Omega$

Dal teorema di Taylor con resto di Lagrange

$$f(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} D^2f(\xi)[x - x_0]^2 \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

dunque usando il lemma precedente abbiamo che f è convessa □

Proposizione 4.8. *Se la matrice hessiana è definita positiva allora f è strettamente convessa*

Dimostrazione. Lasciata come ESERCIZIO

Osservazione 21. Il viceversa, in generale, è falso

Sia $f(x, y) = x^4 + y^4$ allora $H_f((0, 0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e f è strettamente convessa

Proposizione 4.9. *Una funzione strettamente convessa, se assume minimo è unico*

Dimostrazione. Lasciata come ESERCIZIO

4.4 Convessità in spazi normati generici

Osservazione 22. L'osservazione 20 in generale non è vero per spazi di dimensione infinita.

Sia $I = [-1, 1]$ e prendiamo lo spazio delle funzioni $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 con la norma infinito

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$$

La funzione

$$\phi : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \quad g \rightarrow g'(0)$$

La funzione ϕ è lineare dunque convessa.

ϕ non è continua infatti $g_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n^2 t) \rightarrow 0$ (in norma infinito) ma $\phi(g_n) = n \not\rightarrow +\infty$

Proposizione 4.10. Siano $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ spazi vettoriali normati e $L : E \rightarrow F$ lineare

$$L \text{ continua} \quad \Leftrightarrow \quad L \text{ limitata su } \overline{B_E(0, 1)}$$

Dimostrazione. \Rightarrow Se L non fosse limitata su $\overline{B_E(0, 1)}$ allora esiste $v_n \in B_E(0, 1)$ tali che

$$\sup_n \|Lv_n\|_F = +\infty$$

Allora si ha $u_n = \frac{v_n}{\|Lv_n\|_F} \rightarrow 0$ in E infatti $\|u_n\|_E \leq \frac{1}{\|Lv_n\|_F}$. Ma $\|Lu_n\|_F = 1$

\Leftarrow Sia M tale che $\|Ly\|_F \leq M$ per $y \in \overline{B_E(0, 1)}$.

Sia $x_n \rightarrow \bar{x}$ in E allora

$$\|L(x_n - \bar{x})\|_F = \|x_n - \bar{x}\| \cdot \left\| \frac{L(x_n - \bar{x})}{\|x_n - \bar{x}\|_E} \right\|_F = \|x_n - \bar{x}\|_E \cdot \left\| L \left(\frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|_E} \right) \right\|_F \leq \|x_n - \bar{x}\|_E M \rightarrow 0$$

abbiamo provato che L è continua in \bar{x}

Osservazione 23. La proposizione può essere rafforzata infatti per avere la continuità basta che la funzione sia superiormente limitata (rileggere la dimostrazione)

Proposizione 4.11. Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto convesso

$$f \text{ convessa localmente superiormente limitata} \quad \Rightarrow \quad f \text{ continua}$$

Dimostrazione. Poichè f è localmente superiormente limitata

$$\forall p \in \Omega \quad \exists r, M > 0 \quad f(x) \leq M \text{ per } \|x - p\| < r$$

W.L.G posso supporre $p = 0$ e $f(p) = 0$ (a meno di considerare $\tilde{f}(x) = f(p + x) - f(p)$ infatti la continuità di \tilde{f} in 0 implica quella di f in p).

Sia $\|v\| < r$ allora

$$v = \left(1 - \frac{|v|}{r}\right) \cdot 0 + \frac{|v|}{r} \cdot \frac{vr}{|v|} \quad \Rightarrow \quad f(v) \leq \frac{|v|}{r} f\left(\frac{vr}{|v|}\right) \leq \frac{|v|}{r} M$$

$$0 = \frac{\frac{|v|}{r}}{1 + \frac{|v|}{r}} \left(-\frac{vr}{|v|}\right) + \frac{1}{1 + \frac{|v|}{r}} v \quad \Rightarrow \quad 0 = f(0) \leq \frac{\frac{|v|}{r}}{1 + \frac{|v|}{r}} f\left(-\frac{vr}{|v|}\right) + \frac{1}{1 + \frac{|v|}{r}} f(v) \quad \Rightarrow \quad -f(v) \leq M \frac{|v|}{r}$$

dunque mettendo insieme le 2 disuguaglianze abbiamo

$$|f(v)| \leq \frac{M}{r} |v|$$

dunque f è continua in 0 □

Proposizione 4.12. *Nelle ipotesi precedenti f è localmente lipschitz*

Dimostrazione. Sia $P_0 \in \Omega$ fisso, allora essendo la funzione localmente superiormente limitata

$$\sup_{x \in B(P_0)} f(x) \leq M$$

Proviamo che f su $B(P_0, \frac{r}{2})$ è $\frac{M}{r}$ -lipschitz.

Sia P_1 con $\|P_1\| < \frac{r}{2}$. Ora se $x \in B(P_0, r)$ allora $\|x - P_1\| \leq \frac{r}{2}$ dunque dalla proposizione precedente

$$\|x - P_1\| \leq \frac{r}{2} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(P_1)| \leq \frac{M}{r} \|x - P_1\|$$

4.5 Proiezione su un convesso

Proposizione 4.13. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un chiuso convesso non vuoto e sia $u_0 \notin C$. Allora esiste un unico punto $x \in C$ che realizza $\min_{x \in C} |x - u_0|^2$*

Dimostrazione. Osserviamo da prima che tale minimo esiste. Sia $\bar{c} \in C$ e poniamo $R = |u_0 - \bar{c}|$

$$\inf_{x \in C} |x - u_0|^2 = \inf_{x \in C \cap \overline{B(u_0, R)}} |x - u_0|^2$$

Ora essendo $C \cap \overline{B(u_0, R)}$ un compatto, per Weistrass, esiste $u_1 \in C \cap \overline{B(u_0, r)}$ che realizza il minimo.

Mostriamo l'unicità. Se per assurdo esistesse $u_2 \in C$ con $u_2 \neq u_1$ tale che $\|u_1 - u_0\|^2 = \|u_2 - u_0\|^2 = r^2$ allora si avrebbe

$$\left\| \frac{u_1 + u_2}{2} - u_0 \right\|^2 < r^2$$

ma per convessità $\frac{u_1 + u_2}{2} \in C$ il che è assurdo in quanto $r^2 = \min_{x \in C} \|x - u_0\|^2$ □

Osservazione 24. La proposizione potrebbe non essere vera se non usassimo la norma 2. Muniamo \mathbb{R}^2 della norma 1

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$$

e sia $u_0 = 0$ allora

$$\min_{x \in C} \|x\|_1 = 1$$

ma tale minimo non è unico infatti è raggiunto da $(0, 1)$ e $(1, 0)$

Vista la proposizione possiamo dare la seguente definizione

Definizione 4.5. Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso chiuso non vuoto allora definiamo la **proiezione sul convesso** C la funzione

$$p : \mathbb{R}^n \rightarrow C$$

dove $p(u)$ è l'unico elemento di C che realizza $\min_{x \in C} |x - u|$

Lemma 4.14. *Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un chiuso convesso non vuoto e $u \in \mathbb{R}^n \setminus C$ sia $v \in \mathbb{R}^n$*

$$p(u) + v \in C \quad \Rightarrow \quad (u - p(u)) \cdot v \leq 0$$

Dimostrazione. Sia $t \in [0, 1]$ e considero la funzione

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(t) = |p(u) + tv - u|^2$$

Allora

$$\varphi(t) = |p(u) - u|^2 + 2t(p(u) - u) \cdot v + t^2 |v|^2$$

Ora $\varphi(0)$ è un punto di minimo quindi $\varphi'(0) \geq 0$.

Ora $\varphi'(0) = 2(p(u) - u) \cdot v$ □

Osservazione 25. La proprietà del lemma, cioè

$$(u - p) \cdot w \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}^n \quad p + w \in C$$

caratterizza il punto $p \in C$ di minima distanza.

Proposizione 4.15. *La proiezione sul convesso è continua. Anzi è 1-lipschitz*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $|p(u) - p(w)| \leq |u - w|$.

Da Cauchy-Swartz

$$\begin{aligned} |u - w| |p(u) - p(w)| &\geq (u - w) \cdot (p(u) - p(w)) = (u - p(u) + p(u) - p(w) + p(w) - w) \cdot (p(u) - p(w)) \\ &= (u - p(u))(p(u) - p(w)) + |p(u) - p(w)|^2 + (p(w) - w)(p(u) - p(w)) \geq |p(u) - p(w)|^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\langle (u - p(u))(p(u) - p(w)), (p(w) - w)(p(u) - p(w)) \rangle \geq 0$$

per il lemma precedente (notiamo che se $u \in C$ allora $p(u) = u$ e similmente per w) □

Osservazione 26. La costruzione della proiezione su un convesso (con le medesime proprietà può essere ripetuta sostituendo \mathbb{R}^n con un generico spazio di Hilbert (uno spazio vettoriale su cui è definito un prodotto scalare definito positivo e che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare))

Proposizione 4.16. *Se il convesso C sia uno spazio affine ovvero*

$$\exists W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ sottospazio vettoriale} \quad \exists \xi \in \mathbb{R}^n \quad C = \xi + W = \{\xi + w : w \in W\}$$

allora la proiezione p è la proiezione ortogonale

Dimostrazione. Sia $u \in \mathbb{R}^n \setminus C$ dunque $p = p(u) \in C$ ed essendo C affine, $\forall w \in W$

$$p + w \in C \quad \Rightarrow \quad (u - p) \cdot w \leq 0$$

$$p - w \in C \quad \Rightarrow \quad (u - p) \cdot (-w) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (u - p) \cdot w \geq 0$$

dunque abbiamo $(u - p) \cdot w = 0$ per ogni $w \in W$

Esercizio 4.17. *Se il convesso C è un sottospazio affine allora*

$$p(tu + (1 - t)v) = tp(u) + (1 - t)p(v) \quad \forall t$$

ovvero la proiezione manda rette in rette.

Inoltre se C è uno spazio vettoriale, la proiezione è lineare

4.6 Metodo dei minimi quadrati

Supponiamo di avere a disposizione n punti nel piano $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, vogliamo trovare una retta che “meglio” approssimi i punti nel piano, ovvero cerchiamo a, b in modo da minimizzare

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

Studiamo tale funzione

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2x_i(ax_i + b - y_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial b}(a, b) = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)$$

$$\frac{\partial E}{\partial a \partial a}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial b \partial b}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n 1$$

$$\frac{\partial E}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{\partial E}{\partial b \partial a}(a, b) = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

Dunque se poniamo $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $u = (1, \dots, 1)$ otteniamo

$$H_E(a, b) = 2 \begin{pmatrix} |x|^2 & x \cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che l'hessiano non dipende dal punto (a, b) e la matrice è definita positiva (il minore $|u|^2 > 0$ e per Cauchy-Swartz il determinante è strettamente positivo avendo supposto $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$).

Troviamo l'unico punto critico

$$\nabla E = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a|x|^2 + b(x \cdot u) = x \cdot y \\ a(x \cdot u) + b|u|^2 = u \cdot y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} p & q \\ q & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

dove abbiamo posto

$$|x|^2 = p \quad x \cdot u = q \quad |u|^2 = m \quad x \cdot y = r \quad u \cdot y = s$$

dunque risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} a_0 = \frac{mr - qs}{pm - q^2} \\ b_0 = \frac{ps - qr}{pm - q^2} \end{cases}$$

Per Taylor, con resto di Lagrange abbiamo che questo è il minimo assoluto infatti

$$E(a, b) = E(a_0, b_0) + \frac{1}{2}(a - a_0, b - b_0)H_E(\xi, \eta) \begin{pmatrix} a - a_0 \\ b - b_0 \end{pmatrix} \geq E(a_0, b_0)$$

dove abbiamo usato che la matrice hessiana è costante e definita positiva

5 Invertibilità e funzioni implicite

5.1 Inversione locale

Definizione 5.1. $f : U \rightarrow V$ si dice **diffeomorfismo** se è di classe C^1 invertibile con inversa di classe C^1

Teorema 5.1 (Invertibilità locale).

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $C^1(\Omega)$.

Supponiamo che il determinante del jacobiano sia non nullo in x_0 (ovvero $Df(x_0)$ è invertibile)

Allora esistono un intorno aperto U di x_0 e un intorno aperto V di $f(x_0)$ tale che

$$f|_U : U \rightarrow V$$

è un diffeomorfismo.

Inoltre ponendo $g = f^{-1}$ per ogni $y \in J$ vale

$$Dg(y) = Df(f^{-1}(x))^{-1}$$

Dimostrazione. Sia $A = Df(x_0)^{-1}$.

Dalla tesi esiste una palla $B(x_0, \rho)$ dove Df è invertibile.

Sia $y \in B(f(x_0), r)$ allora definiamo

$$T_y : \overline{B(x_0, \rho)} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad T(x) = x + (Df(x_0)^{-1}) \cdot (y - f(x))$$

Mostriamo che T è una contrazione (per alleggerire la notazione sottointendiamo la dipendenza di y)

- T è L -lipschitz con $L < 1$

$$DT(x) = Id - (Df(x_0)^{-1}) \cdot Df(x)$$

dunque DT è continua essendo f di classe C^1 .

Dal fatto che $DT(x_0) = 0$ si ha per ρ sufficientemente piccolo

$$\|DT(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

dunque abbiamo che T è $\frac{1}{2}$ -lipschitz

- T mappa $\overline{B(x_0, \rho)}$ in se stesso.

$$|T(x) - x_0| \leq |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \leq \frac{1}{2}|x - x_0| + |A \cdot (y - f(x_0))| \leq \frac{\rho}{2} + r \|A\|$$

dove l'ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $x \in B(x_0, \rho)$ e dall'osservazione 6

Prendendo

$$r \leq \frac{\rho}{2 \|A\|} \quad \Rightarrow \quad T(x) \in B(x_0, \rho)$$

si ha $|T(x) - x_0| \leq \rho$.

Essendo T una contrazione ha un unico punto fisso

$$T(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)$$

Posso dunque definire $g(y) = x$ dove x è l'unico punto fisso di T_y

Pongo

$$V = B(f(x_0), r) \setminus f(\partial B(x_0, \rho)) \quad U = g(V) \subseteq B(x_0, \rho)$$

ottenendo

$$g : V \rightarrow U \quad g(f(x)) = x \quad \forall x \in U$$

Resta da provare la continuità di g .

Per ogni (y_n) successione convergente a y , poniamo $x_n = g(y_n)$ e $x = g(y)$.

La continuità di g equivale a provare che (x_n) è convergente a x

$$\frac{1}{2}|x - x_n| \geq |T(x) - T(x_n)| = |x_n + A \cdot (y - y_n) - x| \geq |x - x_n| - |A \cdot (y - y_n)| \geq |x - x_n| - \|A\| |y - y_n|$$

Riarrangiando i termini otteniamo

$$|x - x_n| \leq 2 \|A\| |y - y_n|$$

dunque $x_n \rightarrow x$

Verifichiamo ora che $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ dove $x = g(y)$.

Siano $(y_n), (x_n), y, x$ come sopra.

Richiedere che $Dg(y) = Df(x)^{-1}$ è equivalente a mostrare che

$$\frac{g(y_n) - g(y) - Df(x)^{-1} \cdot (y_n - y)}{|y_n - y|} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Ora

$$\frac{g(y_n) - g(y) - Df(x)^{-1} \cdot (y_n - y)}{|y_n - y|} = \frac{x_n - x - Df(x)^{-1} \cdot (f(x_n) - f(x))}{|y_n - y|}$$

Ora poichè f differenziabile vale

$$f(x_n) - f(x) = Df(x) \cdot (x_n - x) + o(|x_n - x|) \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

dunque sostituendo otteniamo

$$\frac{x_n - x - Df(x)^{-1} \cdot [Df(x) \cdot (x_n - x) + o(|x_n - x|)]}{|x_n - x|} \cdot \frac{|x_n - x|}{|y_n - y|} = Df(x)^{-1} \left(\frac{o(|x_n - x|)}{|x_n - x|} \right) \cdot \frac{|x_n - x|}{|y_n - y|}$$

Ora da quanto mostrato in precedenza

$$|x - x_n| \leq 2 \|A\| |y - y_n| \quad \Rightarrow \quad \frac{|x_n - x|}{|y_n - y|} \text{ limitata}$$

Mentre

$$\frac{o(|x_n - x|)}{|x_n - x|} \text{ infinitesima} \quad \Rightarrow \quad Df(x)^{-1} \left(\frac{o(|x_n - x|)}{|x_n - x|} \right) \text{ infinitesima}$$

Ricordando che il prodotto tra una successione infinitesima ed una limitata è 0 si ha la tesi.

Poichè $Df(x)$ di classe continua, anche $Df(x)^{-1}$ lo è e dunque g di classe C^1 □

Osservazione 27. Con le stesse ipotesi del teorema si prova che $f \in C^k$ allora $f^{-1} \in C^k$

Osservazione 28. Il teorema precedente è un teorema locale; il fatto che $Df(x)$ invertibile per ogni $x \in \Omega$ non garantisce l'invertibilità globale di f .

Ad esempio consideriamo l'esponenziale complesso

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad f((x, y)) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

Osserviamo che f non è invertibile infatti $f(x, y) = f(x, y + 2\pi)$ dunque non è invertibile ma

$$Df((x, y)) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

ha determinante $e^x > 0$ dunque è sempre invertibile

5.2 Funzioni implicite

Notazione 5.2. Queste notazioni me le sono inventate. Se non vi piacciono proponetene di migliori.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, e sia $z_0 \in W$ allora denoteremo tale punto come (X_0, Y_0) dove

$$X_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad Y_0 = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

In modo analogo, se $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenziabile porremmo

$$Df = (D_X f \quad D_Y f) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+m}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+2}} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n+m}} \end{array} \right)$$

dove $f = (f_1, \dots, f_m)$

Teorema 5.3 (delle funzioni implicite).

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $(X_0, Y_0) \in \Omega$.

Sia

$$f = (f_1, \dots, f_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$$

una funzione di classe C^k .

Supponiamo che $D_Y f(X_0, Y_0)$ sia invertibile allora esiste un intorno U di X_0 e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^k tale che

$$f(X, g(X)) = f(X_0, Y_0) \text{ per } x \in U \quad (1)$$

Dimostrazione. Sia

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (X, Y) &\rightarrow (X, f(X, Y)) \end{aligned}$$

allora

$$D\tilde{f} = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline D_X f & D_Y f \end{array} \right)$$

poichè $\det D\tilde{f} = \det D_Y f$ otteniamo che $D\tilde{f}(X_0, Y_0)$ è invertibile, dunque, il teorema di inversione locale garantisce l'esistenza locale di \tilde{f}^{-1} .

Osserviamo che la funzione \tilde{f}^{-1} deve essere della forma

$$\tilde{f}^{-1}(X, Y) = (X, \tilde{g}(X, Y))$$

ovvero

$$f(X, \tilde{g}(X, Y)) = Y$$

dunque ponendo $g(X) = \tilde{g}(X, f(X_0, Y_0))$.

Il fatto che g è di classe C^k discende dal fatto che \tilde{f} lo è e dunque anche \tilde{f}^{-1}

Corollario 5.4. g e f sono legati dalla seguente formula

$$Dg(X) = -(D_Y f(X, Y))^{-1} D_X f(X, Y)$$

Dimostrazione. Sia

$$h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

$$X \rightarrow (X, g(X))$$

Osserviamo che $h = (h_1, \dots, h_n, \dots, h_{n+1}, \dots, h_{n+m})$ dove

$$h_i(X) = x_i \text{ per } i = 1, \dots, n$$

$$h_{n+i}(X) = g_i(X) \text{ per } i = 1, \dots, m$$

inoltre essendo g differenziabile anche h lo è e vale

$$Dh(X) = \left(\frac{I_n}{D_X g(X)} \right)$$

Poichè $(f \circ h)(X) = f(X, g(X)) = f(X_0, Y_0)$ derivando otteniamo

$$Df(X, g(X))Dg(X) = 0$$

da cui

$$(D_X f \quad D_Y f) \left(\frac{I_n}{D_X g(X)} \right) = 0$$

da cui la tesi

Osservazione 29. Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^k dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Il teorema dice che posso rappresentare l'**insieme di livello**

$$L_c \{(X, Y) \in \Omega : f(X, Y) = c\}$$

come grafico di una funzione C^k . in tutti i punti $(X, Y) \in L_c$ con $rk(D_Y f(X, Y)) = m$ come grafico di g .

Tali punti si chiamano **punti regolari** di $f = c$

Nel caso $n = m = 1$ il teorema delle funzioni implicite prende il nome di

Teorema 5.5 (del Dini).

Sia

$$f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione di classe C^1 .

Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Allora l'insieme di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} = \Gamma_g \quad g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

di classe C^1

5.3 Sottovarietà differenziabili

Definizione 5.2. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ è una **sottovarietà** di dimensione $m < n$ e di classe C^k se per ogni punto $x \in M$

- esiste $U \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di x_0
- esiste

$$\varphi : B(0, r) \rightarrow U$$

diffeomorfismo di classe C^k tale che

$$\varphi(\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap B(0, r) = M \cap U$$

=

Definizione 5.3. Le $(n - 1)$ sottovarietà si chiamano **ipersuperfici**

Definizione 5.4. Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una k -varietà differenziabile e sia $\varphi : B(0, r) \rightarrow U$ garantita dal teorema.

Lo spazio vettoriale generato dalle prime k colonne di $D\varphi(0)$ prende il nome di **spazio tangente** a M in x_0 e si indica con $T_{x_0}M < \mathbb{R}^n$

Osservazione 30. Sia $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 allora il suo grafico $\Gamma_g \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ è una sottovarietà di dimensione n .

Sia

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (X, Y) &\rightarrow (X, g(X) + Y) \end{aligned}$$

allora tale funzione è localmente un diffeomorfismo infatti $D\varphi = \left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline Dg & I_m \end{array} \right)$.

Inoltre lo spazio tangente a Γ_g in (X_0, Y_0) è il sottospazio vettoriale

$$T_{(X_0, Y_0)}\Gamma_g = \{(v, Dg(X_0) \cdot v) : v \in \mathbb{R}^n\} < \mathbb{R}^{n+m}$$

Proposizione 5.6. Sia $f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $D_Y f(X_0, Y_0)$ invertibile. Allora

$$M = \{(X, Y) : f(X, Y) = f(X_0, Y_0)\}$$

è una n -sottovarietà differenziabile

Dimostrazione. Dal teorema delle funzioni implicite $M = \Gamma_g$ con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 . Dunque possiamo concludere sfruttando l'osservazione precedente

Osservazione 31. Osserviamo inoltre che $Im(Df(X_0, Y_0)) = (T_{(X_0, Y_0)}M)^\perp$ infatti

$$\left(D_X f \mid D_Y f \right) \left(\frac{v}{Dg \cdot v} \right) = (D_X f + D_Y f \cdot Dg) \cdot v = 0$$

infatti segue dal corollario 5.4.

Il sottospazio perpendicolare allo spazio tangente (alla varietà M in x_0) prende il nome di **spazio normale** alla varietà M in x_0

5.4 Moltiplicatori di Lagrange

Teorema 5.7 (dei moltiplicatori di Lagrange).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 .

Sia $g = (g_1, \dots, g_m) : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^1 e sia $M = \{x \in A : g(x) = 0\}$.

Se x_0 è un punto di massimo/minimo locale per $f|_M$ allora i vettori

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0) \dots, \nabla g_m(x_0)$$

sono linearmente dipendenti, ovvero esistono $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che

$$\lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo locale per $f|_M$, ovvero

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{per } x \in B(x_0, r) \cap M$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$ definiamo

$$h_k(x) = f(x) + |x - x_0|^2 + k \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$$

Per Weirstrass h_k ammette un minimo su $\overline{B(x_0, r)}$, sia x_k tale minimo.

A meno di estrarre sotto-successioni convergenti, assumo

$$x_k \rightarrow x_\infty \quad h(x_k) \rightarrow c \in \mathbb{R}$$

infatti la successione $h(x_k)$ è limitata (infatti essendo x_k il minimo $h_k(x_k) \leq h_k(x_0) = f(x_0)$).

Andiamo a mostrare che $x_\infty = x_0$.

Dalla definizione di h_k otteniamo

$$k \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 = h_k(x_k) - |x_k - x_0|^2 - f(x_k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 = \frac{1}{k} [h_k(x_k) - |x_k - x_0|^2 - f(x_k)]$$

Ora per $k \rightarrow +\infty$ si ha

$$\sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 \rightarrow 0$$

dunque $g_i(x_\infty) = 0$ per ogni i e quindi $x_\infty \in M$

Dalla definizione di h_k otteniamo

$$f(x_k) + |x_k - x_0|^2 \leq h_k(x_k) \leq h_k(x_0) = f(x_0) \leq f(x_\infty)$$

infatti per \leq usiamo che x_k è il minimo di h_k su $\overline{B(x_0, r)}$ mentre per \leq usiamo che x_0 è minimo di f su $\overline{B(x_0, r)} \cap M$ e $x_\infty \in M$.

Passando al limite otteniamo

$$f(x_\infty) + |x_\infty - x_0|^2 \leq f(x_\infty) \quad \Rightarrow \quad x_\infty = x_0$$

Per il principio di Fermat

$$0 = \nabla h_k(x_k) = \nabla f(x_0) + 2|x_k - x_0| + 2k \sum_{i=1}^m g_i(x_k) \nabla g_i(x_k)$$

Scriviamo $f = g_0$ e poniamo

$$\mu_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0 \\ 2kg_i(x_k) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ottenendo

$$\sum_{i=0}^m \mu_{i,k} \nabla g_i(x_k) = -2(x_k - x_0)$$

Normalizzando i coefficienti

$$\tilde{\mu}_{i,k} = \frac{\mu_{i,k}}{\sqrt{\sum_{i=0}^m \mu_{i,k}^2}}$$

possiamo scrivere

$$\sum_{i=0}^m \tilde{\mu}_{i,k} \nabla g_i(x_k) \rightarrow \sum_{i=0}^m \mu_i^* \nabla g_i(x_0) = 0$$

infatti $x_k - x_0 \rightarrow 0$

Osservazione 32. Abbiamo dovuto normalizzare i coefficienti infatti $\sum_{i=0}^m \mu_{i,k}^2$ potrebbe tendere a $+\infty$ mentre normalizzando

$$\tilde{\mu}_{i,k} \rightarrow \mu_i^* \quad \text{dove } (\mu_i^*)^2 = \lim_k \sum_{i=1}^m (\tilde{\mu}_{i,k})^2 = 1$$

Osservazione 33. Consideriamo lo stesso setting del teorema.

Se $Dg(x_0)$ ha rango massimo ovvero $\{\nabla g_i(x_0)\}_{i=1,\dots,n}$ sono linearmente indipendenti, posso scrivere

$$\nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla f_i(x_0)$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{R}$ prendono il nome di **moltiplicatori di Lagrange**.

Sotto queste ipotesi M è regolare “vicino” a x_0 e vale $\nabla f(x_0) \in (T_{x_0}M)^\perp$

Definizione 5.5. Il sistema di $n + m$ equazioni (l’ultima sono n equazioni essendo il gradiente un vettore di \mathbb{R}^n) in $n + m$ incognite $(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$

$$\begin{cases} g_1(x) = 0 \\ \vdots \\ g_m(x) = 0 \\ \nabla f(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x_0) \end{cases}$$

Esercizio 5.8. Sia $V = M(n, n, \mathbb{R})$ e $\phi(A) = \det A$.

Trovare massimi e minimi di ϕ sul vincolo

$$\Sigma = \left\{ A : \sum_{i,j} a_{ij}^2 = n \right\}$$

Dimostrazione. Osserviamo che il vincolo è un insieme compatto, in particolare è un'ipersuperficie (è omeomorfo ad una palla in \mathbb{R}^{n^2}).

Il vincolo può essere riformulato osservando che

$$\text{tr}(A^T A) = \sum_{ij} a_{ij}^2$$

inoltre se $g(A) = \text{tr}(A^T A)$ sappiamo che

$$d\phi(A)[H] = \det A \text{tr}(A^{-1}H)$$

(possiamo assumere A invertibile, infatti né il massimo né il minimo vengono raggiunto se $\det A = 0$ (infatti $I \in \Sigma$ e $\phi(A) = 1 > 0$). Se consideriamo la matrice C che si ottiene dall'identità permutando le prime 2 colonne abbiamo $C \in \Sigma$ e $\det C = -1 < 0$).

Inoltre

$$dg(A)[H] = \text{tr}(A^T H + H^T A)$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, se A è stazionario per ϕ con vincolo $\{g = n\}$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che (A, λ) è soluzione di

$$\begin{cases} d\phi(A) = \lambda dg(A) \\ g(A) = n \end{cases}$$

Ora il primo sistema è un'uguaglianza tra funzionali dunque il sistema equivale a

$$\begin{cases} d\phi(A)[H] = \lambda dg(A)[H] & \forall H \in V \\ g(A) = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det A = \text{tr}(A^{-1}H) = \lambda \text{tr}(A^T H + H^T A) & \forall H \in V \\ \text{tr}(A^T A) = n \end{cases}$$

Ponendo $H = A$ la prima equazione diventa

$$\det A n = 2\lambda \text{tr}(A^T A) = 2\lambda n \Leftrightarrow \lambda = \frac{\det A}{2}$$

dove $=$ deriva utilizzando la seconda equazione.

Dunque la prima equazione diventa

$$2\text{tr}(A^{-1}H) + \text{tr}(A^T H + H^T A) \Leftrightarrow 2\text{tr}(K) = \text{tr}(A^T AK + K^T A^T A) \quad \forall K \in V \Leftrightarrow \text{tr}((I - A^T A)K) = 0$$

infatti le condizioni $\forall H \in V$ e $H = AK \quad \forall K \in V$ sono equivalenti.

Notiamo che la funzione

$$(A, B) \rightarrow \text{tr}(A^T B)$$

è un prodotto scalare definito positivo, dunque $\langle I - A^T A, K \rangle = 0$ per ogni $K \in V$ allora $I - A^T A = 0$ ovvero $A = A^T$.

Dunque se A risolve il sistema dei moltiplicatori di Lagrange deve essere una matrice ortogonale infatti se A ortogonale $g(A^T A) = n$. Il massimo è raggiunto in 1 e il minimo in -1 (se A è ortogonale $\det A = \pm 1$)

6 Successioni di funzioni

Definizione 6.1. Sia X un insieme e $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach.

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow E$.

Diremo che

- $f_n \rightarrow f$ **puntualmente** se

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \|f_n(x) - f(x)\|_E < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

in altre pare se per ogni $x \in X$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$

- $f_n \rightarrow f$ **uniformemente** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \|f_n(x) - f(x)\|_E < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n} \quad \forall x \in X$$

Osservazione 34. Nella definizione di convergenza puntuale \bar{n} dipende sia da x che da ε mentre in quella uniforme dipende solo da ε . In particolare la convergenza uniforme implica quella puntuale.

Il viceversa, in generale, è falso.

Sia

$$f_n(x) = (nx)e^{-|nx|}$$

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \rightarrow 0$ dunque $f_n \rightarrow f$ puntualmente.

Osserviamo che tale convergenza non è uniforme infatti $\max_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \max_{x \in \mathbb{R}} f_1(x) = c > 0$ che non dipende da n .

Dunque se $\varepsilon < c$ allora si ha

$$|f_n(x)| > \varepsilon$$

dunque $f_n \not\rightarrow 0$ uniformemente

Definizione 6.2. Sia X un insieme e $(E, \|\cdot\|_E)$ uno spazio di Banach, poniamo

$$B(X, E) = \{f : X \rightarrow E : f \text{ limitata}\}$$

e su tale spazio consideriamo la **norma uniforme** definita da

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$$

Osservazione 35.

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente} \quad \Leftrightarrow \quad \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Proposizione 6.1. *La norma uniforme è una norma*

Dimostrazione. Osserviamo che è una funzione a valori in \mathbb{R} infatti essendo le funzioni limitate l'estremo superiore è finito

- Poichè $\|f\|_\infty$ è un estremo superiore di quantità non negative è chiaramente maggiore o uguale a 0, inoltre un estremo superiore di numeri è 0 se e solo se tutti i numeri sono zero da cui $\|f\|_\infty = 0$ se e solo se $f(x) = 0$ per ogni x , cioè $f \equiv 0$

- Poichè $\|\cdot\|_E$ è una norma $\|\lambda f(x)\|_E = \|\lambda\|_E \|f(x)\|_E$ da cui segue che $\|\lambda f\|_\infty = \|\lambda\|_E \|f\|_\infty$

(iii) Osserviamo che

$$\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\|_E + \|g(x)\|_E \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Poichè tale disuguaglianza vale per ogni $x \in X$ passando all'estremo superiore otteniamo

$$\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x) + g(x)\|_E \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Proposizione 6.2. *Lo spazio $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach*

Dimostrazione. Avendo mostrato che $\|\cdot\|_\infty$ è una norma su $B(X, E)$ resta da provare che le successioni di Cauchy per tale norma sono convergenti.

Per non appesantire la notazione useremo il simbolo $|\cdot|$ per intendere $\|\cdot\|_E$.

Sia $(f_n)_n$ una successione di Cauchy per $\|\cdot\|_\infty$ dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n} \quad (2)$$

Ora da 2 segue cche

$$\forall x \in X \quad \forall n, m \geq \bar{n} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$$

ovvero da 2 si ha che per ogni $x \in X$ la successione $(f_n(x))_n$ è di Cauchy in $(E, |\cdot|)$, tale spazio è di Banach dunque

$$\forall x \in X \quad \exists! f(x) \in E \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ovvero $f_n \rightarrow f$ puntualmente. Mostriamo che tale convergenza è anche uniforme.

Fissato $\varepsilon > 0$ scelgo \bar{n} come in 2 dunque

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq \bar{n}$$

Ora mandando $m \rightarrow +\infty$ per la continuità della norma si ha

$$\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

e passando all'estremo superiore in $x \in X$ ottengo che

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

dunque abbiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente □

Proposizione 6.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico, $x_0 \in X$ e $(E, |\cdot|)$ uno spazio di Banach.*

Siano $(f_n)_n$ una successione di funzioni $f_n : X \rightarrow E$ continue in x_0 .

Se $f_n \rightarrow f$ uniformemente allora f è continua in x_0

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ scelgo \bar{n} tale che

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

questo è possibile in quanto $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Allora

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{\bar{n}}(x) + f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0) + f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Poichè $f_{\bar{n}}$ è continua in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X \quad d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dunque ottengo

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad d(x, x_0) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

che è la definizione di f è continua in x_0

Corollario 6.4. Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni continue in x_0 con $f_n \rightarrow f$ puntualmente. Se f non è continua in x_0 allora la convergenza non è uniforme

Corollario 6.5.

$$BC(X, E) = \{f \in B(X, E) : f \text{ continua}\}$$

è un sottospazio chiuso di $B(X, E)$; in particolare è uno spazio di Banach

Osservazione 36. Se (X, d) è compatto allora $C(X, E) \subseteq B(X, E)$ è un sottospazio chiuso

Esercizio 6.6.

$$C_0(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}) : \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \right\}$$

è un sottospazio chiuso di $BC(\mathbb{R}^l, \mathbb{R})$. In particolare $(C_0(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach

Proposizione 6.7. Sia $f_n \in ([a, b], \mathbb{R})$ una successione di funzioni tali che $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Allora

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Dimostrazione.

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \right| \rightarrow 0$$

Fissato $\varepsilon > 0$ sia \bar{n} tale che $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$ per ogni $n \geq \bar{n}$ allora

$$\left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

Osservazione 37. Se $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ allora $f_n = \begin{pmatrix} f_n^{(1)} & \dots & f_n^{(m)} \end{pmatrix}$ allora

$$\int_a^b f_n(x) dx = \left(\int_a^b f_n^{(1)}(x) dx \quad \dots \quad \int_a^b f_n^{(m)}(x) dx \right)$$

la proposizione vale anche se $f \in C([a, b], \mathbb{R}^m)$ con analogha dimostrazione

Proposizione 6.8. Sia Ω un aperto convesso e limitato di \mathbb{R}^l .

Sia $(f_n)_n \subseteq C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ tale che

- $\exists x_0 \in \Omega$ con $f_n(x_0) \rightarrow y_0$ in un punto

- $\exists F \in C(\Omega, \mathbb{R}^l)$ tale che $\nabla f_n \rightarrow F$ uniformemente

Allora $\exists f \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^l)$ tale che $f_n \rightarrow f$ uniformemente e $\nabla f = F$

Dimostrazione. Sia $\Delta = \text{diam}(\bar{\Omega})$ allora $|x_0 - x| \leq \Delta$ per ogni $x \in \bar{\Omega}$.

Osserviamo che

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_0^1 \nabla f_n(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt$$

infatti posta $\varphi_n(t) = f_n(x_0 + t(x - x_0))$ si ha $\varphi_n'(t) = \nabla f_n(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$ dunque per il teorema fondamentale del calcolo integrale (in una variabile)

$$\varphi_n(1) = \varphi_n(0) + \int_0^1 \varphi_n'(t) dt$$

Se $n \rightarrow +\infty$ allora $f_n(x_0) \rightarrow y$ ed inoltre

$$\int_0^1 \nabla f_n(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt \rightarrow \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt$$

infatti poichè $\nabla f_n \rightarrow F$ uniformemente allora

$$|(\nabla f_n(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0 + t(x - x_0))) \cdot (x - x_0)| \leq \|\nabla f_n - F\|_\infty |x - x_0| \leq \|\nabla f_n - F\|_\infty \Delta$$

dunque i due integrandi convergono uniformemente pertanto

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = y_0 + \int_0^1 F(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt$$

e tale convergenza è uniforme su $\bar{\Omega}$ infatti

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x_0) - y_0| + \left| \int_0^1 (\nabla f_n(x_0 + t(x - x_0)) - F(x_0 + t(x - x_0))) \cdot (x - x_0) dt \right| \leq \\ &\leq |f_n(x_0) - y_0| + \|\nabla f_n - F\|_\infty \cdot \Delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

e la stima è indipendente da x Osserviamo che il punto x_0 non ha nulla di particolare, se $x_1 \in \Omega$ allora

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = f(x_1) + \int_0^1 F(x_1 + t(x - x_1)) \cdot (x - x_1) dt$$

Per mostrare che f è differenziabile e $\nabla f = F$ basta dimostrare che

$$\omega(x) = f(x) - f(x_1) - F(x_1) \cdot (x - x_1) = o(|x - x_1|)$$

Ora

$$\omega(x) = \int_0^1 F(x_1 + t(x - x_1)) \cdot (x - x_1) dt - F(x_1) \cdot (x - x_1) = \left[\int_0^1 (F(x_1 + t(x - x_1)) - F(x_1)) dt \right] \cdot (x - x_1)$$

Dunque

$$|\omega(x)| \leq \left(\int_0^1 |F(x_1 + t(x - x_1)) - F(x_1)| dt \right) |x - x_1|$$

Poichè F continua in x_1

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |u - x_1| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |F(u) - F(x_1)| \leq \varepsilon$$

Posto $u_t = x_1 + t(x - x_1)$ allora per $t \in [0, 1]$

$$|u_t - x_1| = t|x - x_1| \leq t\delta \leq \delta$$

dunque

$$\int_0^1 |F(x_1 + t(x - x_1)) - F(x_1)| dt \leq \varepsilon$$

da cui $\omega(x) = o(|x - x_1|)$ □

Osservazione 38. Se non assumiamo Ω limitato, la convergenza uniforme è garantita su tutti i limitati contenuti in Ω

Proposizione 6.9. *Sia Ω aperto.*

Supponiamo $f_n \rightarrow f$ puntualmente e $\nabla f_n \rightarrow F$ uniformemente.

Allora $f \in C^1$ e $\nabla f = F$

Dimostrazione. Dato $x_1 \in \Omega$, scelgo $r > 0$ tale che $\overline{B(x_1, r)} \subseteq \Omega$ (esiste poichè Ω aperto).

Posso applicare il teorema precedente a $f|_{\overline{B(x_1, r)}}$ ottenendo che è di classe C^1 e nella palla $\nabla f(x) = F(x)$.

Poichè le proprietà sono locali, ho la tesi □

Proposizione 6.10. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto limitato, se $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ poniamo*

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|\nabla f\|_{\infty}$$

Lo spazio $(C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ è uno spazio di Banach

Dimostrazione.

$$f_n \text{ di Cauchy per } \|\cdot\|_{C^1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f_n \text{ di Cauchy per } \|\cdot\|_{\infty} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \text{ di Cauchy per } \|\cdot\|_{\infty} \end{cases}$$

dunque

$$\begin{aligned} \exists f \in C(\overline{\Omega}) \quad f_n &\rightarrow f \text{ uniformemente} \\ \exists F_i \in C(\overline{\Omega}) \quad \frac{\partial f_n}{\partial x_i} &\rightarrow F_i \text{ uniformemente} \end{aligned}$$

Abbiamo dunque $\nabla f_n \rightarrow F$ uniformemente. Per il risultato precedente $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\nabla f = F$ dunque $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ e $\|\nabla f_n - \nabla f\|_{\infty} \rightarrow 0$ da cui la tesi

7 Serie di funzioni

Definizione 7.1. Sia $(E, \|\cdot\|)$ uno spazio di Banach e sia $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ con $u_k : X \rightarrow E$. La **somma parziale** delle funzioni è la funzione

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

La **serie** delle funzioni è la funzione

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x).$$

Diciamo che la serie converge

- **puntualmente** su X se esiste $s : X \rightarrow E$ tale che $s_n(x) \rightarrow s(x)$ puntualmente
- **uniformemente** su X se esiste $s : S \rightarrow E$ tale che $s_n \rightarrow s$ uniformemente.
- **totalmente** se esistono $(M_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ tali che

$$\begin{aligned} & - \|u_k\|_{\infty} \leq M_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} M_k < +\infty \end{aligned}$$

Corollario 7.1. Supponiamo che $u_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue e che $\sum u_k$ converga uniformemente allora

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

Dimostrazione. Per linearità dell'integrale

$$\int_a^b s_n(x) dx = \sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x) dx$$

Ora $s_n \rightarrow \sum u_k$ uniformemente dunque

$$\int_a^b s_n(x) dx \longrightarrow \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) dx$$

Mentre dalla definizione di serie

$$\sum_{k=0}^n \int_a^b u_k(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0} \int_a^b u_k(x) dx$$

Si conclude per unicità del limite □

Proposizione 7.2.

$$\text{convergenza totale} \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza uniforme}$$

Dimostrazione. Mostriamo che s_n è di Cauchy.
Fissato ε , poichè $\sum M_k < \infty$, esiste n_0 tale che

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} M_k < \varepsilon$$

Ora preso $m > l > n_0$ si ha

$$|s_m(x) - s_l(x)| \leq \left| \sum_{k=l+1}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=l+1}^m |u_k| \leq \sum_{k=l+1}^m M_k \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} M_k \leq \varepsilon$$

Le somme parziali sono di Cauchy per la norma infinita e dunque convergono uniformemente \square

Osservazione 39. Il viceversa è falso, prendiamo ad esempio $u_k(x) = (-1)^k \frac{1}{k}$ che converge uniformemente ma non totalmente (la serie armonica diverge, dunque non si può maggiorare con una serie convergente)

7.1 Serie di potenze

Definizione 7.2. Sia $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione a valori complessi e $z, z_0 \in \mathbb{C}$. La **serie di potenze** di centro z_0 associata a $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è la funzione

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$$

Teorema 7.3. $\exists R \in [0, +\infty]$ tale che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k$:

(i) non converge se $|z - z_0| > R$

(ii) converge assolutamente se $|z - z_0| < R$

Inoltre

$$R = \frac{1}{L} \text{ dove } L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

Dimostrazione. OMESSA.

Osservazione 40. Sul bordo del disco di raggio R a priori non si può dire nulla invece circa la convergenza della serie, difatti vi sono casi in cui in dei punti del bordo converge, mentre in altri diverge.

Osservazione 41. Ricordiamo la definizioni e le proprietà del limite superiore

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} a_k \quad (= \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n \text{ se } \sup_{k \geq n} a_k = \beta_n)$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L > 0 \implies \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = L \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$
- $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \iff \begin{cases} \forall l > L & a_n < l \text{ definitivamente} \\ \forall l < L & a_n > l \text{ frequentemente} \end{cases}$

Teorema 7.4. Se R è il raggio di convergenza della serie $F(z - z_0)$ e se $0 < r < R$ allora la serie converge totalmente (e quindi anche uniformemente) su

$$\overline{B(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, fisso $z_0 = 0$.

Fisso r tale che $0 < r < \frac{1}{L}$ e scelgo l tale che $L < l < \frac{1}{r}$, allora, per la proprietà 3,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } |c_n|^{\frac{1}{n}} < l \quad \forall n \geq n_0.$$

Se $|z| \leq r$ e $n \geq n_0$, allora

$$|c_n z^n| = \left(|c_n|^{\frac{1}{n}} |z| \right)^n \leq (lr)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

dove il limite finale è dato dal fatto che, essendo $l < \frac{1}{r}$, allora $lr < 1$. Dunque abbiamo dimostrato che la serie converge totalmente.

□

Corollario 7.5. Se R è il raggio di convergenza della serie $F(z-z_0)$, allora $F(z)$, con $|z-z_0| < R$, è una funzione continua su $B_R(z_0)$.

Dimostrazione. Fisso $z_1 \in B_R(z_0)$ (aperta). Scelgo r tale che $|z_1| < r < R$. Questo fa sì che $B_r(z_0)$ è un intorno di z_1 .

$s_n = \sum_{k=0}^n$ è una successione di funzioni continue che converge uniformemente su $B_r(z_0)$ per il teorema 2 \implies il limite è continuo in z_1 . □

Lemma 7.6. $\forall l \in \mathbb{N}$ le serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^l c_k z^k \quad e \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$$

hanno lo stesso raggio di convergenza.

Dimostrazione.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (n^l |c_n|)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^l |c_n|^{\frac{1}{n}} = 1 \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$$

dove l'ultimo passaggio segue dalla proprietà 2 e da $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\frac{1}{n}})^l = 1$. Quindi concludiamo che non dipende da l . □

Lemma 7.7. Siano $z, z_0 \in \mathbb{C}$, $|z| \leq r$, $|z_0| \leq r$, allora

$$|z^k - z_0^k - k z_0^{k-1} (z - z_0)| \leq \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} |z - z_0|^2.$$

Dimostrazione. Useremo ripetutamente l'identità

$$(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} |z^k - z_0^k - k z_0^{k-1} (z - z_0)| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} z^j z_0^{k-j-1} - k z_0^{k-1} \right| \cdot |z - z_0| = \left| \sum_{j=0}^{k-1} [z^j z_0^{k-j-1} - z_0^{k-1}] \right| \cdot |z - z_0| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} [(z^j - z_0^j) z_0^{k-j-1}] \right| \cdot |z - z_0| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{j-1} z^i z_0^{j-i-1} \right) z_0^{k-j-1} \right] \right| \cdot |z - z_0|^2 \stackrel{(*)}{\leq} \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^{k-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{j-1} r^{j-1} \right) r^{k-j-1} \right] \right| \cdot |z - z_0|^2 = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} [(j r^{j-1}) r^{k-j-1}] \right| \cdot |z - z_0|^2 = \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} j \right) r^{k-1} |z - z_0|^2 = \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} \cdot |z - z_0|^2. \end{aligned}$$

(*) segue dal fatto che $|z^i z_0^{j-i-1}| \leq r^{j-1}$, siccome per ipotesi $|z| \leq r$, $|z_0| \leq r$. □

Definizione 7.3. Sia $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ a valori complessi e $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$.

Definisco la sua **serie derivata** come

$$F'(z) := \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k z^{k-1}.$$

Lemma 7.8. Se R è il raggio di convergenza di $F(z) \implies F'(z)$ ha lo stesso raggio di convergenza e $\forall |z_0| < R$ fissato, vale lo sviluppo

$$F(z) = F(z_0) + F'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|) \quad \text{per } z \rightarrow z_0.$$

Dimostrazione. Il raggio di convergenza della serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k z^{k-1}$ è lo stesso di $\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k z^k$ perché differiscono solo per moltiplicazione per un z , e $\sum_{k=1}^{+\infty} k c_k z^k$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k = F(z)$.

Verifichiamo ora lo sviluppo. Vogliamo che

$$\omega(z) = F(z) - F(z_0) + F'(z_0) \cdot (z - z_0) = o(|z - z_0|)$$

Notiamo che

$$F(z) - F(z_0) + F'(z_0) \cdot (z - z_0) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z^k - \sum_{k=2}^{+\infty} c_k z_0^k - \left(\sum_{k=2}^{+\infty} k c_k z_0^{k-1} \right) (z - z_0)$$

dove si parte da $k = 2$, poiché per $k = 0$ e $k = 1$ i termini si elidono. Dunque

$$\omega(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_k [z^k - z_0^k - k c_k z_0^{k-1} (z - z_0)]$$

Fisso r tale che $|z_0| < r < R$, $z_0 \in B(0, r) \subsetneq B(0, R)$.

Da qui in poi fino alla fine della dimostrazione $|z| < r$.

$\omega(z)$ è definito da una serie totalmente convergente su $B(0, r)$, infatti dal lemma precedente sappiamo che

$$c_k [z^k - z_0^k - k c_k z_0^{k-1} (z - z_0)] \leq |c_k| \cdot \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} |z - z_0|^2$$

Posso tralasciare $|z - z_0|^2$ poiché è costante, siccome le abbiamo fissate.

Guardo dunque alla convergenza di $\sum_{k=2}^{+\infty} |c_k| \cdot \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2}$.

Essa è dominata da $\sum_{k=2}^{+\infty} k^2 |c_k| r^{k-2}$, che ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum k^2 |c_k| r^k$ e tutte convergono poiché $r < R$.

Dunque

$$|\omega(z)| = \left(\sum_{k=2}^{+\infty} |c_k| \cdot \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} \right) |z - z_0|^2 = \mathcal{O}(|z - z_0|^2) = o(|z - z_0|)$$

poiché $\left(\sum_{k=2}^{+\infty} |c_k| \cdot \frac{k(k-1)}{2} r^{k-2} \right)$ è convergente e costante rispetto a z . □

Definizione 7.4. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, F è **derivabile in senso complesso** su Ω (e si dice **olomorfa**) se:

$$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists \gamma_0 \in \mathbb{C} \text{ tale che } F(z) = F(z_0) + \gamma_0 \cdot (z - z_0) + o(|z - z_0|)$$

dove $\gamma_0 = F'(z_0)$.

Osservazione 42. La somma di una serie di potenze è olomorfa.

Corollario 7.9. $F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ ha R.d.C. $R \implies$ la funzione F è derivabile in senso complesso infinite volte.

Dimostrazione. $F'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k z^{k-1} \implies F'(z)$ è olomorfa in $B(0, R)$.

Per induzione

$$F^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1) z^{k-n}$$

allora

$$F^{n+1}(z) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-n+1)(k-n) z^{k-n-1}$$

□

8 Misura di Lebesgue

8.1 Misure e prime definizioni

Definizione 8.1. Sia X un insieme. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ si dice **σ -algebra** se

- (i) $\emptyset \in \mathcal{E}$
- (ii) Se $A \in \mathcal{E}$ allora anche $A^C \in \mathcal{E}$
- (iii) Se la successione (A_n) è contenuta in \mathcal{E} allora $\bigcup A_n \in \mathcal{E}$

Osservazione 43. Poichè l'intersezione di σ -algebre è una σ -algebra, esiste la minima σ -algebra che contiene un insieme A , la denoteremo con **σ -algebra generata** da A e con il simbolo $\sigma(A)$

Tale osservazione ci permette di dare la seguente definizione

Definizione 8.2. Sia (X, d) uno spazio metrico. La σ -algebra generata dagli aperti di X prende il nome di σ -algebra dei **boreliani** e viene denotata con $\mathcal{B}(X)$

Definizione 8.3. Sia $E \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $f : E \rightarrow [0, +\infty]$.

f è **σ -subadditiva** se

$$\forall (A_n) \subseteq E \quad \text{vale} \quad \bigcup A_n \in E \quad \Rightarrow \quad f\left(\bigcup A_n\right) \leq \sum f(A_n)$$

f si dice **σ -additiva** se

$$\forall (A_n) \subseteq E \text{ disgiunti} \quad \text{vale} \quad \bigcup A_n \in E \quad \Rightarrow \quad f\left(\bigcup A_n\right) = \sum f(A_n)$$

Definizione 8.4. Una funzione $f : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty)$ σ -additiva con \mathcal{E} σ algebra si dice **misura**. Una misura m su (X, \mathcal{E}) si dice di **Borel** se $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{E}$

Definizione 8.5. Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Allora

- μ è **finita** se $\mu(X) < \infty$
- μ è **σ -finita** se $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ con $\mu(A_i) < \infty$
- $E \subseteq X$ si dice **σ -finito** se $E \subseteq \bigcup A_i$ dove $\mu(A_i) < \infty$

Proposizione 8.1. Sia m una misura su \mathcal{E} allora

1. m è **monotona** ovvero $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m(E_1) \leq m(E_2)$
2. m è **σ -additiva**

Definizione 8.6. Sia (X, \mathcal{E}, m) uno spazio di misura. $N \in \mathcal{E}$ si dice **trascurabile** se $m(N) = 0$

Definizione 8.7. Uno spazio (X, \mathcal{E}, m) di misura si dice **completo** se tutti i sottoinsiemi di un insieme trascurabile sono trascurabili, ovvero

$$m(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall M \subseteq N \quad M \in \mathcal{E}$$

8.2 Alcuni esempi di misure

- La misura banale. Definita su $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$ con $m(\emptyset) = 0$ e $m(X) = 1$
- La misura che “conta i punti” dove $m(E) = \begin{cases} |E| & \text{se } E \text{ finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$
- La misura di Dirac δ_x dove $\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

8.3 Misura esterna e metodo di Carathéodory

Definizione 8.8. Sia X un insieme. Una funzione $m : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se valgono le seguenti proprietà

- $m(\emptyset) = 0$
- m è monotona
- m è subadditiva

Definizione 8.9. Sia m una misura esterna. $E \subseteq X$ si dice **misurabile per la misura esterna** se

$$m(E) = m(A \cap E) + m(A^C \cap E) \quad \forall A \in \mathcal{P}(X)$$

Teorema 8.2. Data una misura esterna m su X , l'insieme

$$\mathcal{M}_m = \{E \in \mathcal{P}(X) : E \text{ misurabile per } m\}$$

è una σ -algebra e $m|_{\mathcal{M}_m}$ è una misura su X .

Inoltre lo spazio di misura (E, \mathcal{M}_m, m) è completo

Teorema 8.3. Sia (X, \mathcal{E}, m) uno spazio di misura.

$$m^*(E) = \inf \{m(F) : F \in \mathcal{E}, E \subseteq F\}$$

è la misura esterna generata da m , inoltre $m_{\mathcal{E}}^* = m$

Osservazione 44. Se (X, \mathcal{E}, m) è uno spazio di misura allora $(X, \mathcal{M}_{m^*}, m^*)$ è uno spazio di misura completo che estende (X, \mathcal{E}, m) . m^* si dice **completamento** di m

8.4 Misura di Lebesgue

Definizione 8.10. Un **rettangolo** in \mathbb{R}^n è un sottoinsieme della forma

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \text{ con } a_i < b_i$$

Un **plurirettangolo infinito** è un insieme della forma

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \text{ dove } R_j \text{ rettangoli con } R_i \cap R_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

Definiamo la **misura esterna di Lebesgue** nel seguente modo

- Se R è un rettangolo (come sopra) allora

$$m^*(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

- Se P è un plurirettangolo (come sopra) allora

$$m^*(P) = \sum_j m^*(R_j)$$

- Se E è un insieme generico allora

$$m^*(E) = \inf \{m^*(P) : E \subseteq P \text{ plurirettangolo}\}$$

Denotiamo con $M(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{m^*}$ la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e con $\mathcal{L} = m^*_{|M(\mathbb{R}^n)}$ la misura di Lebesgue. In particolare tale misura è completa per l'osservazione 44 *Osservazione* 45. La misura di Lebesgue è una misura di Borel: possiamo scrivere ogni aperto come plurirettangolo

Osservazione 46. Esistono insiemi misurabili secondo Lebesgue che non appartengono alla σ -algebra dei boreliani di \mathbb{R}^n .

Infatti l'insieme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ha cardinalità del continuo (corso di E.T.I.) mentre $M(\mathbb{R})$ ha cardinalità 2^c (essendo \mathcal{L} completa, sono misurabili tutti i sottoinsiemi dell'insieme di Cantor (che ha misura nulla e cardinalità del continuo))

Osservazione 47 (Insieme di Vitali). Mostriamo che $M(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Definiamo su \mathbb{R} la relazione di equivalenza \sim dove

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Sia $E \subseteq [0, 1]$ un insieme che contiene un solo rappresentante per classe di equivalenza (A.C.). Definiamo

$$F = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} E + q$$

Ora $F \subseteq [-1, 2]$ è unione disgiunta disgiunta.
 Supponiamo per assurdo E misurabile. Ora F è misurabile con

$$1 \leq \mathcal{L}(F) \leq 3$$

ma

$$\mathcal{L}(F) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \mathcal{L}(E)$$

il che è assurdo

8.4.1 Una definizione “più costruttiva”

Proposizione 8.4. *Se E è Lebesgue-misurabile allora*

$$(a) \quad m(E) = \inf \{m(A) : A \text{ aperto con } E \subseteq A\}$$

$$(b) \quad m(E) = \sup \{m(K) : K \text{ compatto con } K \subseteq E\}$$

in particolare E limitato è misurabile se e solo se

$$\forall \varepsilon \quad \exists K_\varepsilon \text{ compatto, } \exists A_\varepsilon \text{ aperto} \quad K_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon \quad m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) < \varepsilon$$

Dimostrazione. (a) Dalla definizione di misura di Lebesgue

$$m(E) = \inf \{m(P) : P \text{ plurirettangolo infinito } E \subseteq P\}$$

$\forall \varepsilon$ sia

$$P_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \text{ dove } R_j = \prod_{k=1}^n [a_{j,k}, b_{j,k}]$$

tale che

$$m(P_\varepsilon) \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Definiamo l'aperto

$$A_\varepsilon = \bigcup R_{j,\varepsilon} \text{ dove } R_{j,\varepsilon} = \prod_{k=1}^n (a_{j,k} - \delta_j, b_{j,k} + \delta_j)$$

dove δ_j sono tali che $m(R_{j,\varepsilon}) = m(R_j) + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Abbiamo $E \subseteq P_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$ da cui

$$m(E) \leq m(A_\varepsilon) \leq \sum_j m(R_{j,\varepsilon}) = \sum_j m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{4} \sum_j \frac{1}{2^{j+1}} \leq m(E) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = m(E) + \varepsilon$$

(b) Sia E limitato. Fissato $\varepsilon > 0$. Per il punto (a) esiste un aperto $A_\varepsilon \supseteq \overline{E} \setminus E$ con

$$m(A_\varepsilon) < m(\overline{E} \setminus E) + \varepsilon$$

Sia $K_\varepsilon = \overline{E} \setminus A_\varepsilon = E \setminus A_\varepsilon$. Ora K_ε è compatto (chiuso e limitato) e vale

$$\begin{aligned} m(K_\varepsilon) &= m(E \setminus A_\varepsilon) = m(E) - m(E \cap A_\varepsilon) = m(E) - m(A_\varepsilon) + m(A_\varepsilon \setminus E) \geq \\ &\geq m(E) - m(A_\varepsilon) + m(\overline{E} \setminus E) > m(E) - \varepsilon \end{aligned}$$

Se E è illimitato considero $E \cap B_{R_\varepsilon}$ dove R_ε è tale che $m(E \cap B_{R_\varepsilon}) \geq m(E) - \varepsilon$

Diamo ora una definizione differente della misura di Lebesgue

Definizione 8.11.

- Se $R = \prod_{k=1}^n [a_k, b_k]$ è un rettangolo poniamo

$$m(R) = \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$$

- Se $P = \bigcup_{j=1}^N R_j$ (con R_j rettangoli e $R_i^\circ \cap R_j^\circ = \emptyset$ se $i \neq j$) poniamo

$$m(P) = \sum_{j=1}^N m(R_j)$$

- Se A è aperto poniamo

$$m(A) = \sup \{m(P) : P \subseteq A \text{ con } P \text{ plurirettangolo}\}$$

- Se K è compatto poniamo

$$m(K) = \inf \{m(P) : K \subseteq P \text{ con } P \text{ plurirettangolo}\}$$

- Sia E generico allora poniamo

$$m^*(E) = \inf \{m(A) : E \subseteq A \text{ con } A \text{ aperto}\}$$

$$m_*(E) = \sup \{m(K) : K \subseteq E \text{ con } K \text{ compatto}\}$$

diciamo che E è misurabile se e solo se $m_*(E) = m^*(E)$

Proposizione 8.5. *Le due costruzioni di misura di Lebesgue proposte sono equivalenti*

Osservazione 48. Per costruzione la misura di Lebesgue è invariante per traslazioni, riflessioni e rotazioni

8.5 Funzioni misurabili

Definizione 8.12. Siano (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) spazi misurabili. Una funzione $f : X \rightarrow Y$ si dice **misurabile** se

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

Definizione 8.13. Sia (X, \mathcal{A}) uno spazio misurabile. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** se

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ di Borel}$$

Osservazione 49. È sufficiente verificare la condizione su ogni aperto o sulle semirette $(a, +\infty)$. In particolare, se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua è misurabile secondo Lebesgue

Definizione 8.14. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **boreliana** se $f^{-1}(A)$ è di Borel per ogni A di Borel

Osservazione 50.

$$f \text{ boreliana} \quad \Rightarrow \quad f \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

Osservazione 51. Il viceversa in generale non vale.

Sia N un insieme di misura nulla, ma non di Borel (e.g. un sottoinsieme dell'insieme di Cantor). Consideriamo la funzione indicatrice

$$\chi_N(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in N \\ 0 & \text{se } x \notin N \end{cases}$$

allora $f^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty)) = N$ che è misurabile secondo Lebesgue ma non di Borel

Osservazione 52. Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ misurabile ma non di Borel con $f^{-1}(E)$ non misurabile

Teorema 8.6. Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio di misura. Sia

$$\mathcal{M} = \{f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : f \text{ misurabile}\}$$

Allora valgono le seguenti proprietà

- Se $f, g \in \mathcal{M}$ allora $f \pm g \in \mathcal{M}$
- Se $f \in \mathcal{M}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda f \in \mathcal{M}$
- Se $f, g \in \mathcal{M}$ allora $f \cdot g \in \mathcal{M}$, inoltre se $g \neq 0$ anche $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}$
- Se $\{f_n\} \subseteq \mathcal{M}$ allora $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n \in \mathcal{M}$.
In particolare se $\lim_n f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora $f \in \mathcal{M}$

Dimostrazione. Osserviamo che la preimmagine di una funzione è stabile per unioni ed intersezioni numerabili dunque per mostrare che $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è misurabile basta dimostrare che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $f^{-1}((a, +\infty)) \in \mathcal{A}$

- Possiamo scrivere

$$\{f + g > c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f > q\} \cap \{g > c - q\}$$

Ora per ogni razionale si ha $\{f > q\}, \{g > c - q\} \in \mathcal{A}$ da cui $\{f + g > c\} \in \mathcal{A}$

- Per mostrare che il prodotto di misurabili è misurabile, è sufficiente provare che il quadrato lo è infatti

$$fg = \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4}$$

Ora

$$\{f^2 > c\} = \begin{cases} X & \text{se } c < 0 \\ \{f > \sqrt{c}\} \cup \{f < -\sqrt{c}\} & \end{cases} \in \mathcal{A}$$

- Sia $g \neq 0$ allora $\left\{\frac{1}{g} > c\right\} = \left\{g < \frac{1}{c}\right\} \in \mathcal{A}$ per ogni $c \neq 0$

•

$$\left\{\inf_n f_n < c\right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n < c\} \in \mathcal{A}$$

infatti se $\inf_n f_n(x) < c$ allora per ogni n vale $f_n(x) < c$. Viceversa se esiste n con $f_n < c$ allora $\inf_n f_n < c$

8.6 Integrazione rispetto a misure

In questa sezione considereremo uno generico spazio di misura (X, \mathcal{A}, μ)

Definizione 8.15. Se s è una funzione **semplice** ovvero

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i} \text{ dove } A_i \in \mathcal{A} \text{ e } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

allora definiamo il suo integrale rispetto alla misura μ come

$$\int_X s(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N c_i \mu(A_i)$$

Se $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ è una generica funzione misurabile, il suo integrale rispetto alla misura μ è

$$\int_X f d\mu(x) = \sup_{\substack{s \leq f \\ s \text{ semplice}}} \int_X s(x) d\mu(x) \in [0, +\infty]$$

Se $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile, diremo che è **integrabile** se

$$\int_X |f| d\mu \leq \infty$$

e in tal caso poniamo

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

Osservazione 53.

Osservazione 54. La definizione data per funzioni misurabili di segno qualsiasi è una buona definizione. Se f è misurabile allora anche $|f|$, f^+ e f^- lo sono. (inoltre sono positive).

Ora

$$\int |f| = \int f^+ + \int f^- < \infty$$

dunque i due integrali sono finiti perciò è ben definita la loro differenza

Definizione 8.16. Sia $E \subseteq X$ con $E \in \mathcal{A}$ allora definiamo

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_X f(x) \cdot \chi_E(x) d\mu(x)$$

Osservazione 55. La definizione precedente è una buona definizione infatti il prodotto di misurabili è misurabile

Teorema 8.7 (Alcune proprietà dell'integrale).

Siano $f, g \in \mathcal{M}$ con $f, g : X \rightarrow [0, +\infty]$.

- *Additività*

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

- *Per ogni numero reale $c > 0$ vale*

$$\int_X (cf) \, d\mu = c \int_X f \, d\mu$$

- *Additività rispetto al dominio. Siano $A, B \in \mathcal{A}$ disgiunti allora*

$$\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$$

- *Monotonia.*

$$f \leq g \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$$

Osservazione 56. Sia f una funzione positiva

$$f = 0 \text{ quasi ovunque} \quad \Leftrightarrow \quad \int_X f \, d\mu = 0$$

inoltre

$$\mu(\{f = \infty\}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_X f \, d\mu = +\infty$$

8.6.1 Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale

Teorema 8.8 (Convergenza monotona o di Beppo Levi).

Siano (f_n) una successione crescente di funzioni misurabili con $f_n : X \rightarrow [0, +\infty]$. Allora

$$\int_X \left(\lim_n f_n \right) d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Dimostrazione. Sia $f = \lim_n f_n$ allora per un teorema f è misurabile. Poichè per ogni n vale $f \geq f_n$ al ora

$$\int_X f d\mu \geq \lim_n \int_X f_n d\mu$$

Per l'altra disuguaglianza è sufficiente mostrare che per s funzione semplice con $s \leq f$ si ha

$$\sup_n \int_X f_n \geq \int_X s \tag{3}$$

Poichè s è una funzione semplice

$$s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{A_i} \text{ dove } A_i \in \mathcal{A} \text{ e } i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

Poniamo $c_0 = 0$ e $A_0 = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)^c$ allora per additività del dominio

$$\int_X f_n = \sum_{i=0}^N \int_{A_i} f_n$$

ovvero per provare 3 è sufficiente mostrare che $\forall i = 1, \dots, N$ vale

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq c_i \mu(A_i)$$

ovvero basta provare che $\forall i, \forall \varepsilon > 0$ si ha

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq (c_i - \varepsilon) \mu(A_i)$$

Fissato i, ε si ha

$$A_i = \bigcup_n F_n \text{ dove } F_n = \{x \in A_i : f_n > c_i - \varepsilon\}$$

infatti sia $x \in A_i$ allora dal fatto che $s(x) \leq f(x)$ si ha $c_i = s(x) \leq \sup f_n(x)$ ovvero esiste n tale che $f_n(x) > c_i - \varepsilon$.

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq \sup_n \int_{F_n} f_n \geq \sup_n ((c_i - \varepsilon) \mu(F_n)) = (c_i - \varepsilon) \lim_n \mu(F_n)$$

Ora gli F_n sono inscatolati (perchè $f_n \uparrow f$) dunque $\mu(A_i) = \lim_n \mu(F_n)$ da cui la tesi □

Lemma 8.9 (di Fatou).

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni misurabili e non negative. Allora

$$\liminf_n \int_X f_n \geq \int_X \liminf f_n$$

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\liminf f_n = \sup_n g_n \text{ dove } g_n = \inf_{k \geq n} f_k$$

Dunque

$$\forall k \geq n \quad f_k \geq g_n \quad \Rightarrow \quad \forall k \geq n \quad \int_X f_k \geq \int_X g_n \quad \Rightarrow \quad \inf_{k \geq n} \int_X f_k \geq \int_X g_n$$

Se calcoliamo l'estremo inferiore ad entrambi i membri dell'ultima disuguaglianza otteniamo

$$\liminf_n \int_X f_n \geq \sup_n \int_X g_n$$

Osserviamo che (g_n) è una successione crescente di funzioni dunque per Beppo Levi otteniamo

$$\sup_n \int_X g_n = \int_X \sup g_n = \int_X \liminf f_n$$

□

Osservazione 57. In generale, sotto le ipotesi del lemma, non vale l'uguaglianza.

Consideriamo la funzione

$$f_n = \begin{cases} n & \text{se } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che $f_n(x) \rightarrow 0$ mentre $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ dunque

$$1 = \inf_n \int_{\mathbb{R}} f_n > \int_{\mathbb{R}} \inf_n f_n = 0$$

Teorema 8.10 (di convergenza dominata AKA di Lebesgue).

Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni misurabili. Supponiamo che

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$ per quasi ogni x
- $\exists g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrabile tale che $|f_n| \leq g$

Allora

$$\lim_n \int_X |f_n - f| = 0 \text{ cioè } f_n \rightarrow f \text{ in } L^1$$

e in particolare

$$\lim_n \int_X f_n = \int_X f$$

Dimostrazione. Osserviamo che $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$ dunque $2g - |f_n - f| \geq 0$. Applicando il lemma di Fatou otteniamo

$$2 \int_X g = \int_X \liminf (2g - |f_n - f|) \leq \liminf \int_X (2g - |f_n - f|) = \int_X 2g - \limsup \int_X |f_n - f|$$

Ovvero

$$\limsup_n \int_X |f_n - f| \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$$

infatti $|f_n - f| \geq 0$.

Dunque

$$\left| \int_X f_n - \int_X f \right| = \left| \int_X (f_n - f) \right| \leq \int_X |f_n - f| \rightarrow 0$$

da cui $\int_X f_n \rightarrow \int_X f$

□

Teorema 8.11 (di derivazione sotto il segno di integrale). Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- f misurabile
- $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile per ogni t ovvero

$$\exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) \, dx$$

- $f(\cdot, x)$ continua in t per quasi ogni x
- $\exists g(x)$ integrabile tale che $|f(t, x)| \leq g(x)$

Allora F è continua

Se inoltre $f(\cdot, x)$ è derivabile in t per quasi ogni x ed $\exists h$ integrabile tale che $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq h$ allora

$$F \text{ derivabile con } F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, dx$$

Dimostrazione. Mostriamo che F è continua in t (fissato). Sia $t_n \rightarrow t$

$$\lim_n F(t_n) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} f(t_n, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_n f(t_n, x) \, dx$$

dove abbiamo usato la convergenza dominata.

Essendo f continua in t per quasi ogni x si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_n f(t_n, x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x) \, dx = F(t)$$

Mostriamo ora (sotto ipotesi più forti) che F è derivabile in t (fissato). Sia $t_n \rightarrow t$ con $t_n \neq t$

$$\lim_n \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \, dx$$

Ora per quasi ogni x vale

$$\left| \frac{f(t_n, x) - f(t, x)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\xi_n, x) \right| \leq h(x)$$

dove abbiamo usato il teorema di Lagrange.

Si conclude per convergenza dominata □

Proposizione 8.12 (Assoluta continuità dell'integrale).

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile con $\int_A |f| \leq \infty$.

Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall E \subseteq A \quad |E| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_E |f| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo

$$\exists \bar{\varepsilon} \quad \exists (E_n)_n \quad |E_n| < \frac{1}{2^n} \text{ e } \int_{E_n} |f| \geq \bar{\varepsilon}$$

Allora

$$F_n = \bigcup_{k \geq n+1} E_k \quad \Rightarrow \quad |F_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \leq \frac{1}{2^n}$$

mentre

$$\int_{F_n} |f| = \int_A |f| \chi_{F_n} \geq \varepsilon$$

Sia $F = \bigcap F_n$, posto $g_n = |f| \chi_{F_n}$ otteniamo

$$g_n(x) \rightarrow |f(x)| \chi_F(x)$$

e tale convergenza è dominata da $|f|$ che è integrabile dunque

$$\int_A |f| \chi_F \geq \varepsilon$$

il che è assurdo poichè F ha misura nulla

8.7 Spazi prodotti e misura prodotto

Definizione 8.17. Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (B, \mathcal{B}, ν) spazio di misura. Definiamo su $X \times Y$ la σ -algebra prodotto

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{E \times F : E \in \mathcal{A}, F \in \mathcal{B}\})$$

Consideriamo tale insieme munito di una **misura prodotto** $\mu \otimes \nu$ tale che

$$(\mu \otimes \nu)(E \times F) = \mu(E)\nu(F) \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \forall F \in \mathcal{B}$$

Osservazione 58. La misura prodotto, in generale, non è unica.

Osservazione 59 (Una costruzione "canonica" della misura prodotto).

Sia

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i \quad E_i \in \mathcal{A} \quad F_i \in \mathcal{B} \quad (E_i \times F_i) \cap (E_j \times F_j) = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

Poniamo

$$(\mu \otimes \nu)(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\nu(F_i)$$

e

$$(\mu \otimes \nu)^*(A) = \inf \left\{ (\mu \otimes \nu)(G) : A \subseteq G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i \right\}$$

Tale misura è una misura esterna tale che la sua σ -algebra dei misurabili \mathcal{M} contiene $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Allora

$$(\mu \otimes \nu)_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}^*$$

è una misura prodotto

Proposizione 8.13. Se μ, ν sono misure σ -finite, la misura prodotto è unica

Osservazione 60. Se poniamo \mathcal{L}^k la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^k Allora

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^{n-m}$$

Ora $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-m})$ ma $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \supsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-m})$ infatti se prendiamo E con $\mathcal{L}^m(E) = 0$ e $F \subset \mathbb{R}^n$ non misurabile. $E \times F \notin \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-m})$

Definizione 8.18. Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura.

- Se $E \subseteq X \times Y$ e $x \in X$ definiamo la **sezione** di E in x

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\} \subseteq Y$$

Una simile definizione si ha per $y \in Y$

- Se $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile e $x \in X$ definiamo la sezione di f in x come

$$f_x : Y \rightarrow \mathbb{R} \quad f_x(y) = f(x, y)$$

Una simile definizione si ha per $y \in Y$

Proposizione 8.14. Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura.

$$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad E_x \in \mathcal{B} \quad \forall x \in X$$

Dimostrazione. Basta osservare che gli insiemi che soddisfano la proprietà sono una σ -algebra e osservando che i rettangoli misurabili soddisfano la proprietà

Proposizione 8.15.

$$f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} \quad \Rightarrow \quad f_x \text{ misurabile} \quad \forall x \in X$$

Proposizione 8.16. Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura σ -finiti.

Sia $E \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ allora le funzioni

$$x \rightarrow \nu(E_x) \quad y \rightarrow \mu(E^y)$$

sono misurabili e si ha

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) \, d\mu = \int_Y \mu(E^y) \, d\nu$$

equivalentemente

$$\int_E d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_{E_x} d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_{E^y} d\mu \right) d\nu$$

Dimostrazione. Supponiamo, inizialmente che le misure siano finite. Mostriamo che

$$\mathcal{P} = \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E \text{ verifica la tesi}\}$$

è una σ -algebra che contiene i rettangoli misurabili. Infatti

- \mathcal{P} contiene i rettangoli (per definizione di misura prodotto)
- \mathcal{P} è stabile per unioni finite
- \mathcal{P} è stabile per unioni numerabili crescenti (si usa Beppo Levi)
- \mathcal{P} è stabile per passaggio al complementare (qui si usa l'ipotesi di finitezza)

La seconda e terza proprietà garantiscono che \mathcal{P} contenga le unioni numerabili.

Se $(A_n)_n$, poniamo $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Ora $\bigcup B_n$ è un'unione crescente e coincide con $\bigcup A_n$.

Andiamo a considerare il caso μ, ν misure σ -finite.

Dalla definizione, esistono $(X_n)_n, (Y_n)_n$ tali che

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \mu(X_n) < \infty \quad Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \quad \nu(Y_n) < \infty$$

senza perdita di generalità suppongo tali insiemi inscatolati.

Ora

$$X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \times Y_n$$

Sia $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ allora

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \lim_n (\mu \otimes \nu)(E \cap (X_n \times Y_n)) = \lim_n \int_{X_n} \nu(E_x \cap Y_n) = \int_{X_n} \nu(E_x)$$

dove l'ultima disuguaglianza si ha per convergenza monotona

Osservazione 61. Nella dimostrazione della proposizione la restrizione a misure finite è necessaria.

Sia $(X, \mu) = ([0, 1], \mathcal{L})$ e $(Y, \nu) = ([0, 1], \nu)$ dove ν è la misura che conta i punti.

Consideriamo $E = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$ allora

$$\int_0^1 \int_0^1 E_x d\nu d\mu = \int_0^1 d\mu = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^1 E^y d\mu d\nu = \int_0^1 0 d\nu = 0$$

Inoltre $(\mu \otimes \nu)(E) = +\infty$

Teorema 8.17 (di Fubini-Tonelli). *Siano (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) spazi di misura.*

$$f \in L^1(X \times Y) \quad \Rightarrow \quad f_x \in L^1(Y) \text{ per quasi ogni } x \in X$$

similmente per f^y .

Inoltre si ha

$$x \rightarrow \int_Y f_x d\nu \in L^1(X) \quad y \rightarrow \int_X f^y d\mu \in L^1(Y)$$

In particolare vale la seguente formula

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f_x d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f^y d\mu \right) d\nu$$

Dimostrazione. Distinguiamo vari casi

- Se $f = \chi_E$ con $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ è la proposizione precedente
- Se $f = s$ è semplice, la tesi segue per linearità dell'integrale e dal punto precedente
- Se $f \geq 0$ allora $f \uparrow s_n$ semplici e la tesi segue per Beppo Levi (non serve che $\int f < \infty$)
- In generale si decompone f in $f^+ - f^-$

Corollario 8.18.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ misurabile} \quad \Leftrightarrow \quad S_f = \{(x, t) : t < f(x)\} \text{ misurabile}$$

Dimostrazione. \Leftarrow Per Fubini-Tonelli, S_f è misurabile se $\{f > t\}$ è misurabile per $\forall t$.
Dato $t \in \mathbb{R}$, sia $t_k \downarrow t$ con $\{f > t_k\}$ misurabili.

Allora

$$\{f > t\} = \bigcup_k \{f > t_k\}$$

abbiamo $\{f > t\}$ misurabile dunque anche f lo è
 \Rightarrow Consideriamo il caso f semplice ovvero

$$f = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i} \quad c_i \in \mathbb{R} \quad E_i \text{ misurabili}$$

allora

$$S_f = \bigcup_i E_i \times (-\infty, c_i)$$

dunque è misurabile

9 Integrali multipli

9.1 Cambiamento di variabili negli integrali multipli

Definizione 9.1. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti.

Un'applicazione

$$\Phi : A \rightarrow B$$

si dice **diffeomorfismo** se

- Φ è invertibile
- ϕ e Φ^{-1} sono invertibili

Osservazione 62. Abbiamo visto che se $x_0 \in A$ e $y_0 = \Phi(x_0)$ allora

$$D\Phi^{-1}(y_0) = (D\Phi(x_0))^{-1}$$

intesa come inversa di matrici.

Dunque ponendo

$$J_\Phi(x) = \det D\phi(x)$$

la seconda proprietà equivale a richiedere $J_\phi(x) \neq 0$ per ogni x

In questa sezione andremo a dimostrare

Teorema 9.1. *Sia Φ un diffeomorfismo*

$$E \subseteq A \text{ misurabile} \quad \Rightarrow \quad \Phi(E) \subseteq B \text{ misurabile}$$

e in tal caso si ha

$$|\Phi(E)| = \int_E |J_\Phi(x)| \, dx$$

dove il primo $|\cdot|$ indica la misura di Lebesgue n -dimensionale

Teorema 9.2.

$$f \text{ misurabile} \quad \Rightarrow \quad f \circ \Phi \text{ misurabile}$$

$$f \text{ integrabile} \quad \Rightarrow \quad f \circ \Phi \text{ integrabile}$$

e si ha

$$\int_B f \, dy = \int_A (f \circ \Phi)(x) \cdot |J_\phi(x)| \, dx$$

Dimostrazione. La dimostrazione è stata accennata, si rimanda al libro di testo consigliato

Osservazione 63. Una volta dimostrato il secondo teorema, il primo segue ponendo $f = \chi_E$

9.2 Alcuni cambi notevoli

9.2.1 Coordinate polari

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \quad \Phi \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

è un diffeomorfismo C^∞ inoltre

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \text{ tale che } \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Osserviamo che

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} \quad |J_\Phi| = \rho$$

Osservazione 64.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) = \iint_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

Esempio 9.3 (Palla in \mathbb{R}^2).

$$|B(0, R)| = \iint_{\mathbb{R}^2} \chi_{B(0, R)} = \iint_{[0, +\infty) \times [0, 2\pi)} \chi_{[0, R] \times [0, 2\pi)}(\rho, \theta) \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho \, d\rho = \pi R^2$$

Osservazione 65. Se f è radiale: il valore di f in un punto dipende solo dalla sua distanza dall'origine ovvero

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

allora con le coordinate polari otteniamo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f \, dx \, dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho g(\rho) \, d\rho$$

Esempio 9.4.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \pi \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} 2\rho \, d\rho = \pi \left[-e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=+\infty} = \pi$$

Grazie a Fubini-Tonelli (uguale rosso) otteniamo, inoltre

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dx \, dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right)^2 = \pi$$

dunque

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

9.2.2 Coordinate cilindriche

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Con un semplice calcolo si prova che $J_\Phi = \rho$

Esempio 9.5 (Solido di rotazione). *Sia*

$$D = \{(x, z) : 0 \leq x \leq g(z)\}$$

e E il solido ottenuto dalla rotazione di D attorno all'asse z ovvero

$$E = \{(x, y, z) : 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq g(z)\}$$

allora

$$\begin{aligned} |E| &= \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi_E \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq g(z)\}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} dz \int_0^{g(z)} \rho \, d\rho = \pi \int_{\mathbb{R}} g^2 z \, dz = \int_{\mathbb{R}} |E_z| \, dz \end{aligned}$$

9.2.3 Coordinate sferiche

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi(\rho, \theta, \varphi) \rightarrow (x, y, z)$$

dove

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

In tal caso

$$D\Phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} \quad |J_\Phi| = \rho^2 \sin \varphi$$

Esempio 9.6 (Palla in \mathbb{R}^3).

$$|B(0, R)| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R \rho^2 \sin \varphi \, d\rho = 2\pi \left(\int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^R \rho^2 \, d\rho \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

9.2.4 Trasformazione lineare

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \Phi \begin{cases} x = aX \\ y = bY \\ z = cZ \end{cases}$$

Allora

$$D\Phi = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix} \quad |J_\Phi| = |abc|$$

Esempio 9.7 (Area ellissoide). *Sia*

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

$$|E| = \frac{4abc}{3} \pi$$

10 Serie di Fourier

Definizione 10.1. Denotiamo con $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{C} e T -periodiche. Ovvero

$$C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{u \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : u(t+T) = u(t) \forall t \in \mathbb{R}, T > 0\}$$

e su tale spazio consideriamo la norma

$$\|u\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2 dt$$

Osservazione 66. Useremo sempre $T = 2\pi$ e faremo sempre i conti solo con questo. Da qui in poi userò come notazione $C_{2\pi}$ oppure $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ al posto della scrittura estesa (prendetevela col professore).

Osservazione 67. La norma 2 è indotta dal prodotto Hermitiano

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{v(t)} dt$$

dove $\overline{v(t)}$ denota il coniugato di $v(t)$.

Osservazione 68. Lo spazio $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_2)$ non è uno spazio completo. Consideriamo la successione $\{u_n(t)\}_n$ tali che

$$u_n(t) = \sqrt[2n+1]{\sin(t)}$$

allora è una successione di Cauchy che non ammette limite (infatti il limite puntuale non è una funzione continua)

Proposizione 10.1. Posto $e_k(t) = e^{ikt}$ per $k \in \mathbb{Z}$ abbiamo che $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale (per il prodotto Hermitiano sopra definito)

Dimostrazione.

$$\langle e_k, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} \overline{e^{iht}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{kh}$$

□

Ricordiamo che

Definizione 10.2. u si dice a quadrato integrabile, ovvero $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ se vale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |u|^2 dt < +\infty$$

Definisco dunque $V_n := \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_k | k \in \mathbb{Z}, |k| \leq n\}$, ho che $\dim_{\mathbb{C}} V_n = 2n + 1$.

Proposizione 10.2. Sia $u \in L^2_{\mathbb{C}}(-\pi, \pi)$ la funzione $v \in V_n$ che minimizza $\|u - v\|_2$ è della forma

$$v_t = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k e_k(t) \text{ con } \lambda_h = \hat{u}_h = \langle u, e_h \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{-ht} dt$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|u - v\|_2^2 &= \left\langle u - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k e_k, u - \sum_{|h| \leq n} \lambda_h e_h \right\rangle = \\ &= \langle u, u \rangle + \sum_{\substack{|k| \leq n \\ |h| \leq n}} \lambda_k \bar{\lambda}_h \langle e_k, e_h \rangle - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \langle e_k, u \rangle - \sum_{|h| \leq n} \lambda_h \langle u, e_h \rangle \end{aligned}$$

Ora ricordando le proprietà dei prodotti Hermitiani ho $\bar{\hat{u}}_k = \langle e_k, u \rangle$ da cui sostituendo:

$$\begin{aligned} \|u - v\|_2^2 &= \langle u, u \rangle + \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \bar{\lambda}_k - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \bar{\hat{u}}_k - \sum_{|k| \leq n} \bar{\lambda}_k \hat{u}_k = \\ &= \langle u, u \rangle + \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \bar{\lambda}_k - \sum_{|k| \leq n} \lambda_k \bar{\hat{u}}_k - \sum_{|k| \leq n} \bar{\lambda}_k \hat{u}_k + \sum_{|k| \leq n} \hat{u}_k \bar{\hat{u}}_k - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 = \\ &= \langle u, u \rangle + \sum_{|k| \leq n} [\lambda_k \bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_k \hat{u}_k - \lambda_k \bar{\hat{u}}_k + \hat{u}_k \bar{\hat{u}}_k] - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 = \\ &= \|u\|_2^2 + \sum_{|k| \leq n} (\lambda_k - \hat{u}_k) (\bar{\lambda}_k - \bar{\hat{u}}_k) - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 = \|u\|_2^2 + \sum_{|k| \leq n} |\lambda_k - \hat{u}_k|^2 - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \end{aligned}$$

Per realizzare il minimo deve essere $\lambda_k = \hat{u}_k$ per ogni intero k con $|k| \leq n$. \square

Definizione 10.3. La funzione v che minimizza $\|u - v\|_2$ prende il nome di **n -esima somma parziale della serie di Fourier** di u e si denota con $s_n u$.

Osservazione 69. La proposizione precedente, dunque, diventa

$$s_n u = \sum_{|k| \leq n} \hat{u}_k e_k$$

ed inoltre ho

$$\|u - v\|_2^2 \geq \|u - s_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \quad \forall v \in V_n$$

Da quanto detto segue il seguente

Corollario 10.3 (Disuguaglianza di Bessel).

$$u \in L^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 \leq \|u\|_2^2$$

Dimostrazione. La tesi segue osservando che

$$0 \leq \|u - s_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2$$

\square

10.1 Sviluppo di Fourier in seni e coseni

Apriamo una parentesi sul modo di rappresentare la serie di Fourier nel caso in cui $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (funzione a valori reali). In questo caso, per i calcoli, risulta più comodo passare dalla forma esponenziale a quella trigonometrica.

Useremo la base

$$\{\cos(kx) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\sin(kx) : k \in \mathbb{N}_{>0}\}$$

. La serie di Fourier che vogliamo ottenere sarà di questa forma:

Proposizione 10.4. *Sia $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ a valori reali. Allora*

$$S_u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(kt) dt \quad \forall k \geq 0 \quad e \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(kt) dt \quad \forall k \geq 1$$

Dimostrazione. Se $k > 0$ allora

$$\begin{aligned} \hat{u}_k e^{ikx} + \hat{u}_{-k} e^{-ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) [e^{-ikt} e^{ikx} + e^{ikt} e^{-ikx}] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) [e^{ik(x-t)} + e^{-ik(x-t)}] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) 2 \cos(k(x-t)) dt \end{aligned}$$

Usando le formule di sottrazione per coseno otteniamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(kt) dt \cdot \cos(kx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(kt) dt \cdot \sin(kx)$$

Notiamo che $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) dt = 2u_0$ da cui la tesi □

Osservazione 70. Se $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica ed L^1 (in modo che sia sviluppabile), allora:

$$u \text{ pari} \Leftrightarrow b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$$

$$u \text{ dispari} \Leftrightarrow a_k = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

chiediamo ora: $s_n u$ converge a u in qualche senso?

In generale, per $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $s_n u$ NON converge puntualmente a u .

Teorema 10.5. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ è denso in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

Ovvero

$$\forall u \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \quad \|u - v\|_\infty < \varepsilon$$

Dimostrazione. La dimostrazione viene fornita nel Corollario 10.17

Proposizione 10.6.

$$u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad s_n u \rightarrow u \text{ in } L^2 \text{ ovvero } \|s_n u - u\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dimostrazione. Siano $u \in C_{2\pi}$ e $\varepsilon > 0$ fissati.

Per il teorema precedente: $\exists v \in V_{n_0}$ tale che $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$.

Se $n \geq n_0$ allora $v \in V_n$ e quindi

$$\|u - s_n u\|_2^2 \leq \|u - v\|_2^2 \leq \|u - v\|_\infty^2 \leq \varepsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \|u - s_n u\|_2 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

□

Da questa proposizione discende

Corollario 10.7 (Uguaglianza di Parseval).

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2$$

Dimostrazione. Basta considerare $\sum_{|k| \leq n} |\hat{u}_k|^2 + \|u - s_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2$ per $n \rightarrow +\infty$.

Lemma 10.8.

$$f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad (f')_k = ik \hat{f}_k$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \stackrel{\text{Per Parti}}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[f(t) \frac{1}{-ik} e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{1}{-ik} e^{-ikt} dt = \frac{1}{ik} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{ik} (f')_k \end{aligned}$$

□

Proposizione 10.9.

$$f \in C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad \Rightarrow \quad s_n f \rightarrow f \text{ totalmente su } \mathbb{R}$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $s_n f$ converge totalmente.

Scegliamo come M_k (nella definizione di totale convergenza) proprio $|\hat{f}_k|$, in quanto

$$\left\| \hat{f}_k e_k \right\|_{\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \hat{f}_k e^{ikx} \right| \leq \left| \hat{f}_k \right|.$$

Ora basta vedere che $\lim_n \sum_{|k| \leq n} \left| \hat{f}_k \right| < +\infty$

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq n} \left| \hat{f}_k \right| &= \left| \hat{f}_0 \right| + \sum_{0 < |k| \leq n} \left| \hat{f}_k \right| \stackrel{\text{lemma}}{=} \left| \hat{f}_0 \right| + \sum_{0 < |k| \leq n} \frac{1}{|k|} \left| (f^{\hat{)}}_k \right| \stackrel{\text{Cauchy-Sch.}}{\leq} \\ &\leq \left| \hat{f}_0 \right| + \left(\sum_{0 < |k| \leq n} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{0 < |k| \leq n} \left| (f^{\hat{)}}_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ora applicando la disuguaglianza di Bessel a $f' \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ otteniamo

$$\left(\sum_{0 < |k| \leq n} \left| (f^{\hat{)}}_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|f'\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

Quest'ultima non dipende da n . Dunque ho che

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}_k \right| \leq \left| \hat{f}_0 \right| + C \|f'\|_2 \quad \text{dove } C = \left(2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k(x)$ per def. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n f(x)$ converge quindi totalmente, e di conseguenza uniformemente, a una certa \tilde{f} , ma $\tilde{f} = f$ perché la serie converge tramite norma in L^2 ad f (per unicità del limite). \square

Abbiamo quindi appena dimostrato, grazie anche al risultato sulla norma, che effettivamente il limite delle somme parziali di Fourier di f , che corrisponde alla serie di Fourier di f , corrisponde anche ad f stessa e converge ad essa uniformemente quando f è C^1 e 2π -periodica. La differenza significativa è stata data dall'essere C^1 , infatti senza tale condizione non potremmo garantire nemmeno la convergenza puntuale, come detto prima. TUTTAVIA bastano ipotesi più deboli, quantomeno per avere la convergenza puntuale a meno di "alcuni punti", come vedremo ora per la regolarità a tratti.

Definizione 10.4. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è **regolare a tratti** se:

- f è continua in tutti i punti ad eccezione di $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$
- f è $C^1(x_1, x_{i+1})$ con derivata che ammette limite al bordo

Definizione 10.5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ è regolare a tratti se lo è su tutti gli intervalli chiusi e limitati.

Definizione 10.6. Il **nucleo di Dirichlet** è la famiglia di funzioni definite come

$$D_n(x) := \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}$$

Proposizione 10.10. La somma parziale $(s_n f)(x)$ è uguale alla convoluzione di D_n con f valutata in x .

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (s_n f)(x) &= \sum_{|k| \leq n} \langle f, e_k \rangle e_k(x) = \sum_{|k| \leq n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right] e^{ikx} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = (D_n * f)(x). \end{aligned}$$

□

Proposizione 10.11 (Proprietà del nucleo di Dirichlet).

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \forall x \neq 0 \pmod{2\pi}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{-inx} \sum_{|k| \leq n} e^{i(n+k)x} \stackrel{(\text{per } x \neq 0 \pmod{2\pi})}{=} e^{-inx} \cdot \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo moltiplicato e diviso per $e^{-i\frac{x}{2}}$ mentre l'ultima segue dal fatto che $e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin(\alpha)$. □

Lemma 10.12 (di Riemann). Se $f \in C^0([a, b]) \cap C^1(]a, b[)$ allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

Dimostrazione. Dimostrazione omessa

Proposizione 10.13 (Dirichlet o Dini). : *Se f è 2π -periodica e regolare a tratti allora:*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad s_n f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(f(x_0^+) + f(x_0^-)),$$

dove

$$f(x_0^+) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ e } f(x_0^-) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

In particolare, se f è continua in x_0 , è chiaro che $s_n f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$.

Dimostrazione. Avevamo visto che

$$(s_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt$$

Con un cambio di variabile, ponendo $s = t - x$ ottengo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(-s) ds \stackrel{D_n \text{ è pari}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) D_n(s) ds = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+s) D_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio deriva da

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ } T\text{-periodica} \quad \Rightarrow \quad \int_x^{x+T} \phi(s) ds \text{ non dipende da } x$$

Vediamo ora che

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds \rightarrow f(x^+)$$

l'altro caso è analogo.

$$\begin{aligned} \left| f(x^+) - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+s) D_n(s) ds \right| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x^+) - f(x+s)] \cdot D_n(s) ds \right| = \\ & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{[f(x^+) - f(x+s)]}{s} \cdot \frac{s}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds \right| \end{aligned}$$

Ora

- $\frac{[f(x^+) - f(x+s)]}{s}$ è C^1 su $[0, \pi] \setminus \{x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_n - x, 0\} \pmod{2\pi}$,
- $\frac{s}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}$ è estendibile per continuità con estensione C^1 .

Usando il lemma di Riemann, dove la funzione è il prodotto delle due funzioni, e $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) = \sin(\lambda t)$, si ha che l'integrale di sopra tende a 0

□

Osservazione 71.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (s_k u)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) D_k(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) F_n(x-t) dt$$

dove $F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$.

Lemma 10.14.

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right]^2 \quad \forall x \neq 0 \pmod{2\pi}$$

Dimostrazione. Per $x \neq 0 \pmod{2\pi}$ si ha

$$D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikx} = [\dots] = \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1}$$

Dunque

$$\begin{aligned} (e^{ix} - 1)^2 n F_n(x) &= (e^{ix} - 1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) = (e^{ix} - 1)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i(k+1)x} - e^{-ikx}}{e^{ix} - 1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(k+1)x} - e^{-ikx})(e^{ix} - 1) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (e^{i(k+2)x} - e^{i(k+1)x} - e^{-i(k-1)x} + e^{-ikx}) = \\ &= e^{i(n+1)x} - e^{ix} - e^{ix} + e^{-i(n-1)x} = e^{ix} [e^{inx} - 2 + e^{-inx}] = \\ &= \left(e^{i\frac{x}{2}}\right)^2 [e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}]^2 \end{aligned}$$

Moltiplicando per e^{-ix} da ambo le parti si ottiene

$$\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)^2 n F_n = [e^{i\frac{n}{2}x} - e^{-i\frac{n}{2}x}]^2$$

Ovvero

$$n F_n(x) = \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

□

Proposizione 10.15. $F_n(x)$ ha le seguenti proprietà

(i) $F_n(x) \geq 0$

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1$

(iii) $\forall \delta > 0 \quad \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Dimostrazione. Dimostriamo (iii). Sia

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right]^2$$

Sia δ fissato e x tale che $0 < \delta \leq |x| \leq \pi$, allora

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Dunque, sotto tali ipotesi, vale

$$0 \leq F_n(x) \leq \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right]^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

dove il numeratore di $F_n(x)$ è stato maggiorato con 1. □

Lemma 10.16 (di Fejèr).

$$u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n s_k u \rightarrow u \quad \text{uniformemente}$$

In sostanza il limite delle medie delle somme parziali converge a u , difatti spesso il considerare le medie ha un effetto "regolarizzante".

Dimostrazione. Sia

$$\Delta_n(x) = u(x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (s_k u)(x)$$

la tesi equivale a dimostrare che $\Delta_n(x) \rightarrow 0$ uniformemente.

$$\begin{aligned} |\Delta_n(x)| &\stackrel{\text{(oss.)}}{=} \left| u(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) F_n(x-t) dt \right| \stackrel{\text{(ii)}}{=} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [u(x) - u(t)] F_n(x-t) dt \right| \stackrel{\text{(i)}}{\leq} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - u(t)| F_n(x-t) dt \stackrel{s=t-x}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} |u(x) - u(x+s)| F_n(-s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - u(x+s)| F_n(s) ds \end{aligned}$$

Per Heine-Cantor si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall |s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |u(x) - u(x+s)| < \varepsilon$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(x) - u(x+s)| F_n(s) ds &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} \varepsilon F_n(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} 2 \|u\|_{\infty} F_n(s) ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + 2 \|u\|_{\infty} \cdot \sup_{\delta \leq |s| \leq \pi} F_n(s) \end{aligned}$$

Per (iii) $\exists \bar{n}$ tale che $\forall n \geq \bar{n}$ il secondo addendo è $< \frac{\varepsilon}{2\pi}$, quindi

$$|\Delta_n(x)| < \frac{\varepsilon}{\pi}$$

con ε che non dipende da x □

Corollario 10.17. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ è denso in $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$

Dimostrazione. Sia $u \in C_{2\pi}$, allora

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k u \in V_n$$

ora poichè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k u - u \right\|_\infty < \varepsilon$$

si ha la tesi

11 Curve

11.1 Prime definizioni

Definizione 11.1.

- Una **curva** è una funzione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- Il **supporto** della curva γ il sottoinsieme di \mathbb{R}^n dato da $\gamma([a, b])$
- Una curva γ si dice **regolare** se è di classe C^1 e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in [a, b]$
- Una curva γ si dice **regolare a tratti** se esistono $a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tale che tutte la restrizione $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sono regolare

Osservazione 72. Se γ è regolare, per il teorema delle funzioni implicite, allora localmente si può scrivere come grafico di una funzione C^1 ovvero

$$\gamma(t) = (t, u(t)) \text{ oppure } \gamma(t) = (u(t), t)$$

dove $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ e $u \in C^1$

Esempio 11.1. *La circonferenza*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

e l'*elica*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

sono rispettivamente curve in \mathbb{R}^2 e in \mathbb{R}^3

Definizione 11.2. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una funzione suriettiva e strettamente monotona. Allora $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ è detta **riparametrizzazione**

Osservazione 73. Se φ è crescente allora $\varphi\gamma$ ha lo stesso verso di percorrenza di γ , mentre se è decrescente allora avrà verso opposto

11.2 Lunghezza di una curva

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ una partizione di $[a, b]$ ovvero $t_i < t_{i+1}$ con $a = t_0$ e $b = t_N$.

Definiamo la lunghezza di γ rispetto a P come

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

La lunghezza di γ è

$$L(\gamma) = \sup L(\gamma, P) \in [0, +\infty]$$

Se $L(\gamma) < \infty$ allora γ si dice **rettificabile**

Osservazione 74. $L(\gamma)$ non dipende dalla parametrizzazione di γ

Osservazione 75. $L(\gamma)$ non è però la "lunghezza" del supporto di γ , ad esempio la stessa circonferenza percorsa due volte ha lunghezza doppia

Teorema 11.2 (Rettificabilità nel caso C^1).

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una curva C^1 allora è rettificabile.

Inoltre vale la seguente formula

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Dimostrazione. Fissata una partizione $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ allora

$$L(\gamma, P) = \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_i \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) ds \right| \leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)| ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Per mostrare l'altra disuguaglianza usiamo la uniforme continuità di $\gamma'(t)$.

$$\text{Fissato } \varepsilon \quad \exists \delta > 0 \quad |t - s| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\gamma'(t) - \gamma'(s)| \leq \varepsilon$$

Scelta una partizione P tale che per ogni i vale $|t_{i+1} - t_i| < \delta$ allora se $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$ vale

$$\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt = \gamma'(s_i)(t_{i+1} - t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(s_i)) dt$$

Dunque passando ai moduli e applicando la disuguaglianza triangolare otteniamo

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \left| \gamma'(s_i)(t_{i+1} - t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t) - \gamma'(s_i)) dt \right| \geq |\gamma'(s_i)|(t_{i+1} - t_i) - \varepsilon(t_{i+1} - t_i)$$

In particolare

$$|\gamma'(s_i)| \leq \frac{|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} + \varepsilon$$

Poichè vale $\forall s_i \in [t_i, t_{i+1}]$ allora

$$\int_a^b |\gamma'(t)| dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)| ds \leq \varepsilon(b-a) + \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = L(\gamma, P) + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$$

La tesi segue per arbitrarietà di ε □

Usando

Teorema 11.3 (di Rademacher). *Una funzione lipschitziana è derivabile quasi ovunque*

possiamo dimostrare una versione più forte del teorema precedente

Teorema 11.4 (di rettificabilità).

$$\gamma \text{ rettificabile} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi \quad \gamma \circ \varphi \text{ lipschitz}$$

Proposizione 11.5. *Sia γ una curva C^1 (a tratti) allora tale curva ammette una parametrizzazione per lunghezza d'arco*

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora posto

$$s(t) = \int_a^t |\gamma(\tau)| \, d\tau$$

abbiamo che $s(t)$ è strettamente monotona e dunque invertibile.

Definiamo $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$. Allora $\gamma = \tilde{\gamma}(s(t))$ dunque derivando otteniamo $\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s(t))s'(t)$.

Ma $s'(t) = |\gamma'(t)|$ dunque $\tilde{\gamma}'(s(t)) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ ovvero $\tilde{\gamma}$ ha lo stesso supporto di γ e percorsa a velocità unitaria

Notazione 11.6. Da ora in poi $\tilde{\gamma}$ indicherà sempre una parametrizzazione per lunghezza d'arco e indicheremo la variabile s

11.3 Alcuni tipi di curve

Curve cartesiane (tipo grafo) Sono curve piano (a valori in \mathbb{R}^2) tali che

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

in questo caso

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{a + f'(t)^2} dt$$

Esempio 11.7. $f(x) = x^2$ allora

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

e si svolge per sostituzione

Curve "espresse" in coordinate polari Conoscendo le funzioni

$$t \rightarrow \rho(t) \quad t \rightarrow \theta(t)$$

allora definiamo la curva piano

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \rho(t) \cos \theta(t) \\ \rho(t) \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

dunque abbiamo sottointeso la dipendenza in t

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta \cdot \theta' \\ \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta \cdot \theta' \end{pmatrix} = \rho' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \rho \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ora $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ sono versori ortonormali dunque

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2} dt$$

In particolare se $\theta(t) = t$ allora vale la seguente formula

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} dt$$

Esempio 11.8 (Cardioide). $\rho(\theta) = 2A(1 + \cos \theta)$ dove $A > 0$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Tale curva è chiusa, semplice e regolare per $\theta \in (-\pi, \pi)$ (Esercizio)

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4A^2 (\sin^2 \theta + (1 + \cos^2 \theta)^2)} = 2A \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \theta}$$

Da $1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x$ si ha $2(1 + \cos x) = 4 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)$ dunque

$$L(\gamma) = 4A \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 8A \int_0^{\pi} \left| \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = 8A \int_0^{\pi} \cos^2 \left(\frac{\theta}{2}\right) = 16A$$

11.4 Curve piane

In questa sezione considereremo una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dove denoteremo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

Definizione 11.3. Il **vettore tangente** a γ in $\gamma(t)$ è il vettore

$$T(t) = \frac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \in S^{n-1}$$

La **retta tangente** a γ in $\gamma(t_0)$

$$r(t) = \gamma(t_0) + T(t_0)(t - t_0) \quad t \in \mathbb{R}$$

Definizione 11.4. Il **vettore normale** a γ in $\gamma(t)$ è il vettore

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T \left(\frac{y'}{|\gamma'|}, -\frac{x'}{|\gamma'|} \right)$$

ovvero è ottenuto ruotando T di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario.

Se consideriamo la parametrizzazione per lunghezza d'arco (con la stessa orientazione)

$$\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$$

otteniamo

$$\tilde{T}(s) = \tilde{\gamma}'(s) = (\tilde{x}', \tilde{y}')$$

$$\tilde{N}(s) = (\tilde{y}', -\tilde{x}')$$

Se derivo \tilde{T} allora ottengo un vettore ortogonale a \tilde{T} dunque parallelo a \tilde{N} da cui

$$\exists \tilde{k}(s) \quad \tilde{T}'(s) = -\tilde{k}(s)\tilde{N}(s)$$

il numero $\tilde{k}(s)$ si chiama **curvatura scalare**.

Un' interpretazione geometrica della curvatura ci è fornita dalla seguente Diamo ora un significato prettamente geometrico alla curvatura dalla seguente:

Proposizione 11.9. Sia γ una curva C^2 .

Il modulo della curvatura è il reciproco del raggio di un cerchio osculatore

Dimostrazione. Possiamo considerare γ parametrizzata per lunghezza d'arco.

Sia $s_0 \in [a, b]$ fissato e $P_0 \in \mathbb{R}^2$.

Poniamo

$$g(s) = |\gamma(s) - P_0|^2$$

se scegliamo P_0 tale che $g'(s_0) = g''(s_0) = 0$ allora il cerchio $\{P \in \mathbb{R}^2 : |P - P_0|^2 = g(s_0)\}$ è osculante alla curva.

$$g'(s) = 2(\gamma(s) - P_0) \cdot \gamma'(s)$$

dunque

$$g'(s_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma(s_0) - P_0 = \lambda N \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Mentre

$$g''(s) = 2(|\gamma'|^2 + (\gamma - P_0)\gamma'')$$

Ora $\gamma' = T$ che è normalizzato e $\lambda'' = T' = -kN$ dunque

$$g''(s_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(1 + \lambda N \cdot kN) = 2(1 - \lambda k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{k}$$

Dunque con questa scelta di P_0 si ha $B\left(P_0, \frac{1}{k(s_0)}\right)$ è il cerchio osculatore (tangente alla curva e cerchio che meglio l'approssima) \square

Ricorrere alla parametrizzazione per lunghezza d'arco potrebbe essere scomodo (o talvolta impossibile). La seguente proposizione ci permette di calcolare la curvatura partendo da una generica parametrizzazione

Proposizione 11.10. *Sia $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ una curva piana. La curvatura nel punto $\gamma(t)$ è data da*

$$k(t) = \frac{y''x' - x''y'}{((x'^2 + y'^2))^{\frac{3}{2}}}$$

Dimostrazione. Derivando $\gamma(t) = \tilde{\gamma}(s(t))$ otteniamo

$$\gamma'(t) = \tilde{\gamma}'(s(t)) s'(t) = \tilde{T}(s(t)) |\gamma'(t)|$$

ovvero

$$T(t) = \tilde{T}(s(t)) \quad \Rightarrow \quad T'(t) = \frac{d}{dt} \left(\tilde{T}(s(t)) \right) = \tilde{T}'(s(t)) |\gamma'(t)|$$

Dalla definizione del versore normale abbiamo $N(t) = \tilde{N}(s(t))$.

Poichè $\tilde{T}'(s)\tilde{N}(s) = -\tilde{k}(s)$ allora

$$-\tilde{k}(s) = \tilde{T}'(s)\tilde{N}(s) = \frac{T'(t)}{|\gamma'(t)|} N(t)$$

Calcoliamo $T'(t)$ e $N(t)$. Posto $R(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ otteniamo

$$T(t) = \left(\frac{x'}{R}, \frac{y'}{R} \right) \quad \Rightarrow \quad T'(t) = \left(\frac{x''R - x'R'}{R^2}, \frac{y''R - y'R'}{R^2} \right)$$

Mentre

$$N(t) = \left(\frac{y'}{R}, -\frac{x'}{R} \right)$$

da cui la tesi \square

Esempio 11.11 (Ellisse). *Sia*

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases}$$

allora

$$k(t) = \frac{ab \sin^2 t + ab \cos^2 t}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

dunque la curvatura è minima in $(0, b), (0, -b)$ mentre è massima in $(a, 0), (-a, 0)$

11.5 Curve biregolari in \mathbb{R}^3

Definizione 11.5. Una curva $\gamma \in C^2$ si dice **biregolare** se $\gamma'(t), \gamma''(t) \neq 0$

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco.

Definizione 11.6. Il versore **tangente** a γ in $\gamma(s)$ è il vettore

$$T(s) = \gamma'(s)$$

Se la curva è biregolare allora definiamo il versore **normale** a γ in $\gamma(s)$ è il vettore

$$N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$$

Dalle precedenti definizioni si ha

$$T'(s) = k(s)N(s)$$

dove $k(s) = |T'(s)| = |\gamma''(s)|$ prende il nome di **curvatura**.

Se la curva è biregolare, definiamo il versore **binormale**

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

Osservazione 76.

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = \tau N$$

infatti T è parallelo a N .

Il numero $\tau(s)$ prende il nome di **torsione**.

Ad ogni punto della curva $\gamma(s)$ possiamo associare un sistema di riferimento centrato nel punto e avente assi individuati dai versori $T(s), N(s), B(s)$. Tale sistema prende il nome di **triedro di Frénet**.

Tali vettori soddisfano le relazioni

$$\begin{cases} T' = kN \\ B' = \tau N \\ N' = -(\tau B + kT) \end{cases}$$

chiamate formule di Frénet

Osservazione 77. La curvatura è definita in maniera differente rispetto alle curve piane. Ad esempio per curve in \mathbb{R}^3 la curvatura è sempre positiva.

11.5.1 Parametrizzazione generale

Mostriamo ora come ottenere tutte le quantità nel caso di γ generica

$$T = \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$$
$$B = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{|\gamma' \wedge \gamma''|}$$
$$N = B \wedge T$$

Come si è fatto nel caso di curve piane, possiamo dimostrare

Proposizione 11.12.

$$\tau(t) = -\frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2} \cdot \gamma'''(t)$$

Dimostrazione. Primo lezione del tutorato

Proposizione 11.13.

$$k(t) = \frac{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}$$

Dimostrazione. Primo lezione del tutorato

Osservazione 78. In queste formule stiamo commettendo un abuso di notazione infatti denotiamo T e \tilde{T} con la stessa lettera, analogamente con N e B

11.6 Integrali curvilinei

Definizione 11.7 (Integrazione di funzioni lungo curve).

Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare (a tratti), sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $Im\gamma \subseteq A$.

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua, definiamo l'integrale di f lungo γ come

$$\int_{\gamma} f \doteq \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt$$

Osservazione 79. Se $f = 1$ allora $\int_{\gamma} f = L(\gamma)$.

Osservazione 80. Usando la formula del cambio di variabile, osserviamo che $\int_{\gamma} f$ non dipende dalla parametrizzazione di γ

12 Forme differenziali lineari

Definizione 12.1. sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto. Un **campo di vettori** è una funzione continua

$$v : A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dove poniamo

$$v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

Definizione 12.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto con $Im\gamma \subseteq A$ allora definiamo l'integrale curvilineo di v su γ come

$$\int_{\gamma} v \doteq \int_{\gamma} v \cdot T \, ds = \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} |\gamma'(t)| \, dt$$

Tale quantità prende anche il nome di lavoro di v lungo γ

Osservazione 81. L'integrale di un campo lungo una curva è invariante per riparametrizzazioni crescenti. Mentre assume segno opposto rispetto a riparametrizzazioni decrescenti

Ricordiamo dal corso di Geometria I

Definizione 12.3. Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} allora definiamo il duale di V come lo spazio

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}\}$$

Osservazione 82. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base di V allora $\{e^1, \dots, e^n\}$ sono una base di V^* dove

$$e^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad e^i(e_j) = \delta_{ij}$$

Nel seguito considereremo $V = \mathbb{R}^n$ e porremo $e^i = dx_i$

Definizione 12.4. La funzione $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ che associa ad $x \in A$ il funzionale

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx_i$$

prende il nome di **1-forma differenziale**.

Osservazione 83. Ad ogni 1-forma differenziale è associato un campo di vettori

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx_i \quad \Rightarrow \quad v(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x))$$

Osservazione 84. Se ω è come sopra e $h \in \mathbb{R}^n$ allora per ogni $x \in A$ vale

$$\omega(x)(h) = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx_i(h) = \sum_{i=1}^n v_i(x) h_i$$

Definizione 12.5. Sia ω come sopra e γ una curva regolare a tratti allora definiamo l'integrale di ω lungo γ come

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} v$$

Esempio 12.1. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ e $\omega = -y dx + x dy$.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t)) (\gamma'(t)) \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi$$

12.1 Forme esatte

Esempio 12.2. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 allora il differenziale di f

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

è una 1-forma differenziale

Definizione 12.6. Una 1-forma differenziale ω si dice **esatta** se $\omega = df$ con $f \in C^1$. In tal caso la funzione f si chiama **primitiva** di ω

Inoltre, se v è il campo vettoriale corrispondente a ω , v si dice **conservativo** e f **potenziale** di v . In tal caso $v = \nabla f$

Osservazione 85. Sia $\omega = df$ con $f \in C^1(A)$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva regolare

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

infatti

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

dove l'ultima uguaglianza è il teorema fondamentale del calcolo

Teorema 12.3 (Caratterizzazione delle forme esatte).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e ω una 1-forma continua in A .

I seguenti fatti sono equivalenti

(i) ω esatta

(ii) $\forall \gamma$ curva regolare e chiusa vale $\int_{\gamma} \omega = 0$

(iii) $\forall \gamma_1, \gamma_2$ curve con stessi estremi e stesso verso vale $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

Dimostrazione. (i) \Rightarrow (ii) segue banalmente dalla proposizione precedente.

(ii) \Rightarrow (iii) Sia $\tilde{\gamma}_2$ una riparametrizzazione di γ_2 negativa. Allora $\gamma = \gamma_1 \star \tilde{\gamma}_2$ è un cammino chiuso e quindi

$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

(iii) \Rightarrow (i) Fissato $x_0 \in A$ definiamo $\forall x \in A$

$$f(x) = \int_{\gamma_x} \omega \text{ dove } \gamma_x \text{ è un cammino che congiunge } x_0 \text{ a } x$$

Osserviamo che per connessione γ_x esiste sempre, ed inoltre da (iii) segue che è una buona definizione (la definizione di f non dipende dal cammino scelto).

Dobbiamo verificare che $\omega = df$, cioè se $\omega(x) = \sum v_i(x) dx_i$ allora per ogni i $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = v_i(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + he_i) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\sigma_h} \omega$$

dove $\sigma_h(t) = x + te_i$ per $t \in [0, h]$.

Allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h v_i(x + te_i) dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 v_i(x + te_i) dt = v_i(x)$$

□

Osservazione 86. La primitiva è definita a meno di costanti (che dipende dalla scelta di x_0). Inoltre la primitiva è di classe C^1

Osservazione 87. Il teorema si applica anche ad aperti non connessi, basta scegliere x_0 nella stessa componente connessa di x .

In questo caso se $A = \bigcup A_i$ con A_i aperti connessi, allora per ogni A_i si trova una primitiva $f_i \in C^1(A_i)$

12.2 Forme chiuse

Definizione 12.7. Sia ω una 1 forma di classe C^1 (lo sono i coefficienti).

Diremo che $\omega = \sum_{i=1}^n v_i dx^i$ è **chiusa** se

$$\forall i, j \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$$

Proposizione 12.4. Sia ω una 1-forma di classe C^1

$$\omega \text{ esatta} \quad \Rightarrow \quad \omega \text{ chiusa}$$

Dimostrazione. Poichè la forma è esatta allora esiste una funzione f con $df(x) = \omega(x)$.

Ora

$$df(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) dx_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = v_i$$

Poichè ω è C^1 allora f è di classe C^2 . Concludiamo utilizzando il teorema di Cauchy-Swartz

Osservazione 88 (Controesempio a chiuso \Rightarrow esatta). Sia $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e definiamo

$$\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^2)^* \quad \omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

Mostriamo che tale forma è chiusa

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Per mostrare che non è esatta, basta provare che l'integrale lungo la circonferenza unitaria di ω non è nullo.

Sia $\gamma = (\cos t \quad \sin t)$ e scriviamo $\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$ allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} a(\cos t, \sin t)(-\sin t) + b(\cos t, \sin t) \cos t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t = 2\pi \neq 0$$

L'osservazione precedente ci mostra che affinché una forma chiusa sia esatta devo tener conto della "geometria" dell'aperto A (in un senso che spiegheremo)

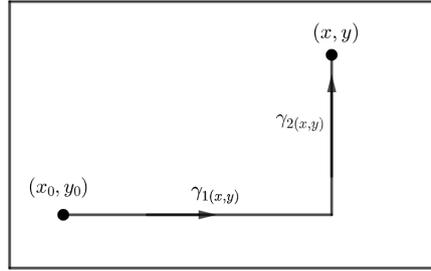
Proposizione 12.5. Sia $R = \prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ un rettangolo (anche illimitato).

$$\omega : R \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \text{ chiusa} \quad \Rightarrow \quad \text{esatta}$$

Dimostrazione. (Dimostriamo il caso $n = 2$) Sia $\omega = a(x, y) dx + b(x, y) dy$.

Sia $(x_0, y_0) \in R$ e poniamo

$$f(x, y) = \int_{\gamma_1(x, y)} \omega + \int_{\gamma_2(x, y)} \omega$$



dove

$$\begin{cases} \gamma_{1(x,y)} : [x_0, x] \rightarrow R & \gamma_{1(x,y)}(t) = (t, y_0) \\ \gamma_{2(x,y)} : [y_0, y] \rightarrow R & \gamma_{2(x,y)}(t) = (x, t) \end{cases}$$

come in figura.

Verifichiamo che $df = \omega$ ovvero $\frac{\partial f}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = b$

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y b(x, t) dt$$

dunque $\frac{\partial f}{\partial y} = b$ si ottiene derivando l'espressione rispetto a y mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a(x, x_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial x}(x, t) dt = a(x, x_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial a}{\partial y}(x, t) dt = a(x, y_0) + a(x, y) - a(x, y_0) = a(x, y)$$

Teorema 12.6. *Sia ω chiusa. γ_1, γ_2 due curve omotope. Se γ_1, γ_2 e l'omotopia sono C^∞ allora*

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dimostrazione. (Fissiamo per semplicità $n = 2$) Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ e poniamo $h(t, s)$ l'omotopia tra γ_1 e γ_2 . Fissato s poniamo $\gamma_s(t) = h(t, s)$.

Se

$$\omega(x, y) = a(x, y) dx + b(x, y) dy$$

allora

$$\partial_s \int_{\gamma_s} \omega = \partial_s \int_c^d \begin{pmatrix} a(h^1(t, s), h^2(t, s)) \\ b(h^1(t, s), h^2(t, s)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_t^1(t, s) & h_t^2(t, s) \end{pmatrix} dt$$

Ora usando le regole di derivazione delle funzioni composte otteniamo (non scrivendo tutte le dipendenze)

$$\partial_s \int_{\gamma_s} \omega = \int_c^d \begin{pmatrix} a_x h_s^1 + a_y h_s^2 \\ b_x h_s^1 + b_y h_s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_t^1 & h_t^2 \end{pmatrix} dt + \int_c^d \begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix} \cdot h_{st} dt$$

Ora usando Cauchy-Swartz si ha $h_{st} = h_{ts}$ dunque posso integrare per parti ottenendo

$$\int_c^d \begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix} \cdot h_{ts} dt = \begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_s^1(t, s) & h_s^2(t, s) \end{pmatrix} \Big|_{t=c}^{t=d} - \begin{pmatrix} a(h) \\ b(h) \end{pmatrix}_t h_s dt$$

ma poichè h è un omotopia $h(c, s)$ e $h(d, s)$ sono costanti e dunque $h_s(c, s) = h_s(d, s) = 0$.

Ripetendo conti analoghi a quanto fatto per svolgere $\left(\begin{smallmatrix} a(h) \\ b(h) \end{smallmatrix} \right)_s \cdot h_t$ otteniamo

$$\begin{aligned} \partial_s \int_{\gamma_s} \omega &= \int_c^d \left[\cancel{a_x h_s^1 h_t^1} + a_y h_s^2 h_t^1 + b_x h_s^1 h_t^2 + \cancel{b_y h_s^2 h_t^2} - \left(\cancel{a_x h_t^1 h_s^1} + a_y h_s^1 h_t^2 + b_x h_t^1 h_s^2 + \cancel{b_y h_s^2 h_t^2} \right) \right] dt = \\ &= \int_c^d (b_x - a_y) (h_s^1 h_t^2 - h_t^1 h_s^2) dt = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la forma è chiusa (quindi $b_x = a_y$) □

Ricordando che

Osservazione 89. A aperto semplicemente connesso se e solo se ogni curva C^∞ chiusa è omotopa ad una curva costante con omotopia C^∞

otteniamo

Corollario 12.7. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto semplicemente connesso.

$$\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^* \text{ chiusa} \quad \Rightarrow \quad \text{esatta}$$

Dimostrazione. Sia γ una curva regolare e chiusa.

Poichè A è semplicemente connesso, γ è omotopa a $\tilde{\gamma}$ cammino costante.

Per il teorema precedente

$$\int_\omega \gamma = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = 0$$

Dunque ω è esatta (uso il teorema [12.3](#))

13 Superfici

Definizione 13.1. Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso.

Diremo che Σ è una **k -superficie regolare** se

$$\forall x_0 \in \Sigma \quad \exists \rho > 0 \quad \exists U \subseteq \mathbb{R}^k \quad \exists \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ di classe } C^1 \quad \text{rk}(D\varphi) = k \quad \varphi(U) = \Sigma \cap B(x_0, \rho)$$

Definizione 13.2. Una $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ una $(n-1)$ -superficie regolare si dice **orientata** se è definita una scelta

$$N : \Sigma \rightarrow S^{n-1} \text{ continua} \quad N(x) \in T_\Sigma(x)^\perp$$

Osservazione 90. Sia $U = \{f < 0\}$ con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . Poniamo $\Sigma = \partial U$ allora se $\nabla f|_\Sigma \neq 0$ una scelta canonica per l'orientazione è la **normale esterna**

$$N_e(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$$

Osservazione 91. Non tutte le superfici sono orientabili (es. nastro di Moebius)

13.1 Misure di superfici

Andiamo a dare una definizione "ragionevole" della misura di Σ che denoteremo con $H^k(\Sigma)$

- $\varphi(x) = L \cdot x$

(1a) L matrice ortogonale.

Allora L è un'isometria tra \mathbb{R}^k e $L(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$ dunque è ragionevole porre

$$H^k(\Sigma) = |U|$$

(1b) In generale, posso scrivere $L = L'S$ con $L' \in M(n, k, \mathbb{R})$ ortogonale e $S \in M(k, k, \mathbb{R})$ simmetrica. Poniamo

$$H^k(\Sigma) = |\det S| |U|$$

Osservazione 92. Tale definizione non dipende da S infatti

$$\det(L^T L) = \det(S^T L'^T L'^T S) = \det(S)^2$$

dunque posso anche porre

$$H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(L^T L)} \, dx$$

- Sia $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\varphi \in C^1$ e $rk(D\varphi) = k$

Allora posso approssimare φ con $(\varphi_n) \subseteq C^1(U)$ lineari a tratti e porre

$$H^k(\Sigma) = \lim_n H^k(\Sigma_n) = \lim_n \int_U \hat{J}_{\varphi_n}(x) \, dx = \int_U \hat{J}_\varphi(x) \, dx$$

dove $\hat{J}_\varphi = \sqrt{\det(D_\varphi^T D_\varphi)}$

- Se $\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$ con $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ allora

$$H^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \hat{J}_{\varphi_i} \, dx$$

Osservazione 93. Non avendo chiesto φ iniettiva, la definizione di $H^k(\Sigma)$ ci fornisce la k -misura di Σ con molteplicità

Osservazione 94. $H^k(\Sigma)$ non dipende dalla parametrizzazione φ .

Sia $\varphi : U \rightarrow \Sigma$ e $\Phi : U \rightarrow V$ un diffeomorfismo C^1 in \mathbb{R}^k .

Se poniamo $\psi = \varphi \circ \Phi^{-1}$ allora

$$\begin{aligned} H^k(\Sigma) &= \int_U \hat{J}_\varphi = \int_U \sqrt{\det(D_\varphi^T D_\varphi)} = \int_U \sqrt{\det(D_\Phi^T D_\psi^T D_\psi D_\Phi)} = \\ &= \int_U J_\Phi \sqrt{\det(D_\psi^T D_\psi)} = \int_V \sqrt{\det(D_\psi^T D_\psi)} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è il cambio di variabile

Esempio 13.1.

- Per $k = 1$ ritroviamo quanto osservato sulla lunghezza della curva.

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \hat{J}_\varphi = |\varphi'|$$

dunque

$$H^1(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'| = L(\varphi)$$

- $k = 2$ e $n = 3$ allora

$$\varphi = (\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y), \varphi^3(x, y)) \quad \Rightarrow \quad D_\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_x^1 & \varphi_y^1 \\ \varphi_x^2 & \varphi_y^2 \\ \varphi_x^3 & \varphi_y^3 \end{pmatrix}$$

dunque

$$\hat{J}_\varphi = \sqrt{|\varphi_x|^2 |\varphi_y|^2 - \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle} = |\varphi_x \wedge \varphi_y|$$

- $k = n - 1$ e $\varphi(x) = (x, f(x))$ con $f : U \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} Id_{n-1} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad H^{n-1}(\Gamma_f) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla f|^2} dx$$

13.2 Integrali su superfici

Definiamo, in analogia a quanto fatto per le curve:

Definizione 13.3. Data Σ una k -superficie in \mathbb{R}^n e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ continua con $\Sigma = \varphi(U)$ iniettiva.

Poniamo

$$\int_{\Sigma} f = \int_U f(\varphi) \hat{J}_{\varphi}$$

Osservazione 95. Tale definizione, non dipende dalla parametrizzazione

Osservazione 96. Nella definizione, sarebbe stato sufficiente $f \circ \varphi$ integrabile in \mathbb{R}^k

Osservazione 97. Se $\Sigma = \sum_{i=1}^N \varphi_i(U_i)$ allora possiamo prendere funzioni

$$\eta_i : \Sigma \rightarrow [0, 1] \quad i \in \{1, \dots, N\}$$

tali che $\eta_i(x) = 0$ se $x \notin \varphi_i(U_i)$ e che $\forall x \in \Sigma$ si abbia $\sum_{i=1}^n \eta_i(x) = 1$.

Tali funzioni si chiamano partizione dell'unità.

In tal caso

$$\int_{\Sigma} f = \sum_{i=1}^N \int_{\varphi(U_i)} f \circ \eta_i = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \hat{J}_{\varphi_i} f(\varphi_i) \eta_i(\varphi_i)$$

Si verifica, inoltre, che tali quantità non dipendono dalla scelta di η_i

Osservazione 98. Se Σ è compatta allora esiste sempre un'insieme finito di carte $\varphi_i : B \rightarrow \Sigma$ tali che

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(B)$$

Definizione 13.4. Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ una $(n-1)$ -superficie regolare compatta e orientata .
Sia $v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo di vettori continuo, la quantità

$$\int_{\Sigma} v \cdot N$$

si dice **flusso** di v attraverso Σ

Teorema 13.2 (della divergenza). Sia $\Sigma = \partial U$ una $(n-1)$ superficie regolare con $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato.

Sia $v : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ campo di vettori C^1 .

Allora

$$\int_{\Sigma} v \cdot N = \int_U \operatorname{div}(v(x)) \, dx$$

$$\text{dove } \operatorname{div}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

Dimostrazione.

- Sia $(x'_0, y_0) \in \Sigma$ con $x'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e poniamo

$$C = B(x'_0, r) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

Supponiamo che $\Sigma \cap C = \Gamma_f$ e che $v(x) = u(x) \cdot e_n$ con $\operatorname{supp} u \subseteq C$.

Allora

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y} = \int_{B(x'_0, r)} dx' \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_{B(x'_0, r)} u(x', f(x')) \, dx'$$

Inoltre

$$N(x) = \frac{(-\nabla f(x'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}} \quad v \cdot N = \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}}$$

dunque

$$\int_{\Sigma} v \cdot N = \int_{\Sigma \cap C} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}}$$

Poniamo

$$\varphi : B(r, x'_0) \rightarrow \Sigma \cap C \quad \varphi(x') = (x', f(x'))$$

allora $\hat{J}_{\varphi} = \sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}$ dunque

$$\int_{\Sigma \cap C} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1 + |\nabla f(x')|^2}} = \int_{B(r, x'_0)} u(x', f(x')) \, dx'$$

- Sia $x_0 \in \Sigma$ e supponiamo che esista $R > 0$ tale che $\forall i$ si abbia

$$B(x_0, r) \cap \Sigma \subseteq C_i \text{ cilindri con asse lungo } e_i$$

dove $\Sigma \cap C_i$ è grafico di f nella direzione e_i .

Se $\operatorname{supp}(v) \subseteq B(x_0, R)$ allora

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \sum_i \int_U \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_{C_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_{\Sigma} (v_i e_i) \cdot N = \int_{\Sigma} v \cdot N$$

Osservazione 99. Posso scegliere $B(x_0, R)$ come sopra se e solo se $N(x_0)$ non è parallelo ad un vettore coordinato e_i per tutti gli i

- In generale, dato $x_0 \in \Sigma$ posso trovare $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ortogonale tale che $O(N(x_0))$ non è parallelo a nessun e_i dunque sfruttando il punto precedente

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \int_{O(U)} \operatorname{div}(Ov) = \int_{O(\Sigma)} (Ov) \cdot (ON) = \int_{\Sigma} v \cdot N$$

- Resta da risolvere il fatto che nei punti precedenti v è "localizzato".
Prendo un ricoprimento

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N B(x_i, R) \text{ con } x_i \in \partial\Sigma \text{ e } B(x_i, R) \text{ come sopra}$$

e una partizione dell'unità $\eta_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ per $i = 0, \dots, N$ tali che

$$\operatorname{supp}\eta_0 \subseteq U \quad \operatorname{supp}\eta_i \subseteq B(x_i, R)$$

allora

$$\operatorname{div}(v \cdot \eta_i) = \operatorname{div}(v) \cdot \eta_i + v \cdot \nabla \eta_i \quad \Rightarrow \quad \sum_i \operatorname{div}(v \cdot \eta_i) = \operatorname{div}v \cdot \sum_i \eta_i + v \cdot \nabla \sum_i \eta_i = \operatorname{div}(v)$$

infatti $\sum_i \eta_i = 1$.

Dunque

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \sum_{i=0}^N \int_U \operatorname{div}(v \cdot \eta_i) = \int_U \operatorname{div}(v\eta_0) + \sum_{i=1}^N \int_{B(x_i, R)} \operatorname{div}(v) \cdot \eta_i$$

Ora $\int_U \operatorname{div}(v\eta_0) = 0$ infatti presa

$$w(x) = \begin{cases} v \cdot \eta_0 & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin U \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \int_U \operatorname{div}(v\eta_0) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}w = \sum_i \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dx_i = 0$$

poiché w_i ha supporto compatto.

Dunque

$$\int_U \operatorname{div}(v) = \sum_{i=1}^N \int_{\Sigma} (v \cdot N) \cdot \eta_i = \int_{\Sigma} v \cdot N$$

□

14 Formula di Gauss-Green e divergenza in \mathbb{R}^2

Definizione 14.1. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio.

D si dice **normale** rispetto a x se

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \end{array} \right\}$$

analogamente si definisce dominio normale rispetto a y .

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice dominio **regolare** se

$$D = \bigcup_{i=1}^N D_i$$

con D_i normale rispetto a x o a y e tali che $D_i^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$

Osservazione 100. La frontiera di un dominio regolare ∂D è un'unione di un numero finito di curve regolari a tratti. Dunque tale curva ammette un vettore tangente (tranne al più in finiti punti) e dunque anche un vettore normale.

Per convenzione orientiamo la frontiera di D in modo che il vettore normale N risulti in ogni punto esterno a D . Indicheremo tale orientazione con $+\partial D$ e prende il nome di **orientazione positiva**

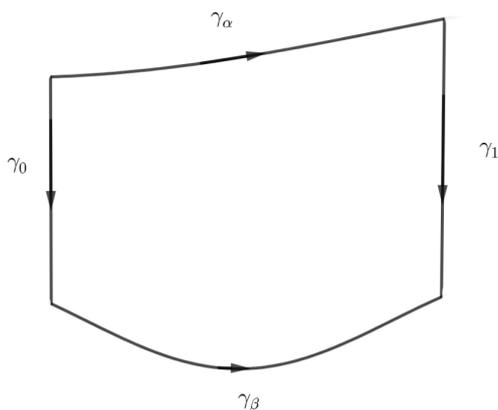
Lemma 14.1.

(a) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $P \in C^1(\Omega)$. Se D è normale rispetto a x allora

$$\int_{+\partial D} P \, dx = - \iint_D \partial_y P \, dx \, dy$$

(b) La stessa formula vale se D è normale rispetto a y

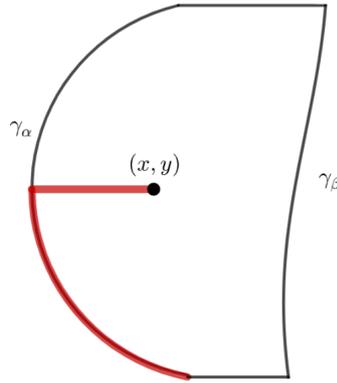
Dimostrazione. (a)



$$\int_{+\partial D} P \, dx = \int_{\gamma_0} P \, dx + \int_{\gamma_\alpha} P \, dx + \int_{\gamma_1} P \, dx - \int_{\gamma_\beta} P \, dx$$

Poichè γ_0, γ_1 sono costanti sulle x il primo e il terzo integrale sono nulli dunque otteniamo

$$= \int_a^b [P(x, \alpha(x)) - P(x, \beta(x))] \, dx = \int_a^b \left(- \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dy \right) \, dx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \, dy \, dx$$



Dimostrazione. (b) Usiamo una funzione ausiliaria

$$F(x, y) = \int_{\gamma_{x,y}} P \, dx = \int_a^y P(\alpha(t), t) \alpha'(t) \, dt + \int_{\alpha(y)}^x P(s, y) \, ds$$

Ora $\partial_x F(x, y) = P(x, y)$. Andiamo a calcolare $\partial_y F(x, y)$

Posta

$$G(w, y) = \int_x^w P(s, y) \, ds$$

otteniamo

$$\partial_y \left[\int_{\alpha(y)}^x P(s, y) \, ds \right] = \partial_y [G(\alpha(y), y)] = \partial_1 G(\alpha(y)) \alpha'(y) + \partial_2 G(\alpha(y), y)$$

Ora $\partial_1 G(w, y) = -P(w, y)$ mentre $\partial_2 G(w, y) = \int_w^x \partial_y P(s, y) \, ds$ dunque otteniamo

$$-P(\alpha(y), y) \alpha'(y) + \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s, y) \, ds$$

da cui

$$\partial_y F = \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s, y) \, ds$$

Abbiamo dunque mostrato che $F \in C^1$ dunque $\partial_x F \, dx + \partial_y F \, dy$ è una forma esatta da cui

$$\int_{+\partial D} [\partial_x F \, dx + \partial_y F \, dy] = 0$$

Ora

$$\int_{+\partial D} \partial_y F \, dy = \int_{-\gamma_\alpha} \partial_y F \, dy + \int_{\gamma_\beta} \partial_y F \, dy$$

Ma

$$\partial_y F(x, y) = \int_{\alpha(y)}^x \partial_y P(s, y) \, ds \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_\alpha} \partial_y F \, dy = 0$$

da cui la tesi

Con una dimostrazione analoga si prova che

Lemma 14.2. (a) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $Q \in C^1(\Omega)$. Se D è normale rispetto a x allora

$$\int_{+\partial D} Q \, dy = \iint_D \partial_x Q \, dx \, dy$$

(b) La stessa formula vale se D è normale rispetto a y

Teorema 14.3 (di Gauss-Green). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $P, Q \in C^1(\Omega)$. Se D regolare allora

$$\int_{+\partial D} P dx + Q dy = \iint_D [\partial_x Q - \partial_y P] dx dy$$

Dimostrazione. Segue applicando i lemmi.

Considerando D come unione di domini regolari e poi osservare che i cammini che ho aggiunto (per dividere il dominio) si cancellano

Corollario 14.4. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio regolare

$$Area(D) = \int_{+\partial D} x dy = - \int_{+\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{+\partial D} x dy - y dx$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema precedente.

Per la prima uguaglianza usiamo $Q(x, y) = x$ e $P(x, y) = 0$ mentre per la seconda $P(x, y) = -y$ e $Q(x, y) = 0$

Corollario 14.5 (Teorema della divergenza in \mathbb{R}^2). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $F = (F_1, F_2) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Sia $D \subseteq \Omega$ un dominio normale allora

$$\int_{+\partial D} F \cdot n ds = \iint_D div(F)$$

dove $div(F) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$ e s è l'ascissa curvilinea

Dimostrazione. ds è l'elemento di lunghezza, ovvero se $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial D$ è una parametrizzazione poniamo $ds = |\gamma'(t)| dt$

$$\begin{aligned} \int_{+\partial D} F \cdot n ds &= \int_a^b \left[F_1(\gamma(t)) \cdot \frac{y'(t)}{|\gamma'(t)|} + F_2(\gamma(t)) \cdot \frac{-x'(t)}{|\gamma'(t)|} \right] |\gamma'(t)| dt = \\ &= \int_a^b [F_1(\gamma(t))y'(t) - F_2(\gamma(t))x'(t)] dt = \int_{+\partial D} [F_1 dy - F_2 dx] \end{aligned}$$

Poniamo $\begin{cases} -F_2 = P \\ F_1 = Q \end{cases}$ dunque per il teorema precedente, la tesi

15 Superfici nello spazio

Specializziamo quanto abbiamo visto nella sezione precedente nel caso di ipersuperfici in \mathbb{R}^3

Definizione 15.1. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio e $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ regolare ed iniettiva, poniamo $\Sigma = \varphi(D)$.

Se $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f \circ \varphi$ è integrabile su D poniamo

$$\int_{\Sigma} f \, d\sigma = \int_D f(\varphi(u, v)) |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv$$

Se $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori, poniamo il **flusso** di F attraverso Σ come

$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_D F(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|} |\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)| \, du \, dv$$

Osservazione 101. $|\varphi_u \wedge \varphi_v| = \left| \hat{J}_{\varphi} \right|$ è chiamato elemento d'aria.

Il vettore $\varphi_u \wedge \varphi_v$ è ortogonale al piano tangente alla superficie

Definizione 15.2. Data una superficie $\Sigma = \varphi(D)$ definiamo il suo **bordo** come la curva $\partial D = \varphi(\partial D)$.

Definizione 15.3. Dato (Σ, n) superficie orientabile in \mathbb{R}^3 . Definisco l'orientazione positiva $\tau : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ con τ campo tangente unitario tale che $\tau \wedge n$ "punta" sempre "fuori" da Σ .

Osservazione 102. Se $\Sigma = \varphi(D)$ allora φ definisce un'orientazione canonica della curva $\partial\Sigma$.

Infatti φ induce un'orientazione su Σ data da

$$n(u, v) = \frac{\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)}{|\varphi_u(u, v) \wedge \varphi_v(u, v)|}$$

Teorema 15.1 (di Stokes). Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientabile con bordo $\partial^+\Sigma$ di classe C^1 e $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto.

Sia $F = (F^1, F^2, F^3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ è un campo di vettori C^1 e $\omega = F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz$ allora

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n_e \, d\sigma$$

dove

$$\operatorname{rot} F = \text{"}\nabla \wedge F\text{"} = \text{"}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{vmatrix}\text{"}$$

Dimostrazione. Supponiamo $\Sigma = \varphi(D)$ con $\varphi \in C^2$.

Scriviamo

$$F(x, y, z) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$$

e

$$\Sigma \ni \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Inoltre, sia $\omega(x, y, z) = X dx + Y dy + Z dz$ la 1-forma associata a F ; con tale scelta abbiamo

$$\int_{\partial^+\Sigma} F = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$$

$$\int_D \operatorname{rot} F \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) \, du \, dv = \int_D \left[(Z_y - Y_z) \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix} + (X_z - Z_x) \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix} + (Y_x - X_y) \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \right] \, du \, dv$$

Sia

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi \circ \gamma : \partial^+ D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \tilde{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} x(u(t), v(t)) \\ y(u(t), v(t)) \\ z(u(t), v(t)) \end{pmatrix}$$

dove $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ è la parametrizzazione positiva di ∂D

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \Sigma} \omega &= \int_0^1 \left(X(\tilde{\varphi}(t)), Y(\tilde{\varphi}(t)), Z(\tilde{\varphi}(t)) \right) \cdot \tilde{\varphi}'(t) dt = \\ &= \int_0^1 (Xx_u + Yy_u + Zz_u) u'(t) + (Xx_v + Yy_v + Zz_v) v'(t) dt = \\ &= \int_{\partial^+ D} (Xx_u + Yy_u + Zz_u) du + (Xx_v + Yy_v + Zz_v) dv \\ &= \int_D [(Xx_v + Yy_v + Zz_v)_u - (Xx_u + Yy_u + Zz_u)_v] du dv \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è il teorema di Gauss-Green in \mathbb{R}^2 .

Continuando a svolgere i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ \Sigma} \omega &= \int_D \partial_u(Xx_v) - \partial_v(Xx_u) + \partial_u(Yy_v) - \partial_v(Yy_u) + \partial_u(Zz_v) - \partial_v(Zz_u) = \\ &= \int_D X_x x_u x_v + X_y y_u x_v + X_z z_u x_v + \cancel{X_{uv}} - (X_x x_v x_u + X_y y_v x_u + X_z z_v x_u + \cancel{X_{vu}}) + \dots \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di Cauchy-Swartz. Una verifica diretta mostra adesso la tesi \square

Facciamo alcune precisazioni

- Il caso $\varphi \in C^1$ si fa per approssimazioni: nella tesi non compaiono le derivate seconde ma solo le prime.
- Data Σ orientabile e compatta, posso sempre trovare $\varphi_i : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che $\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset$ per $i \neq j$ e con $\Sigma = \bigcup \varphi_i(\overline{D})$.

In tal caso

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \text{rot} F \cdot n &= \sum_i \int_D \text{rot} F \cdot [(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v] du dv \\ &= \sum_i \int_{\partial^+ \varphi_i(D)} F \end{aligned}$$

dunque non è restrittivo supporre $\Sigma = \varphi(D)$

15.1 Superfici di rotazione

Proposizione 15.2. *Sia φ la parametrizzazione della superficie ottenuta dalla rotazione attorno a z di una curva nel piano (x, z) allora*

$$J_\varphi = r\sqrt{r'^2 + z'^2}$$

dove r indica la distanza dall'asse z

Dimostrazione. Parametizziamo la superficie come

$$\varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} r(t) \cos \theta \\ r(t) \sin \theta \\ z(t) \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\partial_t \varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} r'(t) \cos \theta \\ r'(t) \sin \theta \\ z'(t) \end{pmatrix} \quad \partial_\theta \varphi(t, \theta) = \begin{pmatrix} -r(t) \sin \theta \\ r(t) \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\partial_t \varphi \wedge \partial_\theta \varphi = \begin{pmatrix} -r(t)z'(t) \cos \theta \\ -r(t)z'(t) \sin \theta \\ r(t)r'(t) \end{pmatrix}$$

ovvero

$$|\partial_t \varphi \wedge \partial_\theta \varphi| = r\sqrt{r'^2 + z'^2}$$

□

Esempio 15.3 (Superficie del toro).

Il toro è il solido ottenuto ruotando una circonferenza nel piano (x, z) di raggio R e centro $(a, 0)$.

Ora $r(t)$ esprime la distanza tra un punto della circonferenza e l'asse z , $r(t) = a + R \cos t$ da cui otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + R \cos t) \cos \theta \\ y(t) &= (a + R \cos t) \sin \theta \\ z(t) &= R \sin t \end{aligned}$$

dove $(t, \theta) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Da cui se T è il toro otteniamo

$$H^2(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (a + R \cos t) \sqrt{(R \sin t)^2 + R^2 \cos^2 t} \, d\theta \, dt = 4\pi^2 aR$$

16 Equazioni differenziali. Teoria

Definizione 16.1. L'equazione differenziale ordinaria di ordine k in **forma implicita** è una scrittura della forma

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k)}(x))$$

dove

- $x \in I \subseteq \mathbb{R}$
- $F: I \times (\mathbb{R}^n)^k \rightarrow \mathbb{R}^n$
- l'incognita è la funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Se l'equazione precedente, può essere scritta come

$$y^{(k)}(x) = f(x, y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)) \quad (4)$$

diremo che è messa in **forma esplicita**

Osservazione 103. Possiamo trasformare l'equazione (4) di ordine k in un'equazione di ordine 1.

Ponendo

$$Y(x) = (y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x))$$

otteniamo che l'equazione (4) diventa

$$Y'(x) = \tilde{f}(x, Y(x))$$

Stanti di questa osservazione, possiamo considerare solamente equazioni differenziali del primo ordine

Notazione. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ allora poniamo $I_a(x_0) = (a - x_0, a + x_0)$.

Setting generale. Fissato $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e sia $f: I_a(x_0) \times B(y_0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora consideriamo il **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (5)$$

Definizione 16.2. La **formulazione integrale** del problema di Cauchy (5) è l'equazione

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (6)$$

Osservazione 104. y risolve (5) se e solo se y risolve (6)

16.1 Teorema di Cauchy e sue conseguenze

Teorema 16.1 (di Cauchy). *Se f (come sopra) è una funzione continua è lipschitziana in y ovvero*

$$\exists L \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad \forall x \in (x_0 - a, x_0 + a)$$

allora $\exists \delta > 0$ ed esiste una ed una sola funzione $y : I_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile nell'intervallo di definizione e soluzione del problema (5)

Dimostrazione. Mostriamo che (6) ha un'unica soluzione.

Definiamo

$$F : C(I_\delta) \rightarrow C(I_\delta) \quad F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

risulta evidente che y è soluzione del problema integrale se e solo se y è un punto fisso di F .

Consideriamo

$$X_{r,\delta} = \{y \in C(I_\delta) : \|y - y_0\|_\infty \leq r\}$$

tale spazio è uno spazio metrico completo (con la norma indotta da $C(I_\delta)$). Cerchiamo δ in modo che $F_{X_{r,\delta}}$ risulti una contrazione

- Proviamo che $F(y) \in X_{r,\delta}$ per ogni $y \in X_{r,\delta}$. Ora

$$|F(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq M\delta$$

dove $M = \sup |f(x, y)|$.

Dunque affinché $\|F(y)(x) - y_0\| \leq r$ deve accadere $\delta \leq \frac{r}{M}$

- Mostriamo che è una contrazione. Sia $y_1, y_2 \in X_{r,\delta}$

$$\begin{aligned} |F(y_1)(x) - F(y_2)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))] dt \right| \leq \int_{x_0}^x |[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]| dt \leq \\ &\leq L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)| dt \leq L\delta \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

dunque se vogliamo che sia una contrazione $L\delta < 1$ ovvero $\delta < \frac{1}{L}$

Per $\delta \leq a, \frac{r}{M}$ e $\delta < \frac{1}{L}$ ha F è una contrazione e dunque ammette un unico punto fisso; tale punto fisso è l'unica soluzione del problema (5)

Corollario 16.2. *Sia $y : (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2) \rightarrow \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy. Allora si verifica una sola delle seguenti opzioni*

- $\delta_2 = a$
- $\lim_{x \rightarrow \delta_2} y(x) = y_0 \pm r$

Analoghe opzioni valgono per δ_1

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo che $\delta_2 < a$ e che $l = \lim_{x \rightarrow \delta_2} y(x) \in (y_0 - r, y_0 + r)$.

Ora possiamo estendere la soluzione "ripartendo" con condizioni iniziali $(x_0 + \delta, l)$ contro la massimalità di y □

Corollario 16.3. *Se δ_1, δ_2 sono i tempi massimale di esistenza. Allora $\delta_1, \delta_2 \leq \min \{a, \frac{r}{M}\}$, ovvero non compare la dipendenza da L*

Corollario 16.4 (Teorema dell'asinto). Sia $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora

$$\delta_2 < a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + \delta_2} |y(x)| = \pm\infty$$

$$\delta_1 < a \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - \delta_1} |y(x)| = \pm\infty$$

Proposizione 16.5 (Studio delle simmetrie). Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione che soddisfa le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz in un intorno di $(0, \alpha)$.

Consideriamo il problema

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

allora

(a) Se $f(t, x) = -f(-t, x)$ allora la soluzione u è pari

(b) Se $f(t, x) = -f(-t, x)$ e $u(0) = 0$ allora la soluzione u è dispari

Dimostrazione. (a) Sia $v(t) = u(-t)$ allora

$$v'(t) = -u'(-t) = -f(-t, u(-t)) = f(t, u(-t)) = F(t, v(t))$$

allora $v'(t) = f(t, v(t))$ con $v(0) = \alpha$. Si conclude per unicità della soluzione.

Il punto (b) è analogo

Osservazione 105. Sono necessarie le ipotesi di unicità infatti

$$\begin{cases} u'(t) = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

allora $F(t, x) = \sqrt{|x|}$ soddisfa le ipotesi di b ma la soluzione

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ t^2 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

non è dispari

16.2 Dipendenza continua dal dato iniziali

D'ora in poi denoteremo con $y(x; y_0)$ la soluzione del problema di Cauchy (5)
 Supponiamo che valgano le condizioni di esistenza ed unicità allora

Teorema 16.6. *Sia $y_1 \in B(y_0, r)$ allora*

$$|y(x; y_0) - y(x; y_1)| \leq C |y_0 - y_1| \quad \forall x \in I_{\bar{\delta}}(x_0)$$

dove $\bar{\delta}$ e c dipendono da f (ovvero da M e L)

Dimostrazione. Ricordiamo che la forma integrale del problema è data da

$$y(x; y_i) = y_i + \int_{x_0}^x f(s, y(s; y_i)) ds \quad \text{per } i = 0, 1$$

dunque otteniamo per $x \in I_{\bar{\delta}}$

$$\begin{aligned} |y(x; y_0) - y(x; y_1)| &\leq |y_0 - y_1| + \int_{x_0}^x |f(s, y(s; y_0)) - f(s, y(s; y_1))| ds \leq \\ &\leq |y_0 - y_1| + L\bar{\delta} \sup_{s \in I_{\bar{\delta}}} |y(s; y_0) - y(s; y_1)| \end{aligned}$$

Passando al sup per $x \in I_{\bar{\delta}}$ otteniamo

$$\|y(x; y_0) - y(x; y_1)\|_{L^\infty} \leq |y_0 - y_1| + L\bar{\delta} \|y(x; y_0) - y(x; y_1)\|_{L^\infty}$$

Se $\bar{\delta} < \frac{1}{L}$ abbiamo

$$\|y(x; y_0) - y(x; y_1)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{1 - L\bar{\delta}} |y_0 - y_1|$$

□

Osservazione 106. Dall'equazione $y' = f(x, y)$ otteniamo

$$\|y'(x; y_0) - y'(x; y_1)\|_{L^\infty} = \|f(x, y(x; y_0)) - f(x, y(x; y_1))\|_{L^\infty} \leq L \|y(x; y_0) - y(x; y_1)\|_{L^\infty} \leq cL |y_0 - y_1|$$

dunque la convergenza è anche in $C^1(I_\delta)$

Lemma 16.7 (di Gronwall). *Sia $v \in C^0(I_\delta(x_0))$ e siano $\alpha, \beta > 0$ tali che*

$$0 \leq v(x) \leq \alpha + \beta \left| \int_{x_0}^x v \right| \quad \forall x \in I_\delta$$

allora

$$v(x) \leq \alpha e^{\beta|x-x_0|}$$

Dimostrazione. Guardiamo il caso $x > 0$ e poniamo

$$u(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^x v$$

Osserviamo che u verifica $u'(x) = \beta v(x)$ dunque

$$u' \leq \beta u(x) \quad \Rightarrow \quad u' - \beta u \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta(x-x_0)}(u' - \beta u) = [e^{-\beta(x-x_0)}u]' \leq 0$$

Ovvero la funzione $e^{-\beta(x-x_0)}u$ è decrescente, da cui

$$\forall x \geq x_0 \quad e^{-\beta(x-x_0)}u(x) \leq u(x_0) = \alpha$$

Poichè $0 \leq v(x) \leq u(x)$ si ha la tesi

□

Ripercorrendo la dimostrazione del teorema e usando il lemma ottengo

Teorema 16.8. *Nelle ipotesi precedenti si ha*

$$|y(x; y_0) - y(x; y_1)| \leq e^{L|x-x_0|} |y_0 - y_1| \quad \forall x \in I_{\bar{\delta}}$$

Dimostrazione. Ragionando come prima si arriva alla stima

$$|y(x; y_0) - y(x; y_1)| \leq |y_0 - y_1| + L \int_{x_0}^x |y(s; y_0) - y(s; y_1)| \, ds$$

e si conclude con il lemma di Gronwall dove $\alpha = |y_0 - y_1|$, $\beta = L$ e $v(x) = |y(x; y_0) - y(x; y_1)|$ □

Osservazione 107. Con un po' di attenzione si vede che c'è dipendenza continua (lipschitz) anche dalla coppia (x_0, y_0) ovvero c'è dipendenza continua delle soluzioni rispetto ai dati iniziali

16.3 Teorema di esistenza

Iniziamo ricordando un teorema di compattezza per funzioni continue su un compatto

Teorema 16.9 (di Ascoli-Arzelà). *Sia K uno spazio metrico compatto.*

Sia $(f_n)_n \subseteq C(K)$ tale che

1. $\sup_n |f_n(x)| < \infty$

2. *Le f_n sono equicontinue: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow \forall n \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon$*

Allora esiste $f \in C(K)$ e $(n_k)_k$ tale che $f_{n_k} \rightarrow f$ in $C(K)$ per $k \rightarrow +\infty$

Dimostrazione. Poichè K è compatto è separabile (ammette un denso numerabile)

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ con } X_n \text{ finiti}$$

infatti dato n la famiglia $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto e dunque esiste un sottoricoprimento finito $\{B(x, \frac{1}{n})\}_{x \in X_n}$.

Ora $\forall x \in K$ esiste $x' \in X_n$ con $d(x, x') \leq \frac{1}{n}$ dunque X è denso in K

Fissiamo un'enumerazione di $X = (x_n)_n$.

Per 1 la successione $n \rightarrow f_n(x_1)$ ammette una sottosuccessione $f_n^{(1)}(x_1)$ che converge a y_1 .

Applichiamo ora lo stesso ragionamento a $f_n^{(1)}(x_2)$ e così via ...

Sia $g_k = f_k^{(k)}$ allora $g_k(x_i) \rightarrow y_i$ per ogni $x_i \in X$.

Mostriamo che g_k è di Cauchy.

Dato $\varepsilon > 0$, esiste δ tale che valga la 2. Consideriamo \bar{n} tale che $\frac{1}{\bar{n}} < \delta$.

Sia $x_i \in X_{\bar{n}}$. Poichè $g_k(x_i)$ converge è di Cauchy ovvero

$$\exists k_{\varepsilon, i} \quad \forall x_i \in X_{\bar{n}} \quad |g_k(x_i) - g_l(x_i)| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_{\varepsilon, i}$$

Sia $k_\varepsilon = \max_i k_{\varepsilon, i}$

Fissato $x \in K$ esiste $x_j \in X_{\bar{n}}$ tale che $d(x, x_j) < \frac{1}{\bar{n}} < \delta$ dunque

$$|g_k(x) - g_l(x)| \leq |g_k(x) - g_k(x_j)| + |g_k(x_j) - g_l(x_j)| + |g_l(x_j) - g_l(x)| \leq 3\varepsilon \quad \forall k, l \geq k_\varepsilon$$

□

Osservazione 108. Se $f_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono tali che f_n sono equilimitate ed equicontinue su $\overline{B_R}$ per ogni $R > 0$.

Allora esiste una sottosuccessione f_{n_k} e una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua tale che

$$f_{n_k} \rightarrow f \text{ per } k \rightarrow +\infty$$

uniformemente in ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$

Teorema 16.10 (di Peano). *Sia $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua e limitata. Allora esiste una soluzione al problema di Cauchy (5) definita in $x \in I_\delta$ dove $\delta = \min \{a, \frac{r}{M}\}$ con $M = \|f\|_\infty$*

Dimostrazione. Si approssima f con funzioni localmente lipschitziane in y . Possiamo prendere ad esempio

$$f_k(x, y) = \inf_{z \in B(y_0, r)} \{f(x, z) + k|y - z|\}$$

Osserviamo che $f(x, z) + k|y - z|$ è una funzione k -lipschitz; essendo le funzioni lipschitz stabili per passaggio al limite si ha f_k lipschitz.

Per il teorema di esistenza ed unicità esiste un'unica $y_k : I_{\delta_k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $\delta_k \rightarrow \delta$) soluzione del problema

$$\begin{cases} y' = f_k(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Osserviamo che le y_k sono equilimitate, poichè $y'_k = f_k(x, y_k) \leq f(x, y_k)$ le y'_k sono equilimitate si ha y_k equilipschitz e di conseguenza equicontinue.

Per Ascoli-Arzelà esiste $\exists y : I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $y_k \rightarrow y$ uniformemente e a meno di sottosuccessioni. Ora le y_k verificano

$$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f_k(s, y_k(s)) ds$$

e passando al limite in k otteniamo

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

e dunque y è soluzione del problema di Cauchy □

Osservazione 109. In generale sotto le ipotesi del teorema di Pean la soluzione non è unica: dipende da come approssimiamo f .

Un altro modo potrebbe essere utilizzare i polinomi e usare il teorema di Stone-Weierstrass (i polinomi sono densi nelle funzioni continue)

Esempio 16.11 (Baffo di Peano). *Consideriamo il problema*

$$\begin{cases} y'(x) = 2\sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

allora al variare di $x_0 > 0$ abbiamo che tutte le funzioni della forma

$$\begin{cases} 0 & \text{se } x \leq x_0 \\ (x - x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \end{cases}$$

sono soluzioni.

Dunque non c'è unicità ma però abbiamo esistenza

Proposizione 16.12. *Supponiamo che $|f(x, y)| \leq a(x)|y| + b(x)$ con a, b funzioni continue e limitate. Allora ho esistenza globale delle soluzioni*

Dimostrazione. Se consideriamo il problema in $E = I_\delta \times \mathbb{R}^n$ e posto $A = \sup a(x)$, $B = \sup b$ ottengo

$$|y(x)| \leq y_0 + 2\delta B + A \int_{x_0}^x |y|$$

Ora, per Gronwall si ha

$$|y(x)| = (y_0 + 2\delta B)e^{A|x-x_0|} < +\infty$$

dunque ho esistenza globale della soluzione

17 Sistemi lineari

Consideriamo il sistema

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad (7)$$

dove $A : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M(n, n)$ continua e $Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ è una funzione vettoriale incognita

Osservazione 110. Consideriamo $M(n, n)$ con la norma operatore $\|M\| = \max_{x \in B(0,1)} |Mx|$

Osservazione 111. In questo caso siamo nelle ipotesi di esistenza ed unicità e anche di esistenza globale

Proposizione 17.1. *Le soluzioni dell'equazione $y'(x) = A(x)y(x)$ sono uno spazio vettoriale di dimensione n .*

Una base è data da $\{y_1, \dots, y_n\}$ dove y_i è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y(x) \\ y(0) = e_i \end{cases}$$

Dimostrazione. Il fatto che l'insieme delle soluzioni formi uno spazio vettoriale è una semplice verifica.

Per ogni $y_0 = ((y_0)_1, \dots, (y_0)_n)$ abbiamo

$$y(x) = \sum_{i=1}^n (y_0)_i y_i(x)$$

è l'unica soluzione del problema con dato iniziale y_0 □

Proposizione 17.2. *Le soluzioni dell'equazione $y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$ formano uno spazio affine di dimensione n .*

Se $y(x)$ è una soluzione allora vale

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

dove $y_p(x)$ è una soluzione particolare mentre $y_0(x)$ è una generica soluzione dell'equazione omogenea associata

Dimostrazione. Se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione allora

$$(y_1(x) - y_2(x))' = A(x)(y_1(x) - y_2(x))$$

e dunque la loro differenza risolve il sistema omogeneo associato □

Osservazione 112. Le equazioni lineari di ordine $k > 1$ rientrano in questo caso.

Se

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i(x)y^{(i)}(x) + b(x) \quad (8)$$

con $y, a_i, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ allora posto $Y(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $Y_i(x) = y^{(i-1)}(x)$, otteniamo che il sistema (??) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} Y_i'(x) = Y_{i+1} \\ Y_k'(x) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i Y_{i+1} + b(x) \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \end{pmatrix} \text{ e } B(x) = (0, \dots, 0, b(x))$$

17.1 Matrice Wronskiana

Definizione 17.1. Siano $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$ soluzioni di (7) allora la matrice

$$W(t) = (Y_1(t) \ \dots \ Y_n(t))$$

prende il nome di matrice wronskiana. Tale matrice soddisfa

$$W'(t) = A(t)W(t)$$

Osservazione 113. Sia $t_0 \in I$

$$Y_1, \dots, Y_n \text{ soluzioni linearmente dipendenti} \Rightarrow \det W(t_0) = 0$$

Osservazione 114.

$$\det(W(t_0)) = 0 \Rightarrow Y_1, \dots, Y_n \text{ linearmente dipendenti}$$

Dimostrazione. $\det W(t_0) = 0$ allora $Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0)$ sono linearmente dipendenti quindi

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0 \quad \sum \lambda_i Y_i(t_0) = 0$$

Ora $Y(t) = \sum \lambda_i Y_i(t)$ è una soluzione di (7) con $Y(t_0) = 0$ dunque per unicità $Y(t) = 0$ per ogni tempo t

Corollario 17.3.

$$\{Y_1, \dots, Y_n\} \text{ base dello spazio delle soluzioni} \Leftrightarrow \det (Y_1(t_0) \ \dots \ Y_n(t_0)) = 0 \text{ per } t_0 \in I$$

Proposizione 17.4. Sia $W(t)$ la matrice wronskiana per il sistema (7). Posto $w(t) = \det W(t)$ si ha

$$w'(t) = a(t)w(t) \text{ con } a(t) = \text{Tr}(A)$$

Dimostrazione. Sia $\Phi(M) = \det M$ allora abbiamo visto che

$$d\phi(M)[H] = \text{Tr}(HH^{-1}) \det M$$

dunque

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{d}{dt} (\phi(W(t))) = d\phi(W(t))[W'(t)] = \text{Tr} (W'(t)W(t)^{-1}) \det W(t) = \\ &= \text{Tr} (A(t)W(t)W(t)^{-1}) \det W(t) = \text{tr}(A)w(t) \end{aligned}$$

□

17.2 Esponenziale di matrici e caso a coefficienti costanti

Definizione 17.2. Sia $A \in M(n, n)$ allora definiamo l'esponenziale della matrice A come la funzione

$$e^{\cdot} : M(n, n) \rightarrow M(n, n) \quad e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Osservazione 115. Poniamo

$$f_k(A) = \frac{A^k}{k!}$$

allora otteniamo

$$f_k(A) \leq \frac{\|A\|^k}{k!}.$$

Ora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty$$

dunque per il criterio della convergenza totale (nello spazio $M(n, n)$) otteniamo che le somme parziali delle f_k convergono uniformemente sui compatti di $M(n, n)$

Proposizione 17.5. Valgono le seguenti proprietà

(i)

$$AB = BA \quad \Rightarrow \quad e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$$

(ii)

$$e^A = \lim_n \left(I + \frac{A}{n} \right)^n$$

dove I è la matrice identica

(iii)

$$\det e^A = e^{\text{tr}A}$$

(iv)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

(i)

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{A^i B^{k-i}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{A^i}{i!} \cdot \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $j = k - i$

(ii) Si ragiona come in \mathbb{R}

(iii) Si usa che $\det(I + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \text{tr}(A) + o(\varepsilon)$.

(iv) Verifica per esercizio

Teorema 17.6. La funzione $x \rightarrow e^{Ax}$ è differenziabile e si ha

$$\frac{d}{dx}e^{Ax} = Ae^{Ax}$$

Dimostrazione.

$$\frac{d}{dx}e^{Ax} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(x+h)} - e^{Ax}}{h} = e^{Ax} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$$

Ora

$$e^{Ah} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} = I + h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^{k-1}}{k!} = A + O(h)$$

da cui la tesi □

Corollario 17.7. Il sistema lineare omogeneo a coefficienti costanti

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ha come soluzione

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y_0$$

Corollario 17.8. La soluzione di

$$\begin{cases} y'(x) = Ay(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

è data da

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y_0 + e^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As}b(s) ds$$

Dimostrazione.

$$y'(x) = Ae^{A(x-x_0)}y_0 + Ae^{Ax} \int_{x_0}^x e^{-As}b(s) ds + e^{Ax}e^{-Ax}b(x) = Ay(x) + b(x)$$

e $y(x_0) = y_0$ □

17.2.1 Calcolo dell'esponenziale di matrici

Osservazione 116. Se $A = MCM^{-1}$ allora $e^{tA} = Me^{tC}M^{-1}$

Dimostrazione. Per induzione su k si prova che

$$A^k = (MCM^{-1})^k = MC^kM^{-1}$$

allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} M \frac{t^k C^k}{k!} M^{-1} = Me^{tC}M^{-1}$$

Sfruttando la forma canonica di Jordan: $A = MCM^{-1}$ dove

$$C = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix} \text{ dove } B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

data la struttura a blocchi

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tB_k} \end{pmatrix}$$

dunque basta capire come è fatto l'esponenziale di un blocco di Jordann.

Sia $B = \lambda I + N$ dove N è la matrice di tutti zeri tranne uni sulla sovra-diagonale principale. Poichè λI e N commutano si ha

$$e^{tB} = e^{t(\lambda I)} e^{tN} = e^{t\lambda} I e^{tN} \text{ con } e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{N^k}{k!}$$

La serie in realtà è una somma finita infatti se N ha taglia $m \times m$ si ha $N^l = 0$ dunque

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} e^{\lambda t} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Osservazione 117. Attenzione la forma canonica vale per matrici su \mathbb{C}

17.3 Classificazione dei sistemi 2×2

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice del sistema e supponiamola invertibile.

Il polinomio caratteristico di A è dato da $\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det A$.

Studiamo il comportamento del sistema al variare della forma di Jordan

- $\lambda_1 < \lambda_2$ autovalori reali distinti. Se v_1, v_2 sono gli autovettori. La soluzione generale è della forma

$$c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Allora si possono verificare 3 casi

- Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ allora abbiamo un nodo stabile
- Se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ allora si parla di nodo instabile
- Se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ allora si parla di sella
- Un unico autovalore λ
 - se $b = c = 0$ allora ho un nodo a stella la soluzione è della forma

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

che può essere instabile ($\lambda < 0$) oppure stabile ($\lambda > 0$)

- $(b, c) \neq (0, 0)$ allora è un blocco di Jordan di taglia 2. Le soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

in questo caso si parla di nodo degenere (stabile o instabile)

- Due autovalori complessi coniugati.
Sia $\lambda = \alpha + i\beta$ un autovalore e $h \in \mathbb{C}^2$ un autovettore corrispondente.
Allora in questo caso \bar{h} è l'autovettore corrispondente a $\bar{\lambda}$.
Posto

$$\xi = \frac{1}{2}(h + \bar{h}) \quad \eta = \frac{1}{2}(h - \bar{h})$$

si ha

$$\begin{aligned} A\xi &= \alpha\xi - \beta\eta \\ A\eta &= \alpha\xi + \beta\eta \end{aligned}$$

dunque nella base $\{\xi, \eta\}$ abbiamo $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Cerchiamo dunque delle soluzioni della forma

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \alpha x + \beta y \end{cases} \quad (9)$$

Introducendo le coordinate polari otteniamo che il sistema (9) è equivalente a

$$\alpha\rho \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \beta\rho \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \rho' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \rho\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Ora poichè i vettori $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ sono ortogonali si ha che il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} \rho' = \alpha\rho \\ \theta'\rho = \beta\rho \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta(t + t_0) \end{cases}$$

da cui abbiamo i seguenti casi

- $\alpha = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0$ dunque le orbite sono cerchi. Si parla di centro
- $\alpha < 0$ si parla di fuoco stabile
- $\alpha > 0$ si parla di fuoco instabile

Riassumiamo la catalogazione. Posto

$$\begin{cases} p = \text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ q = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \end{cases}$$

si possono verificare le seguenti situazioni

Autovalori distinti $p^2 - 4q > 0$	Autovalori coincidenti $p^2 - 4q = 0$	Autovalori complessi $p^2 - 4q < 0$
punto di sella (autovalori di segno opposto: $q < 0$)	nodo a stella (diagonalizzabile)	centro ($p = 0$)
nodo ($q > 0$)	nodo degenero	fuoco

Tabella 1: Classificazione dei sistemi 2×2

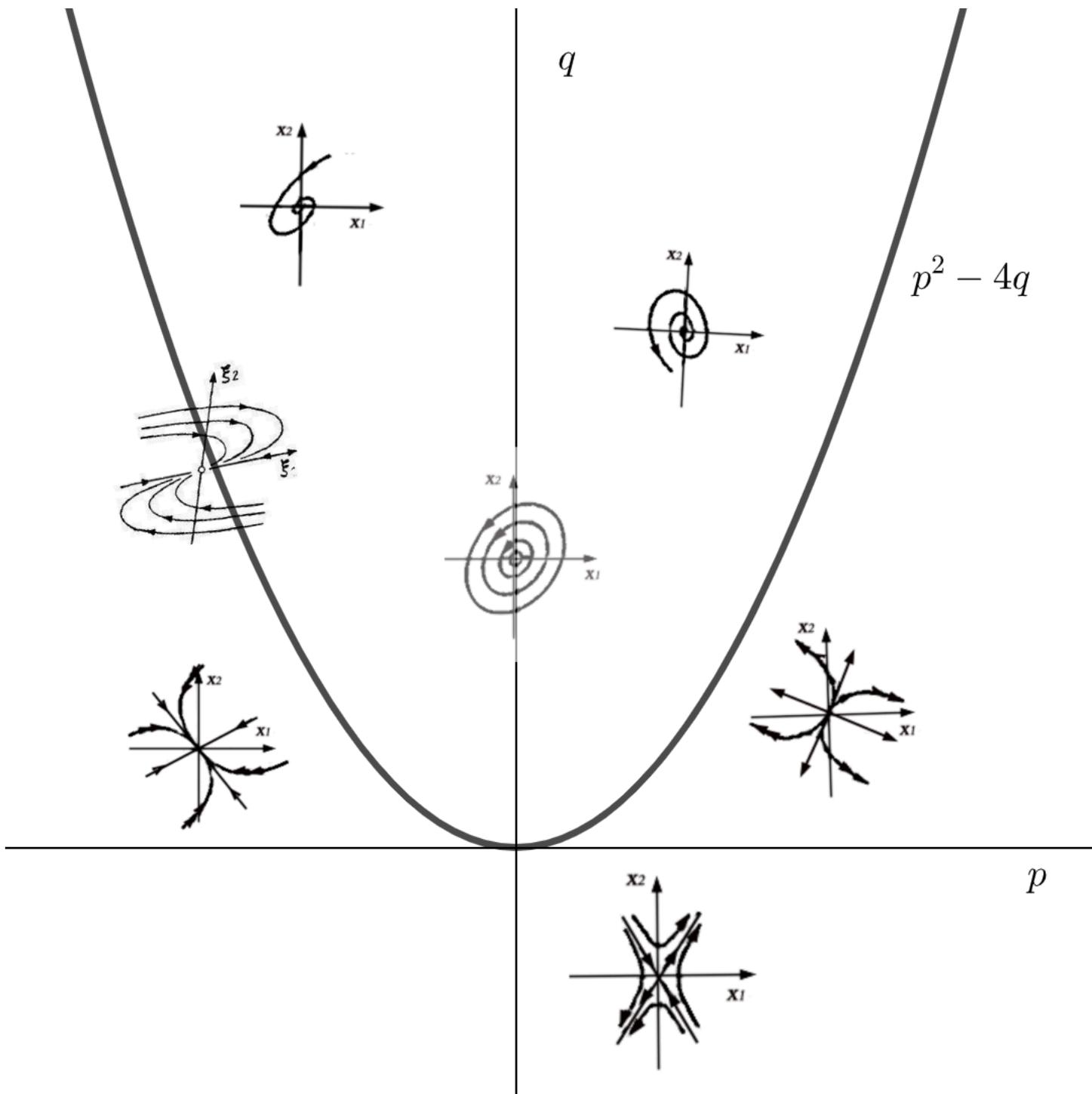


Figura 1: Diverse orbite a seconda dei valori di $p = \text{Tr}(A)$ e $q = \det A$

18 Sistemi autonomi

18.1 Sistemi autonomi

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ localment lipschitziana. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y' = F(y) & (\star) \\ y(t_0) = p & (C.I.) \end{cases}$$

diremo che tale sistema è **autonomo**: F non dipende dal tempo

Proposizione 18.1. *Per ogni punto $p \in \Omega$ passa un'unica orbita, ovvero, se Y_1, Y_2 soddisfano (\star) e sono tali che $Y_1(t_1) = Y_2(t_2) = p$ allora $Y_2(t) = Y_1(t + t_1 - t_2)$*

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{Y}_1 = Y_1(t + t_1 - t_2)$ allora $Y_2(t_2) = p = \tilde{Y}_1(t_2)$ allora $Y_2(t) = \tilde{Y}_1(t)$ infatti sono due soluzioni con le stesse condizioni iniziali

Corollario 18.2. *Se y è soluzione di (\star) con $y(t_1) = y(t_2)$ allora y è periodica*

Proposizione 18.3. *Sia $\varphi \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ con $\varphi > 0$ allora i due sistemi*

$$y' = F(y) \quad u' = \varphi(u)F(u)$$

hanno le stesse orbite

Dimostrazione. Sia y è soluzione di (\star) con $y(0) = p$.

Sia h tale che $h'(t) = \varphi(y(t))$ con $h(0) = 0$.

La funzione $u(t) = y(h(t))$ è tale per cui

$$u'(t) = y'(h(t))h'(t) = F(y(h(t)))\varphi(y(h(t)))$$

Poichè $u(0) = p$ si conclude per unicità

Osservazione 118. Se y è soluzione di $y' = F(y)$ allora $u = y(-t)$ è soluzione di $u' = -F(u)$

18.2 Integrali primi

Definizione 18.1. Sia $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ si indica con

$$\dot{V}(p) = \nabla V(p) \cdot F(x)$$

Osservazione 119. Sia $y(t)$ una soluzione del problema $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = p \end{cases}$ allora $\dot{V}(p) = \left. \frac{d}{dt} V(y(t)) \right|_{t=0}$

Definizione 18.2. \mathcal{E} si dice integrale primo di $y' = F(y)$ se $\dot{\mathcal{E}} = 0$ per ogni punto $p \in \Omega$

Definizione 18.3. Il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

si dice esatto se lo è la forma $g dx - f dy$

Proposizione 18.4. *Un sistema esatto ammette un integrale primo*

Dimostrazione. Se ω esatta allora esiste una funzione \mathcal{E} tale che $\partial_x \mathcal{E} = g$ e $\partial_y \mathcal{E} = -f$. Allora

$$\dot{\mathcal{E}} = \nabla \mathcal{E} \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = gf - fg = 0$$

Esempio 18.5 (Pendolo semplice). *L'equazione differenziale che descrive il pendolo semplice è*

$$\varphi'' = -k \sin \varphi \text{ dove } k = \frac{g}{l}$$

con φ l'angolo che il pendolo forma con la direzione verticale e l la lunghezza del filo.

Tale sistema risulta equivalente a

$$\begin{cases} \varphi' = I \\ I' = -k \sin \varphi \end{cases}$$

Ora la forma $-k \sin \varphi d\varphi - I dI$ è esatta e una sua primitiva è la funzione

$$\mathcal{E}(\varphi, I) = \frac{1}{2} I^2 + k(1 - \cos \varphi)$$

per la proposizione precedente \mathcal{E} è un integrale primo. Le traiettorie sono $\mathcal{E}(\varphi, I) = \text{cost}$

18.3 Stabilità di sistemi

Notazione: con $\varphi_p(t)$ denotiamo la soluzione del sistema

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = p \end{cases} \quad (10)$$

Definizione 18.4.

- $p_0 \in \Omega$ si dice **punto stazionario** per il sistema (10) se $F(P_0) = 0$.
- Un punto stazionario P_0 si dice **iperbolico** se $Re(\lambda) \neq 0$ per ogni autovalore λ di $Df(P_0)$
- Un punto stazionario P_0 si dice **stabile** se

$$\forall R > 0 \quad \exists r > 0 \quad \forall p \in B(P_0, r) \quad |\varphi_p(t) - P_0| < R \quad \forall t$$

- Un punto stazionario P_0 si dice **asintoticamente stabile** se è stabile e

$$\exists r > 0 \quad \forall p \in B(P_0, r) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = P_0$$

Definiamo il **bacino di attrazione** del punto P_0 come l'insieme

$$\Omega_{P_0} = \left\{ p \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_p(t) = P_0 \right\}$$

18.4 Funzioni di Lyapunov

Definizione 18.5. Sia P_0 un punto di equilibrio per il sistema $y' = F(y)$ (cioè $F(P_0) = 0$). V è una **funzione di Lyapunov** vicino all'equilibrio P_0 se è continua

- (i) $V(P_0) = 0$ e $V(x) > 0$ per $x \neq P_0$
- (ii) $\dot{V}(x) \leq 0$ per ogni x

Proposizione 18.6. Se P_0 ha una funzione di Lyapunov allora è stabile. Inoltre se vale $\dot{V}(x) < 0$ per ogni $x \neq P_0$ allora P_0 è asintoticamente stabile

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo $P_0 = 0$ e $B(0, R) \subseteq \Omega$. Sia

$$m = \min_{|x|=R} V(x) > 0$$

Fissato $0 < \varepsilon < m$, scelgo r_0 tale che $B(0, r) \subseteq \{x : V(x) < \varepsilon\}$ (posso farlo per la continuità di V e poichè $V(0) = 0$).

Fissato $P \in B(0, r)$ vogliamo provare che $\varphi_P(t) \in B(0, r)$ per ogni $t > 0$.

Poniamo

$$\psi(t) = V(\varphi_P(t))$$

allora

$$\psi'(t) = \nabla V(\varphi_P(t)) \varphi_P'(t) = \nabla V(\varphi_P(t)) \cdot F(\varphi_P(t)) = \dot{V}(\varphi_P(t)) < 0$$

dunque ψ è decrescente da cui $\psi(t) \leq \psi(0) = V(p) < \varepsilon$.

Poichè $\varepsilon < m$ si ha $\varphi_P(t) \notin \partial B(0, R)$ e dunque $|\varphi_P(t)| < R$ per ogni $t > 0$.

Andiamo a mostrare il secondo punto.

Sia ψ come sopra, $\psi' < 0$ e

$$c_0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t)$$

Mostriamo che c_0 non può essere positivo.

Se per assurdo $c_0 > 0$ allora prendo δ con $B(0, \delta) \subseteq \{x : V(x) < c_0\}$

Poichè ψ decrescente, $\psi(t) > c_0$ da cui $\varphi_P(t) \notin B(0, \delta)$.

Sia

$$\sigma = \max_{\delta \leq |x| \leq r} \dot{V}(x) < 0$$

Abbiamo visto che $\psi'(t) = \dot{V}(\varphi_P(t)) \leq \sigma$ da cui $\psi(t) \leq \psi(0) + \sigma t$ il che è assurdo infatti poichè $\sigma < 0$ esiste t con $\psi(t) < c_0$.

Dunque $c_0 = 0$ e poichè $V > 0$ si ha $\psi(t) \rightarrow 0$, da cui $\varphi_P(t) \rightarrow 0$

Proposizione 18.7 (Condizione per l'instabilità). Se $\exists W \in C^1(\Omega)$ tale che

- $W(P_0) = 0$ ed $\exists P_k \rightarrow P_0$ con $W(P_k) > 0$
- $\dot{W}(x) > 0$ per ogni $x \neq P_0$

allora P_0 è un punto instabile

Dimostrazione. NON MI TORNA

Per vedere la stabilità di un punto stazionario possiamo, sotto opportune ipotesi, studiare la stabilità del sistema linearizzato

Teorema 18.8 (di linearizzazione o di Hartman-Grobman).

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e p_0 un punto stazionario iperbolico.

Allora esiste U intorno di p ed un omeomorfismo $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ che mappa le traiettorie del sistema $y' = f(y)$ in quello del linearizzato $Y' = Df(p)Y$.

Più precisamente: $\Phi(p) = 0$ e

$$Y(t, \phi(y_0)) = \Phi(y(t, y_0))$$

dove $y(t, y_0)$ è soluzione di $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(p) = y_0 \in U \end{cases}$ e $Y(t, Y_0)$ è soluzione del sistema $\begin{cases} Y' = Df(p)Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$

Dimostrazione. Omessa, deriva dal teorema delle contrazioni

Teorema 18.9. Siano $(\lambda_i)_{i=1}^n$ autovalori di $A = DF(0)$

- (i) $Re(\lambda_i) < 0 \forall i \Rightarrow 0$ asintoticamente stabile
- (ii) $\exists \lambda_m Re(\lambda_m) > 0 \Rightarrow 0$ instabile

Dimostrazione. (i) Mostriamolo solo nel caso di autovalori reali semplici.

Sia B matrice invertibile tale che $BAB^{-1} = J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e sia $x(t) = By(t)$ allora

$$x' = By' = BAy + BRy = BAB^{-1}(By) + BRB^{-1}(By) = BAB^{-1}x + BR(B^{-1}x)$$

ovvero

$$x' = Jx + \tilde{R}(x) \text{ con } \tilde{R} = o(|x|)$$

Si verifica che $V(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ è un'opportuna funzione di Lyapurov su un opportuno intorno di 0.

Sia $\varphi_P(t)$ la soluzione del sistema $\begin{cases} x' = Jx + \tilde{R}(x) \\ x(0) = p \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = x \left(Jx + \tilde{R}x \right) = \sum \lambda_i x_i^2 + x\tilde{R}x \leq -\mu|x|^2 + x\tilde{R}(x)$$

con $\lambda_i < -\mu < 0$.

Ora $x\tilde{R}(x) = o(|x^2|)$ dunque è possibile scegliere un intorno di 0 tale che

$$-\mu|x^2| + x\tilde{R}(x) \leq -\frac{\mu}{2}|x|^2$$

Da cui su tale intorno vale $\dot{V} < 0$ e dunque 0 è asintoticamente stabile.

Dimostrazione. (ii) Supponiamo sempre che gli autovalori siano reali semplici con

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 0 < \lambda_{k+1} < \dots < \lambda_n$$

dunque possiamo applicare il criterio d'instabilità al sistema $x' = Jx + \tilde{R}(x)$ usando la funzione

$$2W = -\sum_{i \leq k} x_i^2 + \sum_{i > k+1} x_i^2$$

Teorema 18.10. *Supponiamo che $Re(\lambda_i) \leq 0$ e $Re(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i$ semplice. Allora 0 è stabile (centro) ma non asintoticamente per il sistema lineare.*

Dimostrazione. Supponiamo adesso $\lambda_k = i\beta$ autovalore semplice. Il suo blocco di Jordan reale è

$$J = \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Andiamo a calcolare e^{tJ}

$$e^{tJ} = \sum_{h=0}^{\infty} \beta^h \frac{t^h J^h}{h!} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j} \frac{t^{2j} J^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j+1} \frac{t^{2j+1} J^{2j+1}}{(2j+1)!} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

Il sistema non è asintoticamente stabile infatti se v è autovettore relativo a $i\beta$ allora $e^{tA}v \not\rightarrow 0$

Osservazione 120. Nel caso di autovalori con parte reale nulla, il sistema non lineare può avere comportamenti differenti.

Ad esempio, possiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} x' = -y - kx(x^2 + y^2) \\ y' = x - ky(x^2 + y^2) \end{cases}$$

allora la funzione

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

è una funzione di Lyapunov con $\dot{V} = -k(x^2 + y^2)$ dunque 0 è asintoticamente stabile se $k > 0$ mentre è instabile se $k < 0$.

Se consideriamo il sistema lineare associato:

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$$

si vede che 0 è un centro

Teorema 18.11. *Se $Re(\lambda_i) \leq 0$ e esiste λ_k autovalore multiplo con $Re(\lambda_k) = 0$ allora 0 è instabile per il sistema lineare*

Dimostrazione. Sia $\lambda_k = i\beta$ autovalore multiplo, allora il suo blocco di Jordan è della forma

$$J_k = \begin{pmatrix} i\beta & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & i\beta \end{pmatrix}$$

e dunque $e^{J_k t}$ ha componenti che tendono a $+\infty$ per $t \rightarrow +\infty$

18.5 Insiemi limite

Definizione 18.6. Data una soluzione $y(t)$ con $y(t_0) = y_0$

- Se è definita su $[t_0, +\infty)$ si dice ω -**limite** l'insieme di "accumulazione" di $y(t)$ per $t \rightarrow +\infty$.

$$\bar{y} \in \omega\text{-limite} \Leftrightarrow \exists (t_n)_n \ t_n \rightarrow +\infty \text{ con } y(t_n) \rightarrow \bar{y}$$

- Se è definita su $(-\infty, t_0]$ si definisce in modo analogo l' α -**limite** come l'insieme di "accumulazione" di $y(t)$ per $t \rightarrow -\infty$.

Proposizione 18.12. Sia L l' ω -limite di $y(t)$ allora

1. L chiuso

2. L è invariante: $\forall y_0 \in L$ consideriamo \tilde{y} la soluzione del sistema $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ allora $\tilde{y}(t) \in L$ per ogni $t > 0$

3. se L è compatto allora è connesso

Dimostrazione.

1. Sia \bar{y} è un punto di accumulazione per L allora esiste una successione (y_n) tale che

$$y_n \rightarrow \bar{y} \text{ con } y_n \in L \text{ e } |y_n - \bar{y}| < \frac{1}{n}$$

Poichè $y_n \in L$ allora $\exists y(t_n)$ tale che $|y(t_n) - y_n| < \frac{1}{n}$.

Con tale costruzione si ha $y(t_n) \rightarrow \bar{y}$ ovvero $\bar{y} \in L$

2. Sia $\tilde{y}(t)$ la soluzione di $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \in L \end{cases}$.

Poichè $y_0 \in L$ esiste (t_n) tale che $y(t_n) \rightarrow y_0$.

Ora poichè si ha dipendenza continua dai dati iniziali allora vale $y(t_n + t) \rightarrow \tilde{y}(t)$ e quindi $\tilde{y}(t) \in L$ per ogni $t > 0$

3. Supponiamo per assurdo che L non sia connesso: $\exists U_1, U_2$ aperti disgiunti tali che

$$L = L_1 \cup L_2 \text{ con } L_i = L \cap U_i$$

Poichè L_1, L_2 sono compatti disgiunti si ha $\text{dist}(L_1, L_2) = \delta > 0$.

Sia

$$\Sigma = \left\{ y : \text{dist}(yy, L_2) = \frac{\delta}{2} \right\}$$

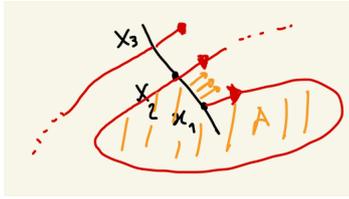
Sia (t_n) con $t_n \rightarrow +\infty$ tale che $y(t_n) \in \Sigma$, poichè Σ compatto, $\exists (t_{n_k})$ tale che $y(t_{n_k}) \rightarrow \bar{y} \in \Sigma$.

Abbiamo dunque provato che $\bar{y} \in L \cap \Sigma$ il che è assurdo infatti $L \cap \Sigma = \emptyset$ (L_2 dista 0 e L_1 dista δ) \square

Definizione 18.7. Sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare ed iniettiva. $S = \gamma([0, 1])$ si dice **sezione locale** del flusso se $f(y)$ non è mai ortogonale ad S per $y \in S$

Lemma 18.13. Sia S una sezione locale e $y(t)$ soluzione.

Sia $\{t_1 < t_2 < \dots < t_N\}$ tali che $x_i = x(t_i) \in S$. Allora x_i è monotona in S ovvero $\gamma^{-1}(x_i)$ è monotona in $[0, 1]$



Dimostrazione. Dal disegno: $\mathbb{R}^2 \setminus A$ è invariante quindi x_3 non può stare tra x_1 e x_2

Teorema 18.14 (di Poincarè-Bendixson). Sia $n = 2$.

Sia L l'insieme limite compatto di $x(t)$. Supponiamo che L non contenga punti stazionari (ovvero $f(x) \neq 0$ per $x \in L$) allora L è un'orbita periodica (non costante). In tal caso L si dice **ciclo limite** di $x(t)$

Dimostrazione. Fissato $y_0 \in L$ sia $y(t)$ la soluzione del problema
$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Sia \bar{L} l' ω -limite di $y(t)$ allora per la proposizione precedente $y(t) \in L$ ovvero $\bar{L} \subseteq L$

Preso $z_0 \in \bar{L}$ sia S una sezione locale in z_0 .

Poichè $z_0 \in \bar{L}$ esiste una successione (t_n) tale che $t_n \rightarrow +\infty$ e $y(t_n) \rightarrow z_0$. Poichè $z_0 \in S$, in particolare esiste $t'_n \rightarrow +\infty$ con $y_n = y(t'_n) \rightarrow z_0$ tale che $y_n \in S$.

Per il lemma y_n è monotona su S . Proviamo che $y_n = z_0$ per ogni n .

Se per assurdo $y_n \neq y_m \in L$ allora

$$y_n \in L \Rightarrow \exists(\tau_k) \quad x(\tau_k) \rightarrow y_n$$

$$y_m \in L \Rightarrow \exists(\sigma_k) \quad x(\sigma_k) \rightarrow y_m$$

inoltre posso supporre che $\forall k$ si abbia $x(\tau_k), x(\sigma_k) \in S$, dunque $x(t)$ non interseca S in maniera monotona. Il che è assurdo.

Mostriamo ora che $L = \bar{L}$. Per assurdo $L \setminus \bar{L} \neq \emptyset$.

Poichè $x(t)$ non interseca $y(t)$ si ha $L \setminus \bar{L}$ sta tutto fuori o dentro da \bar{L} .

Supponiamo per assurdo $z_0 \in L \setminus \bar{L} \neq \emptyset$.

Posto $z(t)$ la soluzione del problema con $z(0) = z_0$, $z(t)$ è un'altra orbita periodica: L deve stare fuori da $Im(z(t))$ e contenere $Im(y(t))$ il che è assurdo

Corollario 18.15. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto e invariante per $y' = f(y)$ senza punti stazionari. Allora K contiene un'orbita periodica

Dimostrazione. Basta prendere L' l' ω -limite di $y(t; y_0)$ per un qualunque $y_0 \in K$

Osservazione 121. K si dice invariante per $y' = F(y)$ se $f(y) \cdot n_e(y) < 0$ per ogni $x \in \partial K$

Esempio 18.16. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = x - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

allora $(0, 0)$ è l'unico punto stazionario ed è un fuoco instabile. Infatti

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che come autovalori $\lambda_1 = 1 + i$ e $\lambda_2 = 1 - i$.

Consideriamo l'insieme

$$K = \overline{B(0, R)} \setminus B(0, \varepsilon)$$

dove $\varepsilon \ll 1$ e $\gg 1$.

Mostriamo che K è invariante infatti $\partial K = \partial B(0, R) \cup \partial B(0, \varepsilon)$ Sul primo bordo la normale esterna è $(x(t), y(t))$ mentre sul secondo è $(-x(t), -y(t))$ da cui

$$\text{su } \partial B(0, R) \quad f \cdot n = R^2 - R^4 < 0$$

$$\text{su } \partial B(0, \varepsilon) \quad f \cdot n = \varepsilon^4 - \varepsilon^2 < 0$$

dunque per il corollario esiste un'orbita periodica.

In realtà, in questo esempio è facile trovarla infatti passando in coordinate polari il sistema diventa

$$\begin{cases} \rho' = \rho - \rho^3 \\ \theta' = 0 \end{cases}$$

e dunque l'unica orbita periodica si ha per $\rho(t) = 1$ e $\theta(t) = t$

18.6 Dinamica di popolazione

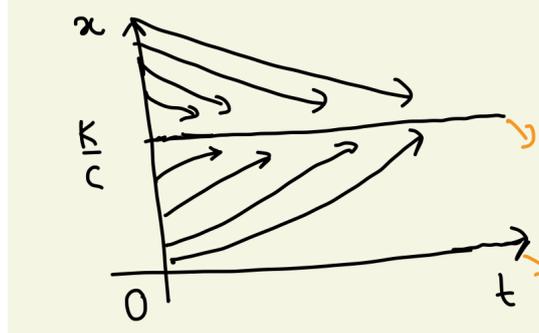
Esempio 18.17 (Una popolazione in competizione). Possiamo modellare la dinamica di una singola popolazione con risorse limitate come

$$x'(t) = kx - cx^2$$

dove il termine quadratico modella la competizione per le stesse risorse.

Nel modello precedente si ha che $x(t) = \frac{k}{c}$ è una soluzione stazionaria stabile, mentre $x(t) = 0$ è una soluzione stazionaria instabile.

Le soluzioni sono



Esempio 18.18 (Due popolazioni in competizioni). Analogamente all'esempio precedente possiamo scrivere

$$\begin{cases} x' = (k_1 - a_{11}x - a_{12}y)x \\ y' = (k_2 - a_{21}x - a_{22}y)y \end{cases}$$

dove tutti i coefficienti sono positivi (k_i è il tasso di crescita mentre gli a_i è il tasso di competizione).

Cerchiamo i punti stazionari

$$x' = 0 \Leftrightarrow k_1 - a_{11}x - a_{12}y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{k_1}{a_{12}} \text{ retta } R_1$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{k_2}{a_{22}} \text{ retta } R_2$$

Studiamo le orbite nel primo quadrante (le popolazioni sono positive) Andiamo a analizzare vari casi

- Le due rette non si intersecano nel quadrante.

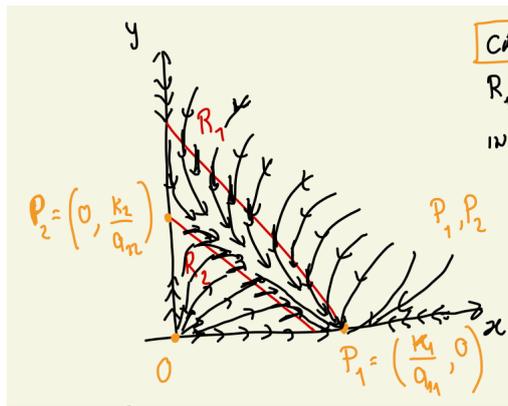
Studiando la matrice jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} k_1 - 2a_{11}x - a_{12}y & -a_{12}x \\ -a_{21}y & k_2 - a_{21}x - 2a_{22}y \end{pmatrix}$$

si trova la natura dei punti stazionari

- O è un nodo instabile
- $P_1 = \left(\frac{k_1}{a_{11}}, 0\right)$ è un nodo stabile
- $P_2 = \left(0, \frac{k_2}{a_{22}}\right)$ è una sella.

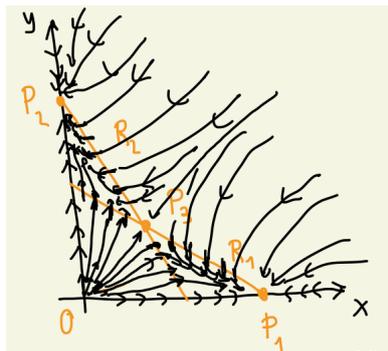
Otteniamo una ritratto di fase come in figura ovvero tutte le soluzioni tendono a P_1 ovvero sopravvive solo la prima popolazione



• Le due rette si intersecano in P_3 con $\frac{k_2}{a_{22}} > \frac{k_1}{a_{12}}$ allora studiando la matrice Jacobiano otteniamo

- 0 è un nodo instabile
- P_1, P_2 sono nodi stabili
- P_3 è una sella

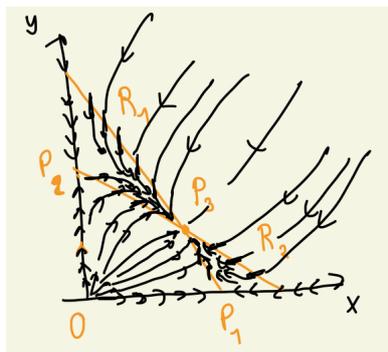
Otteniamo un ritratto di fase come in figura ovvero sopravvive solo una popolazione



Le due rette si intersecano con $\frac{k_2}{a_{22}} < \frac{k_1}{a_{12}}$ allora studiando la matrice Jacobiana si ha

- 0 nodo instabile P_1, P_2 selle
- P_3 nodo stabile

Otteniamo un ritratto di fase come in figura ovvero le due popolazione convivono



Esempio 18.19 (Modello preda-predatore). Consideriamo un modello dove le prede $x(t)$ hanno cibo e spazio in abbondanza (non competizione con se stesso) e i predatori $y(t)$ in assenza di prede calano di numeri. Dunque abbiamo

$$\begin{cases} x' = (a - by)x \\ y' = (-c + dx)y \end{cases}$$

Cerchiamo i punti stazionari

$$x' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ o } y = \frac{a}{b}$$

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0 \text{ o } x = \frac{c}{d}$$

dunque abbiamo due punti stazionari

$$O = (0, 0) \quad P = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$$

scrivendoci la matrice Jacobiana del linearizzato otteniamo

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

dunque si ha che $(0, 0)$ è una sella.

Osserviamo, inoltre, che in P non vale il teorema di linearizzazione (infatti la $J(P)$ ha autovalori immaginari puri). Dunque cerchiamo un integrale primo cioè

$$V : (0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \nabla V(x(t), y(t)) \cdot (x', y') = V_x(x, y) ((a - by)x) + V_y(x, y) ((-c + dx)y) = 0$$

Dividendo per xy otteniamo

$$V_x \left(\frac{a}{y} - b\right) + V_y \left(-\frac{c}{x} + d\right) x = 0$$

Ad esempio possiamo porre

$$V_x(x, y) = -\frac{c}{x} + d \quad \Rightarrow \quad V = -c \log x + dx + f(y)$$

$$V_y(x, y) = -\frac{a}{y} + b \quad \Rightarrow \quad V = -a \log y + by + g(x)$$

Dunque

$$V(x, y) = dx + by - c \log x - a \log y$$

è un integrale primo.

V è coerciva nel quadrante con minimo in P dunque P è un centro

Esempio 18.20 (Preda-Predatore più realistico). Introduciamo al modello precedente la competizione ottenendo

$$\begin{cases} x' = (a - by - \varepsilon x)x \\ y' = (-c + dx - \delta y)y \end{cases}$$

Andiamo a calcolare i punti stazionari

$$x' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } a - by - \varepsilon x = 0 \text{ retta } R_1$$

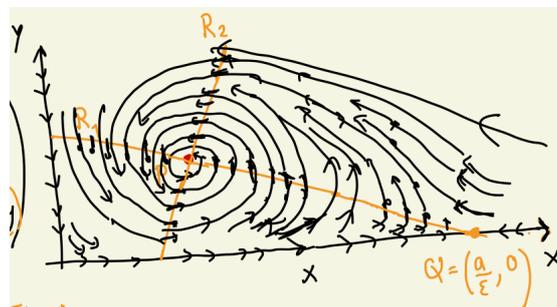
$$y' = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ o } -c + dx - \delta y = 0 \text{ retta } R_2$$

Sia P il punto d'intersezione delle due rette e Q il punto in cui la retta R_1 interseca l'asse delle x .

Studiando il Jacobiano

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - 2\varepsilon x - by - by & -bx \\ dy & -c + dx - 2\delta y \end{pmatrix}$$

si prova che O, Q sono selle mentre P è un fuoco stabile (la V precedente è una funzione di Liapunov) ottenendo un ritratto di fase come in figura



19 Appendice

19.1 Funzioni armoniche

Definizione 19.1. Sia A un aperto di \mathbb{R}^n e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile 2 volte in A . f si dice **armonica** in A se

$$\Delta f(x) = \text{tr}(\nabla^2 f(x)) = 0 \text{ in } U$$

Proposizione 19.1. Sia A un aperto limitato di \mathbb{R}^n e sia $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^0(\bar{A}) \cap C^2(A)$ e armonica in A . Allora f assume minimo e massimo su ∂A

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che

$$f(x_0) = \max_{x \in \bar{A}} f(x) > \max_{x \in \partial A} f(x)$$

dunque esiste $\varepsilon > 0$ con

$$f(x_0) > \max_{x \in \partial A} (f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2)$$

Sia $g(x) = f(x) + \varepsilon |x - x_0|^2$, per Weistrass g ammette massimo x_1 . Dall'ultima disuguaglianza $x_1 \in U$ dunque $\nabla g(x_1) = 0$ e $D^2 g(x_1) \leq 0$. Ora

$$0 \geq D^2 g(x_1) = D^2 f(x_1) + 2\varepsilon Id$$

Ora applicando l'operatore traccia

$$0 \geq \Delta g(x_1) = \Delta f(x_1) + 2\varepsilon n > 0$$

Abbiamo dunque un assurdo. □

19.2 (DA SISTEMARE) Funzioni omogenee

Definizione 19.2. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice α -omogenea se

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \quad \forall t > 0$$

Osservazione 122. La norma è 1-omogenea

Teorema 19.2.

$$f \text{ differenziabile e } \alpha\text{-omogenea} \Leftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$$

Dimostrazione. Sia $F(t) = \frac{f(tx)}{t^\alpha}$ definita per $t > 0$. F è derivabile e vale

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(tx)}{t^\alpha} \right) = \frac{1}{t^{\alpha+1}} (\nabla f(x_0) \cdot tx - \alpha f(tx))$$

Allora abbiamo

$$f(tx) = t^\alpha f(x) \Leftrightarrow F \text{ costante} \Leftrightarrow F'(t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \nabla f(x) \cdot x = \alpha f(x)$$

□

19.3 Funzioni Lipschitz

Definizione 19.3. Una funzione $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice L -lipschitz con $L \in \mathbb{R}_+$ se

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Osservazione 123.

$$f \text{ è } L\text{-lipschitz} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y) + Ld(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Dimostrazione. \Rightarrow ovvia

\Leftarrow se la condizione vale per ogni coppia (x, y) vale anche per la coppia (y, x) da cui la tesi

Lemma 19.3. Siano $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ funzione da X a valori in \mathbb{R} L -lipschitz (A è arbitrario)

$$f(x) = \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(x) \quad \Rightarrow \quad f \text{ } L\text{-lipschitz}$$

Dimostrazione. Dall'osservazione precedente abbiamo $f_\alpha(x) \leq f_\alpha(y) + Ld(x, y)$.

Ma $f(x) \leq f_\alpha(x)$ dunque $f(x)$ è un minorante per $\{f_\alpha(y) + Ld(x, y)\}$ quindi

$$f(x) \leq \inf_{\alpha \in A} f_\alpha(y) + Ld(x, y) = f(y) + Ld(x, y)$$

la tesi segue dall'osservazione precedente

Definizione 19.4. Sia (X, d) uno spazio metrico e $a \in X$. Poniamo $f_a(x) = d(x, a)$ (1-Lipschitz).

Definiamo **distanza dall'insieme** $A \subseteq X$ come

$$d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

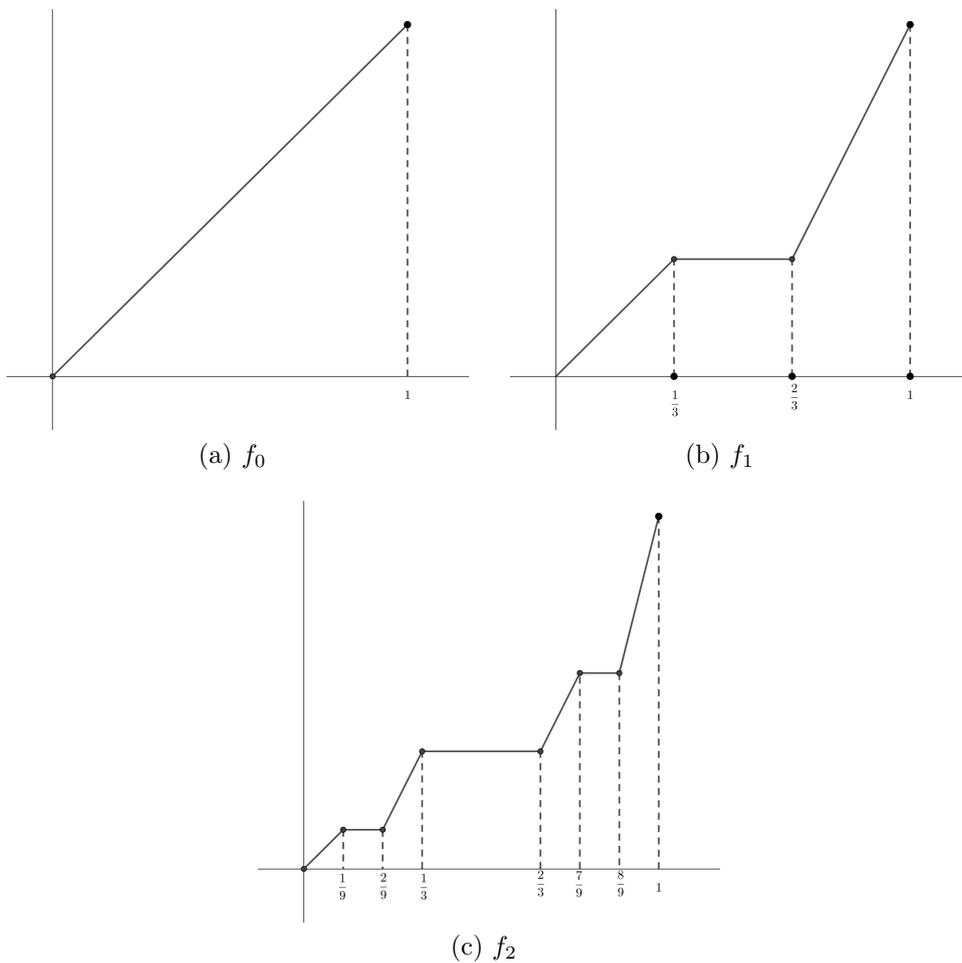
Osservazione 124. Per il lemma precedente $d_A(x)$ è una funzione 1-lipschitz

Esercizio 19.4.

$$d_A(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \overline{A}$$

19.4 Una costruzione alternativa della scala del diavolo

. Consideriamo la successione di funzioni definita come segue.



Si può dimostrare che f_n tende uniformemente alla scala del diavolo dunque la scala del diavolo è continua

19.5 Misurabilità secondo Jordan

Definizione 19.5. Poniamo

$$m_J^* = \inf \{m(P) : E \subseteq P \text{ con } P \text{ plurirettangolo}\}$$

$$m_{J*} = \sup \{m(P) : P \subseteq E \text{ con } P \text{ plurirettangolo}\}$$

Un insieme E si dice **misurabile secondo Jordan** se $m_J^*(E) = m_{J*}(E)$.

Osservazione 125.

$$E \text{ misurabile secondo Jordan} \quad \Rightarrow \quad E \text{ misurabile secondo Lebesgue}$$

Infatti

$$m_{J*}(E) \leq m_*(E) \leq m^*(E) \leq m_J^*(E)$$

Le prossime 2 osservazioni ci mostrano che il viceversa non è valido

Osservazione 126 (Razionali ingrassati). Fissiamo un'enumerazione $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dei razionali.

$$A_\varepsilon = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \left(q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j-1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \right)$$

allora A_ε è un aperto dunque è Lebesgue misurabile e vale

$$\frac{\varepsilon}{2} < m(A_\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$$

Osserviamo che A_ε è un insieme denso dunque non è Jordan misurabile infatti

$$m_J^*(A_\varepsilon \cap [a, b]) = b - a \quad \forall a < b$$

$$m_{J*}(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon)$$

Osservazione 127. Esistono insiemi Lebesgue misurabili ma non Jordan misurabili.

Sia $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ allora $m_{J*}(E) = m_*(E) = m^*(E) = 0$ ma $m_J^*(E) = 1$.

Dunque E ha misura di Lebesgue pari a 0 ma non è Jordan misurabile

19.6 Spazi L^1

Teorema 19.5. *Siano $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili allora*

- $f \pm g$ è integrabile
- $c \cdot f$ è integrabile per ogni $c \in \mathbb{R}$
- Se $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$ allora

$$\int_{A \cup B} = \int_A + \int_B$$

In particolare l'insieme

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili}\}$$

è un \mathbb{R} -spazio vettoriale

Definiamo su $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ la seguente relazione di equivalenza

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \text{ quasi ovunque}$$

e poniamo

$$L^1 = \mathcal{L}^1(X, \mu) / \sim$$

che è uno spazio vettoriale.

Poichè vale

$$f = 0 \text{ quasi ovunque} \Rightarrow \int_X (f + g) d\mu = \int_X g d\mu$$

allora su tale spazio vettoriale è ben definita la funzione

$$\int_X \cdot : L^1(X, \mu) \rightarrow \mathbb{R} \quad [f] = \int_X f d\mu$$

Proposizione 19.6. *La funzione*

$$\|f\|_{L^1} = \int_X |f| d\mu$$

è una norma su $L^1(X, \mu)$ che rende lo spazio $(L^1(X, \mu), \|\cdot\|_{L^1})$ è Banach

Dimostrazione. Il fatto che la funzione $\|\cdot\|_{L^1}$ sia una norma è ovvio e segue dalla proprietà del valore assoluto.

Mostriamo che lo spazio è completo, cioè che ogni successione di Cauchy è convergente.

Sia (f_k) una successione di Cauchy in L^1 allora

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists n_k \in \mathbb{N} \quad \|f_i - f_j\| \leq \frac{1}{4^k} \quad \forall i, j \geq n_k$$

Definiamo la funzione

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)|$$

tale funzione è positiva e integrabile infatti

$$\int_X g = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

In particolare \forall "per quasi ogni" $x \in X$ si ha $g(x) < \infty$, sia $x \in X$ tale che $g(x) < \infty$ allora

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} g(x)$$

Per ogni $j > l > k$ vale

$$|f_{n_l}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{i=l}^{j-1} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| \leq g(x) \sum_{i=l}^{j-1} \frac{1}{2^i} \leq g(x) \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k-1}} g(x)$$

Abbiamo dunque provato che $(f_{n_k}(x))_k$ è una successione di Cauchy in \mathbb{R} e dunque

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x)$$

e integrando la disuguaglianza di sopra otteniamo

$$\|f_{n_k} - f\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} \|g\|$$

dunque abbiamo che $f_{n_k} \rightarrow f$ in L^1 e dunque anche $f_n \rightarrow f$ in L^1 infatti

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \|f_i - f_j\| \leq \varepsilon \quad \forall i, j \geq n_\varepsilon$$

e inoltre

$$\forall \varepsilon \quad \exists k_\varepsilon \quad \|f_{n_l} - f\| \leq \varepsilon \quad \forall l \geq k_\varepsilon$$

In particolare scegliendo $j = n_l$ ottengo

$$\|f_i - f\| \leq \|f_i - f_{n_l}\| + \|f_{n_l} - f\| \leq 2\varepsilon \quad \forall i > \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$$

□

Ragionando come sopra e osservando che se $f_n \rightarrow f$ in L^1 allora (f_n) è di Cauchy otteniamo

Corollario 19.7. Se

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^1 \quad \Rightarrow \quad \exists (n_k)_k \quad t f_{n_k} \rightarrow f(x) \text{ quasi ovunque}$$

Inoltre

$$\exists g \in L^1 \text{ positiva} \quad |f_{n_k}| \leq g$$

Osservazione 128. Il corollario è una "specie" di viceversa del teorema di Lebesgue

Osservazione 129.

$$f_n \rightarrow f \text{ in } L^1 \quad \not\Rightarrow \quad f_n \rightarrow f \text{ quasi ovunque}$$

Prendendo la funzione

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{i-2^k}{2^k}, \frac{i-2^k+1}{2^k} \right] \text{ dove } 2^k \leq i \leq 2^{k+1} - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

otteniamo

$$\|f_i\| = \frac{1}{2^k} \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 0 \text{ ovvero } f_i \rightarrow 0 \text{ in } L^1([0, 1])$$

ma $f_i(x) \not\rightarrow 0$ per ogni $x \in [0, 1]$

19.7 Non so dargli un titolo

Proposizione 19.8. *Esistono sottoinsiemi di un insieme di misura positiva non misurabili*

Dimostrazione. Sia E con $m(E) > 0$, poniamo

$$E_j = E \cap [j, j + 1)$$

dunque

$$E = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} E_j$$

ora poichè E ha misura positiva esiste \bar{j} con $m(E_{\bar{j}}) > 0$. Poniamo \bar{E} tale insieme.

Consideriamo su \bar{E} la relazione $x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Q}$. Sia V l'insieme che contiene uno ed un solo rappresentante per ogni classe di equivalenze (A.C.). Abbiamo dunque

$$\bar{E} \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q$$

e tale unione è disgiunta. Se per assurdo V fosse misurabile avremmo

$$m(\bar{E}) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V + q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} m(V) = +\infty$$

dunque

$$m \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} V + q \right) = +\infty$$

il che è assurdo infatti tale insieme è contenuto in $[\bar{j} - 1, \bar{j} + 2]$ e dunque deve avere misura minore o uguale a tre.

19.8 Prodotto vettoriale

Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di \mathbb{R}^3

Definizione 19.6. Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora definiamo il prodotto vettoriale come

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} e_3$$

dove la seconda scrittura è un'espressione formale (serve solo per ricordare l'espressione a destra) mentre

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd$$

Osservazione 130. Il prodotto vettoriale cicla sugli elementi della base canonica ovvero

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

Proposizione 19.9 (Proprietà del prodotto vettoriale).

(i) *Antisimmetria:* $u \wedge v = -v \wedge u$.

(ii) *Lineare:* $(\lambda u + \mu v) \wedge w = \lambda u \wedge w + \mu v \wedge w$.

L'analoga proprietà vale anche per il secondo termine

(iii) $u \wedge v = 0 \iff u, v$ linearmente dipendenti.

(iv)

$$u \wedge v \cdot w = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Dunque vale $u \wedge v \cdot v = 0$ e $u \wedge v \cdot u = 0$

(v) *Se u, v sono linearmente indipendenti, $\{u, v, u \wedge v\}$ formano una base di \mathbb{R}^3 .*

(vi)

$$(u \wedge v) \wedge w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$$

(vii) *Siano $t \rightarrow u(t)$ e $t \rightarrow v(t)$ funzioni di classe C^1 allora*

$$\frac{d}{dt} [u(t) \wedge v(t)] = u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t)$$

(viii)

$$|u \wedge v|^2 = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2 = |u|^2 |v|^2 \left[1 - \left(\frac{u \cdot v}{|u| |v|} \right)^2 \right]$$

Dimostrazione.

(i) Scambiando due righe di una matrice, il determinante cambia segno

(ii) I determinanti di matrici 2×2 sono lineari nella prima riga

(iii) $u \wedge v = 0$ se e solo se i 3 determinanti della definizione si annullano.

Tali determinanti sono i determinati dei minori della matrice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$.

Dunque $u \wedge v = 0$ se e solo se la matrice di sopra ha rango minore o uguale a 1 dunque la tesi

(iv) Banale verifica

(v) Dalla proprietà precedente $u \wedge v$ è ortogonale a u e a v

(vi) Verifichiamo la relazione sui versori della base canonica ovvero posto

$$\begin{cases} u = e_1 \\ v = e_j \\ w = e_k \end{cases}$$

mostriamo che vale la tesi

– se $i \neq j \neq k$ allora

$$(e_i \wedge e_j) \wedge e_k = \pm e_k \wedge e_k = 0$$

e banalmente anche il membro di destra vale 0

– Se $i = j \neq k$ allora poichè $e_i \wedge e_j = 0$ allora il membro di sinistra si annulla. Banalmente si annulla anche il membro di destra.

– In modo analogo proviamo che tutti i prodotti vettoriali tripli si annullano tranne il caso

$$(e_i \wedge e_j) \wedge e_j = \pm 1$$

Mostriamo il caso $i = 1, j = 2$ gli altri sono analoghi

$$(e_1 \wedge e_2) \wedge e_2 = e_3 \wedge e_2 = -e_1$$

Mentre il membro di sinistra vale

$$(e_1 \cdot e_2) e_2 - (e_2 \cdot e_2) e_1 = -e_1$$

In maniera analoga, gli altri casi

Mostriamo che la proprietà vale, usando la linearità del prodotto vettoriale e scalare.

Siano $u = \sum u_i e_i$, $v = \sum v_j e_j$ e $w = \sum w_k e_k$ allora

$$\begin{aligned} (u \wedge v) \wedge w &= \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k (e_i \wedge e_j) \wedge e_k = \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k [(e_i \cdot e_k) e_j - (e_j \cdot e_k) e_i] = \\ &= \left(\left(\sum_i u_i e_i \right) \cdot \left(\sum_k w_k e_k \right) \right) \sum_j v_j e_j - \left(\left(\sum_j v_j e_j \right) \cdot \left(\sum_k w_k e_k \right) \right) \sum_i u_i e_i = (u \cdot w) v - (v \cdot w) u \end{aligned}$$

(vii) Sviluppiamo in serie di Taylor u, v ottenendo

$$u(t + \varepsilon) = u(t) + \varepsilon u'(t) + o(\varepsilon) \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$v(t + \varepsilon) = v(t) + \varepsilon v'(t) + o(\varepsilon) \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

Dunque usando la definizione di prodotto vettoriale otteniamo

$$u(t + \varepsilon) \wedge v(t + \varepsilon) = u(t) \wedge v(t) + \varepsilon (u'(t) \wedge v(t) + u(t) \wedge v'(t)) + o(\varepsilon) \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0$$

Da cui la tesi

(viii)

$$|u \wedge v| = \begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}$$

Dimostrazione. Sia $u = \sum u_i e_i$ e $v = \sum v_j e_j$ allora

$$\begin{aligned} |u \wedge v|^2 &= \left| \sum_{i,j} u_i v_j e_i \wedge e_j \right|^2 = \left(\sum_{i,j} u_i v_j e_i \wedge e_j \right) \left(\sum_{h,k} u_h v_k e_h \wedge e_k \right) = \\ &= \sum_{i,j,h,k} [u_i u_h v_j v_k (e_i \wedge e_j) \cdot (e_h \wedge e_k)] \end{aligned}$$

Osserviamo che se

- $i = j$ allora il termine si annulla
- $h = k$ allora il termine si annulla
- $i \neq j$, $h \neq k$ e $\{i, j\} \neq \{h, k\}$ allora il termine si annulla

dunque possiamo scrivere la sommatoria precedente come

$$\sum_{i \neq j} [(u_i v_j)^2 - u_i v_j u_j v_i] = \sum_{i,j} [(u_i v_j)^2 - u_i v_j u_j v_i] = |u|^2 |v|^2 - (u \cdot v)^2$$

□

19.9 Disuguaglianza isoperimetrica

Teorema 19.10 (Disuguaglianza isoperimetrica). *Tra tutti i domini di \mathbb{R}^2 regolari con bordo di lunghezza finita, il disco è quella di area massima*

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdere di generalità che D sia diffeomorfo ad un disco (se ha un buco, lo tappo aumentando area e diminuendo la lunghezza).

Sia $\gamma(s)$ una parametrizzazione per lunghezza d'arco di $+\partial D$ con $L(\gamma) = 2\pi$; dunque $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \partial D$. Dimostrare il teorema equivale a dimostrare $Area(D) \leq \pi$ e vale l'uguaglianza per D disco.

$$l(\partial D) = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(s)| \, ds = \int_{-\pi}^{\pi} |\gamma'(s)|^2 \, ds = \int_{-\pi}^{\pi} [x'(s)^2 + y'(s)^2] \, ds$$

dove abbiamo usato che $|\gamma'(s)| = 1$.

$$Area(D) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [x(s)y'(s) - y(s)x'(s)] \, ds$$

Poniamo $z(s) = x(s) + iy(s)$ dunque sviluppando la funzione in serie di Fourier otteniamo

$$z(s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik}$$

Cerchiamo di esprimere $L(\gamma)$ e $Area(D)$ in funzione dei c_k

$$z'(s) = i \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} k c_k e^{iks}$$

dunque

$$L(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} i \left(\sum_{k \neq 0} k c_k e^{iks} \right) \left(-i \sum_{h \neq 0} h \bar{c}_h e^{-ihs} \right) = \sum_{h, k \neq 0} h k c_k \bar{c}_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{is(k-h)} \, ds = 2\pi \sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2$$

Ma poichè $L(\gamma) = 1$ allora $\sum_{k \neq 0} k^2 |c_k|^2 = 1$

$$Area(D) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} Im \left(\sum_k \bar{c}_k e^{-iks} \right) \left(i \sum_{h \neq 0} h c_h e^{ihs} \right) \, ds = 2\pi Im \left(i \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} k |c_k|^2 \right) = \pi \sum_{k \neq 0} k |c_k|^2$$

dunque

$$Area(D)\pi \sum_{k \neq 0} k |c_k|^2 \leq \pi \sum_{k \neq 0} |k| c_k^2 \leq \pi \sum_{k \neq 0} |k|^2 c_k^2 = \pi$$

inoltre se le disuguaglianze sono uguaglianze allora dalla prima otteniamo $c_k \neq 0$ per $k < 0$ mentre dalla seconda otteniamo $c_k = 0$ per ogni $|k| = 1$.

Dunque se $Area(D) = \pi$ allora $z(s) = e^{is}$ ovvero parametrizza una circonferenza □

19.10 Funzioni armoniche (in dimensione 2)

Lemma 19.11. *Se $u \in C^2(U)$ con $u(0, 0) = 0$ allora*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^4} \iint_{B(0,r)} u(x, y) \, dx \, dy = c \nabla u(0)$$

Dimostrazione. Sviluppiamo u con Taylor vicino a 0 ottenendo

$$u(x, y) = u(0, 0) + u_x(0, 0)x + u_y(0, 0)y + u_{xx}(0, 0)\frac{x^2}{2} + u_{xy}(0, 0)xy + u_{yy}(0, 0)\frac{y^2}{2} + o(x^2 + y^2)$$

Osserviamo che per simmetria si ha

$$\iint_{B(0,r)} x \, dx \, dy = \iint_{B(0,r)} y \, dx \, dy = \iint_{B(0,r)} xy \, dx \, dy = 0$$

inoltre

$$\iint_{B(0,r)} x^2 \, dx \, dy = \iint_{B(0,r)} y^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_{B(0,r)} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = \frac{\pi}{4} r^4$$

Inoltre

$$\iint_{B(0,r)} o(r^2) \, dx \, dy = o(r^4)$$

infatti $\omega = o(x^2 + y^2)$ se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che $\omega(x, y) \leq \varepsilon(x^2 + y^2)$.

Dunque otteniamo

$$\frac{1}{r^4} \iint_{B(0,r)} u(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{r^4} u_{xx}(0) \frac{\pi}{8} r^4 + u_{yy}(0) \frac{\pi}{8} r^4 + o(r^4) \rightarrow \frac{\pi}{8} \Delta u(0, 0)$$

□

Esercizio 19.12. *Mostrare che vale la generalizzazione del lemma.*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n+2}} \int_{B(0,r)} u(x) \, dx = c_n \nabla u(0)$$

Teorema 19.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto e $u \in C^2(\Omega)$. I seguenti fatti sono equivalenti*

(i) $\Delta u \equiv 0$ su Ω

(ii) Per ogni $P_0 \in \Omega$ e per ogni r tale che $B(P_0, r) \subseteq \Omega$ vale

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(P_0, r)} u = u(P_0)$$

Dimostrazione. Mostriamo che (i) \Rightarrow (ii). Senza perdita di generalità suppongo $P_0 = 0$

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} u = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, d\theta$$

Ora

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi} \nabla u(r \cos \theta, r \sin \theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B(0,r)} \nabla u \cdot n = \frac{1}{2\pi} \iint_{B(0,r)} \operatorname{div}(\nabla u) \, dx \, dy = 0$$

Otteniamo dunque che φ è costante.
Poichè $\lim \varphi(r) = u(0, 0)$ si ha la tesi.

Mostriamo che (ii) \Rightarrow (i) ovvero che $\Delta u = 0$ in ogni punto P_0 .
Senza perdita di generalità posso supporre $P_0 = 0$ e $u(P_0) = 0$.

Poichè

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(0,r)} u(x, y) \, dx \, dy = 0 \quad \forall r \text{ ammissibile}$$

Otteniamo che

$$\int_{B(0,r)} u(x, y) \, dx \, dy = 0$$

infatti posso integrare su circonferenze (su cui l'integrale si annulla).
La tesi segue dal lemma precedente

19.11 Rotore e nabra calcolo

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = e_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + e_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + e_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

Sia $\varphi \in C^2$ allora

$$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$$

infatti posto $F_i = \partial_i\varphi$ si ha

$$\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = e_1 (\partial_2\partial_3\varphi - \partial_3\partial_2\varphi) + e_2 (\dots) + e_3 (\dots)$$

Ora i termini dentro le parentesi tonde sono nulli per Cauchy-Swartz

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$$

infatti

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = \partial_1 (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) + \partial_2 (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) + \partial_3 (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = 0$$

dove abbiamo usato Cauchy-Swartz

Osservazione 131. Sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo C^1 con Ω semplicemente connesso

$$\operatorname{rot} F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \nabla G$$

infatti $\operatorname{rot} F = 0$ equivale a chiedere che la forma $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ è chiusa.

Controesempio a $\operatorname{div} G = 0 \Rightarrow \exists F$ campo con $G = \operatorname{rot} F$ Sia

$$G = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

allora si prova, con un semplice conto, che $\operatorname{div} G = 0$.

Supponiamo per assurdo che esista F con $\operatorname{rot} F = G$.

Sia

$$S_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq a\}$$

$$4\pi = \iint_{S_a} G \cdot n_e d\sigma = \iint_{S_a} \operatorname{rot} F \cdot n_e d\sigma = \iint_{\gamma} F \cdot T ds$$

dove abbiamo usato per l'ultima uguaglianza il teorema di Stokes.

Ora per $a \rightarrow 1$ il termine di destra tende a 0 il che è assurdo

Osservazione 132. Se F e \tilde{F} sono potenziali vettoriali di G ($\operatorname{rot} F = \operatorname{rot} \tilde{F} = G$) allora $F = \tilde{F} + \nabla\varphi$

Proposizione 19.14. Sia $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo C^1 con $\Omega = I_1 \times I_2 \times I_3$ allora

$$\operatorname{div} G = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists F \in C^2 \quad G = \operatorname{rot} F$$

Dimostrazione.

$$G = \operatorname{rot} F \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (i) & G_1 = \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ (ii) & G_2 = \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ (iii) & G_3 = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{cases}$$

Supponiamo $F_1 = 0$ allora

$$F_3(x, y, z) - F_3(x_0, y, z) = \int_{x_0}^x \partial_1 F_3(t, y, z) dt = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt \quad \text{dalla (ii)}$$

dunque posto $f(y, z) = F_3(x_0, y, z)$ ottengo

$$F_3(x, y, z) = - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt - f(y, z)$$

Analogamente usando (ii) ottengo

$$F_2(x, y, z) = - \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt - g(y, z)$$

Supponiamo adesso $f \equiv 0$ e sostituendo nella (i) otteniamo

$$G_1 = -\partial_2 \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) - \partial_3 \int_{x_0}^x G_3(t, y, z) dt - \partial_3 g = \int_{x_0}^x [-\partial_2 G(t, y, z) - \partial_3 G_3(t, y, z)] dt - \partial_3 g$$

Sfruttando che $\operatorname{div} G = 0$ otteniamo

$$G_1(x, y, z) = \int_{x_0}^x \partial_1 G_1(t, y, z) dt - \partial_3 g = G_1(x, y, z) - G_1(x_0, y, z) - \partial_3 g$$

dunque basta prendere $\partial_3 g = G_1(x_0, y, z)$ ovvero

$$g(y, z) = \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, s) ds$$

Riassumendo il campo

$$\begin{aligned} F_1 &= 0 \\ F_2 &= \int_{x_0}^x G_3(t, x, y) dt - \int_{z_0}^z G_1(x_0, y, s) ds \\ F_3 &= - \int_{x_0}^x G_2(t, y, z) dt \end{aligned}$$

soddisfa $\operatorname{rot} F = G$

19.12 (DA SCRIVERE) Misura di Hausdorff

20 Esercizi

Esercizio 20.1. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la continuità in $(0, 0)$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se la funzione è continua allora deve essere continua anche la sua restrizione lungo la curva $\gamma(t) = (t, t)$. Ma $f \circ \gamma(t) = 2^{-\alpha} t^{2-2\alpha}$.

Abbiamo provato che se $\alpha \geq 1$ allora la funzione non è continua.

Per mostrare la continuità per $\alpha < 1$ basta trovare una funzione $g(t)$ con $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ tale che

$$|f(x, y)| \leq g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Da $(x - y)^2 \geq 0$ segue che $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ dunque

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{1-\alpha}$$

Ponendo $g(t) = \frac{t^{2(1-\alpha)}}{2}$ si ha la tesi

Esercizio 20.2. Discutere sulla continuità in 0 delle funzioni

$$f(x, y) = \frac{xy}{|x|^\alpha + |y|^\beta} \quad g(x, y) = \frac{|x|^\alpha |x|^\beta}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 20.3. Trovare il parallelepipedo di superficie massimo con volume 1

Dimostrazione. IL problema si riconduce a trovare il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$

con i vincoli $x, y, z \geq 0$ e $xyz = 1$.

Tale problema è equivalente a trovare il minimo della funzione

$$g(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{con } x, y \geq 0$$

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow +\infty} g(x, y) = +\infty$$

dunque per Weistrass tale minimo esiste.

Sia (x_0, y_0) un punto di minimo allora

$$\nabla g(x_0, y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_0 = \frac{1}{x_0^2} \\ x_0 = \frac{1}{y_0^2} \end{cases}$$

duque il minimo si ottiene per $x = y = z = 1$ ovvero se il parallelepipedo è un cubo unitario

Esercizio 20.4. Sia $f(x, y) = ax + by + c$ con $a^2 + b^2 \neq 0$. Trovare il massimo ed il minimo sul disco unitario.

Dimostrazione. Per Weistrass, massimo e minimo esistono sempre.

Sia (x_0, y_0) il punto di massimo, ora tale punto non può stare nella parte interna del disco in quanto il gradiente sarebbe non nullo.

Dunque il massimo (come il minimo) appartengono alla frontiera del disco. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.

Sia

$$g(t) = f \circ \gamma = a \cos t + a \sin t$$

dunque se t_0 è il punto di massimo abbiamo

$$0 = g'(t_0) = (b \quad -a) \cdot \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}^\perp \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

dunque

$$\gamma(t_1) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \quad \gamma(t_2) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

dove $\gamma(t_1)$ punto di massimo e $\gamma(t_2)$ di minimo

Esercizio 20.5. Studiare la continuità al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dimostrazione. Osserviamo che f è omogenea di grado $\gamma = \alpha + \beta - 2$.

Andiamo a distinguere vari casi

- $\alpha < 0$ allora f non è limitata in un intorno di 0 dunque non è nemmeno continua. Similmente se $\beta < 0$

- $\gamma > 0$ allora usando

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

otteniamo

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}} (x^2 + y^2)^{\frac{\beta}{2}}}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}}$$

dunque se $\gamma > 0$ il termine a destra tenda a 0 per $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ da cui $f(x, y) \rightarrow 0$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

- $\gamma < 0$ allora calcolando il limite lungo la direzione $(1, 1)$ otteniamo

$$f(t, t) = \frac{|t|^{\alpha+\beta}}{2t^2} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } \gamma = 0 \\ +\infty & \text{se } \gamma < 0 \end{cases} \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

e in entrambi i casi la funzione non è continua in 0

Esercizio 20.6. Studiare la continuità al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|^\alpha + |y|^\beta} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dimostrazione. Distinguiamo alcuni casi

- $\beta = 0$ allora

$$\left| \frac{xy}{|x|^\alpha + 1} \right| \leq |x| |y| \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 \rightarrow 0$$

Similmente $\alpha = 0$

- $\beta < 0$ allora

$$\left| \frac{xy |y|^{-\beta}}{|y|^{-\beta} |x|^\alpha + 1} \right| \leq |x| |y|^{1-\beta} \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^{2-2\beta} \rightarrow 0$$

Similmente per $\alpha < 0$

- $\alpha, \beta > 0$ allora Poniamo $u = x^{\frac{\alpha}{2}}$ e $v = y^{\frac{\beta}{2}}$ ottenendo

$$|f(x, y)| = \frac{|u|^{\frac{2}{\alpha}} |v|^{\frac{2}{\beta}}}{u^2 + v^2}$$

e usando l'esercizio precedente

Esercizio 20.7. La funzione

$$f(x, y) = \frac{|x|^3 |y|}{x^4 + y^2}$$

è estendibile con continuità in $(0, 0)$.

Dimostrazione. Osserviamo

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^2)^{\frac{3}{2}} + |y|}{(x^2)^2 + y^2} = \frac{|u|^{\frac{3}{2}} |y|}{u^2 + y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{u^2 + y^2} \right)^{\frac{3}{2}+1}}{u^2 + y^2} = \sqrt{u^2 + y^2}$$

dove $=$ è il cambio di variabile $x^2 = u$

Esercizio 20.8. La funzione

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^3}{x^4 + y^4}$$

è estendibile in $(0, 0)$ con continuità e l'estensione è differenziabile

Dimostrazione. Ponendo $u = x^2$ e $v = y^2$ otteniamo

$$|f(x, y)| \leq \frac{u^{\frac{3}{2}} v^{\frac{3}{2}}}{u^2 + v^2} \leq \frac{\left(\sqrt{u^2 + v^2} \right)^3}{u^2 + v^2} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Ora $\sqrt{x^4 + y^4} \leq x^2 + y^2$ dunque abbiamo $f(x, y) = O(x^2 + y^2) \leq o(\sqrt{x^2 + y^2})$

Esercizio 20.9 (Gateaux e Frechet differenziabile). Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^4 - e} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Allora tale funzione è Gateaux-differenziabile in $(0, 0)$ ma non lo è secondo Frechet

Dimostrazione. La funzione data è continua e differenziabile (per il teorema del differenziale totale) in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mentre non è nemmeno continua in 0.

Se calcoliamo il limite lungo la parabola $y = x^2$ otteniamo

$$f(x, y) = \left(\frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

dunque su tale parabola la funzione è costante, dunque non ha limite.

Calcoliamo la derivata direzionale lungo $v = (a, b)$

$$\frac{f(ta, tb) - f(0, 0)}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{t^3 a^2 b}{t^4 a^4 + t^2 b^2} \right)^2 = \frac{1}{t} \left(\frac{t^3}{t^2} \right)^2 \left(\frac{a^2 b}{a^4 t^2 + b^2} \right)^2 \sim t \frac{a^4}{b^2} \text{ se } a, b \neq 0$$

Altrimenti è identicamente nulla.

Abbiamo dunque $f(tv) = O(t^2)$ dunque f è Gateaux-differenziabile in $(0, 0)$

Esercizio 20.10. Studiare continuità e differenziabilità al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)}$$

Dimostrazione. Per $\alpha > 1$ la funzione non è continua infatti lungo la retta $y = x$ otteniamo

$$f(t, t) = \frac{t^2}{2t^{2\alpha}} = t^{2-2\alpha} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

mentre lungo la retta $x = 0$ abbiamo

$$f(0, y) = 0$$

.

Studiamo la differenziabilità per $\alpha < 1$

$$|f(x, y)| \leq \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} = (x^2 + y^2)^{1-\alpha}$$

Ora se $1 - \alpha > \frac{1}{2}$ allora $f(x, y) = O\left((x^2 + y^2)^{1-\alpha}\right) = o\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ dunque la funzione è differenziabile.

Abbiamo dunque per $\alpha < \frac{1}{2}$ f è differenziabile.

Per $\alpha > \frac{1}{2}$ calcoliamo la derivata direzionale lungo $v = (a, b)$ con $|v| = 1$ e $a, b \neq 0$ allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(ta, tb) - f(0, 0)) = \frac{1}{t} \frac{abt^2}{(a^2 + b^2)^\alpha |t|^{2\alpha}} = \frac{abt}{|t|^{2\alpha}} \rightarrow \begin{cases} ab & \text{se } \alpha = \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{se } \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 20.11 (Derivate miste non coincidono). Sia

$$f(x, y) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$

allora tale funzione è differenziabile in \mathbb{R}^2 ma le derivate seconde miste non coincidono

Dimostrazione.

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x^3y| + |xy^3|}{x^2 + y^2} \leq 2(x^2 + y^2)$$

dunque in particolare $f \in O(x^2 + y^2) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ ovvero è differenziabile

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^2y^3 + x^4y - y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Ora

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right) = \frac{Q\partial_y P - P\partial_y Q}{Q^2}$$

Dunque è $\frac{\partial f}{\partial y \partial x}$ funzione omogenea di grado $\deg(Q) - \deg(P) - 1 - 2\deg(Q) = 0$ Osserviamo ora

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} - \frac{t^5}{t} = -1$$

inoltre $f(x, y) = -f(y, x)$ dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

Esercizio 20.12. *Provare che per ogni $x, y, a > 0$ si ha*

$$f_a(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \geq -a^3$$

Dimostrazione. Sia $Q = \{x > 0, y > 0\}$ osserviamo che

$$f_a(x, y) \geq x^3 + y^3 - 3a(x^2 + y^2) = x^2(x - 3a) + y^2(y - 3a)$$

dunque

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow +\infty \\ z \in Q}} f_a(z) = +\infty$$

dunque esiste R tale che $f(z) > 0$ per $z \notin B(0, R)$.

Ora $\overline{B(0, R)} \cap Q$ è un compatto di \mathbb{R}^2 dunque per Weierstrass la funzione assume massimo e minimo su tale insieme. Essendo la funzione differenziabile in \mathbb{R}^2 abbiamo, per Fermat che i possibili punti di massimo/minimo locale sono i punti critici ovvero (x, y) tale che

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0 \\ 3y^3 - 3ax = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } x_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

Ora x_0 non è un punto di minimo infatti per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ si ha $f(x, y) = -3xy + o(x^2 + y^2)$. Ora l'hessiano di f in x_1 è definito positivo dunque x_1 è un punto di minimo.

$$f(x_1) = a^3 + a^3 - 3a^3 = -a^3$$

Esercizio 20.13 (Minimo di una funzione convessa).

Sia

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log(x_i)$$

trovare il minimo di f sul quadrante $Q = \{x_i > 0\}$.

Dimostrazione. Osserviamo che f è estendibile per continuità su \overline{Q} ponendola uguale a 0 su ∂Q infatti la funzione

$$\varphi(t) = t \log(t)$$

è estendibile per continuità in $t = 0$ ponendo $\varphi(t) = 0$.

Studiando il gradiente di f

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \log x_1 + 1 \\ \vdots \\ \log x_n + 1 \end{pmatrix}$$

si nota che f ha un minimo locale in $x_0 = \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Osserviamo inoltre che f è strettamente convessa ($D^2 f(x) > 0$) dunque f ammette un unico minimo e tale minimo è $f(x_0)$

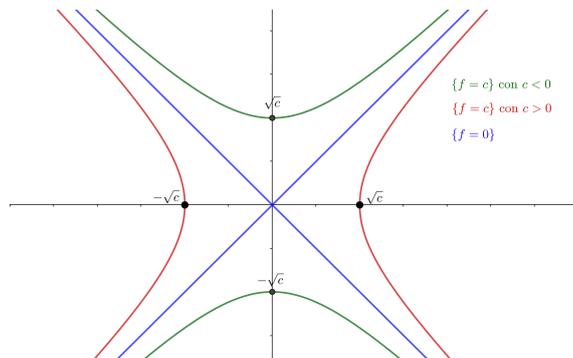
20.1 Esercizi su funzioni implicite e moltiplicatori

Esercizio 20.14. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Osserviamo che $f \in C^\infty$ e

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x, y) \neq (0, 0)$$

dunque sono verificate le condizioni del teorema, possiamo scrivere gli insiemi di livelli come grafico di una funzione di classe C^∞ in tutti i punti tranne per $f = 0$



Esercizio 20.15. Trovare massimi e minimi di $f(x) = \sum_{i=1}^n x \log x_i$ sul semplice

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0 \right\}$$

Dimostrazione. In un esercizio precedente, abbiamo dimostrato che f è estendibile ad una funzione differenziabile e strettamente convessa su $Q = \{x_i \geq 0\}$.

f ammette massimo e minimo per Weistrass.

Il calcolo del massimo è facile infatti sappiamo che

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ con } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

dunque se $x \in S$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} f(e_i)\right) \sum_{i=1}^n \lambda_i = \max_{i=1, \dots, n} f(e_i)$$

dunque il massimo di f viene assunto su i vettori della base canonica e vale 0.

Calcoliamo il minimo. Sia $g(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) - 1$ allora $\nabla g(x) = (1, \dots, 1)^t$ dunque sono soddisfatte le ipotesi del teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x_1 + 1 = \lambda \\ \log x_2 + 1 = \lambda \\ \vdots \\ \log x_n + 1 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_n = e^{\lambda-1} \\ nx_1 = 1 \end{cases}$$

tale soluzione ammette come unica soluzione $x_0 = \frac{1}{n}(1, \dots, 1)^t$

Esercizio 20.16. Tra tutti i parallelepipedi, con i lati paralleli agli assi coordinati, di superficie assegnata, trovare quello con volume massimo.

Dimostrazione. Mostriamo il caso in cui la superficie sia 1.

Sia $\Sigma = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : ab + bc + ac = 1\}$ e $Q = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a, b, c > 0\}$ e

$$f(a, b, c) = abc$$

il problema richiesto è analogo a trovare il massimo e il minimo di f su $\Sigma \cap \overline{Q}$.

Il minimo di f è chiaramente 0 e viene raggiunto ad esempio per $a = 0$ e $b = c = 1$.

Il massimo non è evidente che esista, in quanto $\Sigma \cap \overline{Q}$ non è limitato, ovviamo a questo problema grazie alla seguente osservazione

Osservazione 133. Sia $Q_R = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq a, b, c \leq R\}$ un cubo di spigolo R allora

$$(a, b, c) \notin Q_R \Rightarrow f(a, b, c) \leq \frac{1}{R}$$

ovvero fuori da un cubo di spigolo R il valore della funzione è limitato da $\frac{1}{R}$.

Dimostrazione. Sia $\max\{a, b, c\} > R$ allora senza perdita di generalità, assumo $a > R$.

Poichè $ab + bc + ac = 1$ segue

$$\begin{cases} ab \leq 1 \\ ac \leq 1 \end{cases} \Rightarrow b, c \leq \frac{1}{a} \Rightarrow f(a, b, c) = abc \leq a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \leq \frac{1}{R}$$

□

Cerco i punti stazionari vincolati su $\Sigma \cap Q$ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange dove $g(a, b, c) = ab + bc + ac - 1$

$$\begin{cases} \nabla f(a, b, c) = \lambda \nabla g(a, b, c) \\ g(a, b, c) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc = \lambda(b + c) \\ ac = \lambda(a + c) \\ ab = \lambda(a + b) \\ ab + bc + ac = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c(b - a) = \lambda(b - a) \\ b(c - a) = \lambda(c - a) \\ a(c - b) = \lambda(c - b) \\ ab + bc + ac = 1 \end{cases}$$

Dunque l'unica soluzione delle prime 3 equazioni si ha per $a = b = c$ (infatti $\lambda \neq 0$ infatti $bc \neq 0$). Dunque $3a^2 = 1$ ovvero $a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. L'unico punto stazionario di f su $\Sigma \cap Q$ è $P_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}(1, 1, 1)^t$ e $f(P_0) = \frac{\sqrt[3]{3}}{9}$.

Tale punto è un punto di minimo per la funzione vincolata infatti sia $R > 3\sqrt[3]{3}$ (ovvero se $\frac{1}{R} < \frac{\sqrt[3]{3}}{9}$).

Per $x \notin B(0, R)$ si ha $f(x) < \frac{1}{R} < \frac{\sqrt[3]{3}}{9} = f(P_0)$ dunque

$$\sup_{\Sigma \cap \overline{Q}} f = \max_{\Sigma \cap \overline{Q}_R} f = f(P_0)$$

Esercizio 20.17. Sia

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y + e^{x+y} = 0\}$$

(a) Mostrare che tale espressione definisce implicitamente una funzione $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ovvero C è il grafico della funzione φ

(b) Mostrare che φ ha un punto critico in $x = 2$ e determinarne la natura

Dimostrazione. Sia $g(x, y) = x^2y + e^{x+y}$. Allora $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + e^{x+y} > 0$.

Sia $x_0 \neq 0$ fissato allora

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} g(x_0, y) = +\infty \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} g(x_0, y) = -\infty$$

dunque per permanenza del segno esistono y_0^+ e y_0^- con $g(y_0^+) > 0$ e $g(y_0^-) < 0$. Per il teorema degli zeri esiste per ogni x_0 un unico y_0 tale che $f(x_0, y_0) = 0$.

Pongo

$$\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi(x_0) = y_0$$

Il teorema del Dini, ci garantisce che φ è derivabile e vale

$$\varphi'(x) = \frac{\partial_x g(x, \varphi(x))}{\partial_y g(x, \varphi(x))} = \frac{2x\varphi(x) + e^{x+\varphi(x)}}{x^2 + e^{x+\varphi(x)}}$$

Ora per $x = 2$ il numeratore si annulla; $\varphi(2)$ è l'unico valore y tale che $2^2y + e^{2+y} = 0$ mentre il denominatore è strettamente positivo.

Abbiamo dunque $\varphi'(2) = 0$ dunque 2 è un punto critico. Per studiarne la natura calcoliamo la derivata seconda

$$\varphi''(x) = -\frac{(2\varphi(x) + 2x\varphi'(x) + \varphi'(x)e^{x+\varphi(x)}) (x^2 + e^{x+\varphi(x)}) - (2x + \varphi'(x)e^{x+\varphi(x)}) (2x\varphi(x) + e^{x+\varphi(x)})}{(x^2 + e^{x+\varphi(x)})^2}$$

Dunque calcolandola in 2 e svolgendo i calcoli otteniamo che $\varphi''(2) < 0$ dunque 2 è un punto di massimo

Esercizio 20.18. Dimostrare l'esistenza e trovare massimi e minimi di

$$f(x, y, z, t) = |xt - yz|$$

su

$$T_l = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} = l\}$$

dove $l > 0$

Dimostrazione. T_l è un chiuso infatti la controimmagine di $\{l\}$ mediante una funzione continua. Mostriamo che è limitato.

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq l^2 \text{ e } z^2 + t^2 \leq l^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq 2l^2$$

dunque f è continua su T_l compatto quindi ammette massimo e minimo.

Osserviamo ora che $f \geq 0$ e poichè $f\left(\frac{l}{\sqrt{2}}, \frac{l}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) = 0$.

Per trovare il massimo di f , posso procedere in 2 modi

- Mostrare che $D \cap T_l$ è un'ipersuperficie ed utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare il massimo di $F(x, y, z, t) = xt - yz$
- Passare a coordinate polari

Mostriamo il secondo metodo. Usiamo il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \\ t = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \text{dove } r, \rho > 0 \text{ e } \theta, \varphi \in [0, 2\pi]$$

Allora in questo caso i vincoli diventano

$$r + \rho = l$$

Poichè

$$f(r, \theta, \rho, \varphi) = |r\rho \cos \theta \sin \varphi - r\rho \sin \theta \cos \varphi| = r\rho |\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi| = r\rho |\sin(\theta - \varphi)|$$

Poichè su θ, φ non ho vincoli il massimo è $r\rho$ con $r + \rho = l$.

Esercizio 20.19. *Trovare massimo e minimo di*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n e^{x_i}$$

su $\partial B(0, 1)$

Dimostrazione. Il vincolo è $\{g = 0\}$ dove

$$g(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - 1$$

osserviamo che $\partial B(0, 1)$ è un vincolo regolare infatti $\partial g = 2x \neq 0$ su $\partial B(0, 1)$.

Essendo $\partial B(0, 1)$ un compatto, massimo e minimo esistono e verificano il sistema dei moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \lambda x_i = \lambda x_i & \text{per } i = 1, \dots, n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1 \end{cases}$$

dunque dalle prime n equazioni otteniamo $x_i, \lambda \neq 0$ quindi

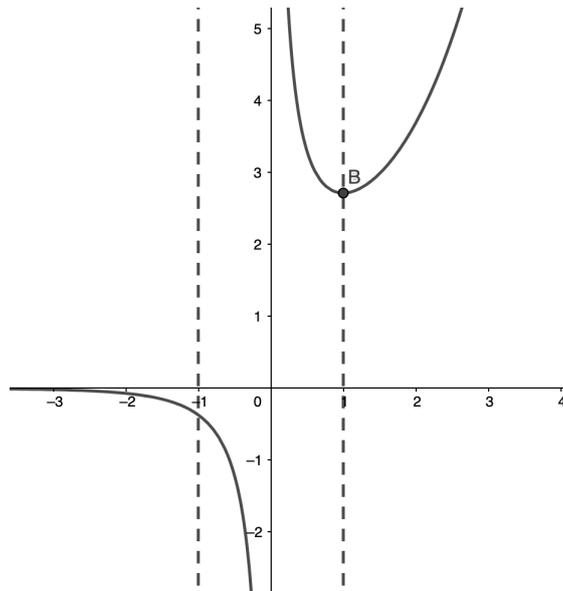
$$\frac{e^{x_i}}{x_i} = \frac{e^{x_j}}{x_j} \quad \text{per } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Ora $x_i \in [-1, 1]$ e in tale intervallo la funzione $h(x) = \frac{e^x}{x}$ è iniettiva (vedi grafico) dunque abbiamo $x_i = x_j$.

Ora da $|x| = 1$ otteniamo che il sistema ha soluzioni

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^t \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)^t$$

Un conto mostra che x_1 è un punto di massimo e x_2 uno di minimo □



Esercizio 20.20. *Trovare massimo e minimo di*

$$f(x, y, z) = xy + yz$$

su

$$M = \{x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 1\} \cap \{z \geq 0\}$$

Dimostrazione. Scomponiamo il vincolo M come

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \quad \begin{array}{l} M_0 = M^\circ \\ M_1 = \{x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\} \cap \{z > 0\} \\ M_2 = \{x^2 + y^2 + 2z^2 < 1\} \cap \{z = 0\} \\ M_3 = \{x^2 + y^2 + 2z^2 = 1\} \cap \{z = 0\} \end{array}$$

Cerco i punti stazionari in ogni “pezzo”

- M_0 è un aperto quindi basta applicare il principio di Fermat

$$\begin{cases} \nabla f = 0 \\ z > 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0, x = -z \Rightarrow f(x, y, z) = 0$$

Dato che f assume valori positivi e negativi, massimo e minimo sono assunti su $\partial M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$

- Su M_1 . Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ottengo e prendo le soluzioni con $z > 0$

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g_1 \\ g_2 = 0 \end{cases} \quad \text{dove } g_1(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2z^2 - 1)$$

$$\begin{cases} y = \lambda x \\ x + z = \lambda y \\ y = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$

Ora dalla prima e la terza si ottiene $\lambda(x - 2z) = 0$.

Se $\lambda = 0$ allora $y = 0$ dunque $f(x, y, z) = 0$ ma abbiamo già scartato tale soluzione.

Se $\lambda \neq 0$ allora otteniamo $x = 2z$ dunque dalla seconda - λ terza otteniamo $z(3-2\lambda^2) = 0$.
Poichè $z > 0$ si ha $\lambda^2 = \frac{3}{2}$.

Sostituendo nella 4 equazione otteniamo

$$x^2 + \lambda^2 x^2 + 2 \cdot \frac{1}{4} x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

infatti se $x < 0$ si ha $z < 0$ il che non è compatibile con M_1 .

Dunque abbiamo 2 soluzioni

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$$

con

$$f(P_1) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad f(P_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

- Su M_2 . Abbiamo il sistema dato dai moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \nabla g_2 \\ g_2 = 0 \end{cases} \quad \text{dove } g_2(x, y, z) = z$$

allora il sistema diventa

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

che non ha soluzioni

- M_3 è una circonferenza nel piano $z = 0$ dunque posso utilizzare il cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

ottenendo

$$f|_{M_3}(x, y) = h(t) = \sin t \cos t$$

che ha massimo per $\sin t = \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ dunque per

$$P_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad P_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad f(P_3) = f(P_4) = \frac{1}{2}$$

Mentre ha minimo in $\sin t = -\cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ dunque per

$$P_5 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad P_6 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \quad f(P_5) = f(P_6) = -\frac{1}{2}$$

Confrontando i vari valori ottengo che il massimo è assunto in P_1 mentre il minimo in P_2

Esercizio 20.21. Sia $A \in M(m, n, \mathbb{R})$ trovare massimo e minimo di

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

su $\partial B(0, 1)$

Dimostrazione. Notiamo che massimo e minimo esistono per Weistrass.
 $\partial B(0, 1) = g(x) = (\sum x_i^2) - 1$ dunque

$$\nabla f_i = \sum_j (a_{ij} + a_{ji}) x_j \quad \nabla g(x) = x$$

dunque il sistema dei moltiplicatori di Lagrange diventa

$$\begin{cases} \sum_j (a_{ij} + a_{ji}) x_j = \lambda x_i \\ |x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A + A^T) x = \lambda x \\ |x| = 1 \end{cases}$$

dunque il sistema è risolto per λ è autovalore di $A + A^T$ e x autovettore di modulo 1 e assume valore

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \langle (A + A^T) x, x \rangle = \frac{\lambda}{2} |x|^2 = \frac{\lambda}{2}$$

dunque

$$\begin{aligned} \max_{x \in \partial B(0,1)} f(x) &= \max_{\lambda \in Sp\left(\frac{A+A^T}{2}\right)} \lambda \\ \min_{x \in \partial B(0,1)} f(x) &= \min_{\lambda \in Sp\left(\frac{A+A^T}{2}\right)} \lambda \end{aligned}$$

e tali valori sono assunti sui rispettivi autovettori normalizzati

Lemma 20.22. Per ogni $H \in M(n, n, \mathbb{R})$ vale

$$\det(I + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \cdot \text{tr}(H) + O(\varepsilon^2) \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

Dimostrazione.

$$[I + \varepsilon H]_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon h_{ij} \quad \text{dove } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Ricordando che

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

otteniamo che

$$\det(I + \varepsilon H) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \varepsilon h_{ii} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq Id}} P(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Ora ogni termine della seconda sommatoria contiene almeno 2 elementi che non stanno sulla diagonale (infatti esiste i con $\sigma(i) \neq i$) dunque la sommatoria è un $O(\varepsilon^2)$ da cui la tesi. \square

Corollario 20.23. Se $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ con $\det A = 1$ allora

$$\det(A + \varepsilon H) = 1 + \varepsilon \text{tr}(A^{-1}H) + O(\varepsilon^2)$$

Dimostrazione. Osserviamo che l'espressione è ben definita in quanto se $\det A = 1$ allora A è invertibile

$$\det(A + \varepsilon H) = \det(A(I + \varepsilon A^{-1}H)) = \det A \det(I + \varepsilon A^{-1}H) = \det(I + \varepsilon A^{-1}H)$$

Esercizio 20.24 (Gruppo speciale lineare).

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici di taglia $n \times n$ e a coefficienti reali. Definiamo $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ con $\phi(A) = \det A$.

(a) Mostrare che

$$SL_{\mathbb{R}}(n) = \{A \in V : \phi(A) = 1\}$$

è una sottovarietà di V .

(b) Calcolare $T_I O(n)$

Dimostrazione. Per l'osservazione 29 basta mostrare che $\forall A \in SL_{\mathbb{R}}(n)$ la surgettività di $d\phi(A) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ovvero che non è mai identicamente nulla.

Per il corollario precedente $d\phi(A)[I_n] = n$ dunque non è identicamente nulla

Esercizio 20.25 (Gruppo ortogonale).

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici di taglia $n \times n$ a coefficienti reali.

Mostrare che

$$O(n) = \{A \in V : A^T A = I\}$$

Dimostrazione. Sia

$$Sym(n) = \{A \in V : A^T = A\}$$

Definiamo $\psi : V \rightarrow Sym(n)$ data da $\psi(A) = A^T A$.

Se mostriamo che $d\psi(A)$ è suriettiva per ogni $A \in O(n)$ per l'osservazione 29 dimostro che $O(n)$

è una sottovarietà di dimensione $n^2 - \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$ infatti ($Sym(n)$ ha dimensione $\frac{n^2 + n}{2}$).
Calcoliamo $\phi(I + \varepsilon H)$

$$\phi(I + \varepsilon H) = (I + \varepsilon H)^T (I + \varepsilon H) = I + \varepsilon (H^T + H) + o(\varepsilon)$$

abbiamo dunque $d\psi(I)[H] = H^T + H$.

L'applicazione $d\psi(I)$ è suriettiva, infatti

$$S \in Sym(n) \Rightarrow d\psi(I) \left[\frac{1}{2} S \right] = S$$

dunque $O(n)$ è una sottovarietà in un intorno di I .

Mostriamo che lo è anche in un intorno di ogni $A \in O(n)$

$$\psi(A + \varepsilon H) = (A + \varepsilon H)^T (A + \varepsilon H) = A^T A + \varepsilon (A^T H + H^T A) + o(\varepsilon)$$

dunque $d\psi(A)[H] = A^T H + H^T A$.

Ora $d\psi(A)$ è suriettiva, infatti

$$S \in Sym(n) \Rightarrow d\psi(A) \left[\frac{1}{2} AS \right] = S$$

Calcoliamo $T_I O(n)$

$$T_I O(n) = \{H \in V : d\psi(I)[H] = 0\} = \{H \in V : H^T = -H\}$$

Esercizio 20.26. Sia

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 - x = 0\}$$

(a) C è compatto

(b) Studiare la regolarità di C

(c) Trovare massimi e minimi vincolati a C di

$$f((x, y, z)) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$$

Dimostrazione. Siano $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ e $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - x$

(a) Se $g(X) = 1$ allora $|X| = 1$. C è un insieme limitato.

Inoltre $C = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\})$ dunque è chiuso (intersezioni di preimmagini di chiusi tramite funzioni continue).

(b) C è una curva regolare in un intorno di $P \in C$ se e solo se $\begin{pmatrix} \nabla g_1(P) \\ \nabla g_2(P) \end{pmatrix}$ ha rango massimo

(ovvero 2).

Ora se $P = (x, y, z)$ allora

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(P) \\ \nabla g_2(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x - 1 & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

Il minore $\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{pmatrix}$ ha determinante pari a $-4yz$.

Se $zy \neq 0$ allora la matrice ha rango massimo, altrimenti distinguiamo i vari casi

- Se $z = 0$. Il primo minore ha determinante $2y$ quindi:
 - * se $z = 0$ e $y = 0$ allora la matrice non ha rango massimo
 - * se $z = 0$ e $y \neq 0$ allora la matrice ha rango massimo
- Se $y = 0$ e $z \neq 0$ allora dallo studio del minore dato dalla prima e terza colonna otteniamo che la matrice ha rango massimo se e solo se $x \neq \frac{1}{2}$.

I possibili punti singolari si hanno per

$$(x, 0, 0) \text{ e } \left(\frac{1}{2}, 0, z\right)$$

Ora $(x, 0, 0) \in C$ se e solo se $x = 1$, mentre $(\frac{1}{2}, 0, z) \notin C$ per nessun z .
 C ha un unico punto singolare $P_1 = (1, 0, 0)$

- Trovare massimi e minimi la funzione $x^2 + (y-1)^2 + z^2$ su C è equivalente a trovare quelli della funzione $h(x, y, z) = 2 - 2y$ infatti $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo che un punto di massimo o di minimo risolve il sistema

$$\begin{cases} \nabla h(x, y, z) = \lambda \nabla g_1(x, y, z) + \mu \nabla g_2(x, y, z) \\ g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \lambda 2x + \mu(2x - 1) \\ -2 = \lambda 2y + \mu 2y \\ 0 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 - x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda otteniamo che $\lambda z = 0$ quindi distinguiamo i casi

- $z = 0$ allora dalle ultime due equazioni otteniamo $(x, y) = (1, 0)$ ma $y = 0$ non verifica la seconda equazione.
 Dunque se $z = 0$ il sistema è impossibile
- $\lambda = 0$ allora dalla seconda notiamo che $\mu \neq 0$.
 Dalla prima abbiamo $\mu(2x - 1) = 0$ ovvero $x = \frac{1}{2}$.
 Dall'ultima otteniamo $y = \pm \frac{1}{2}$.
 Dalla penultima $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange fornisce 4 soluzioni

$$P_2 = \frac{1}{2}(1, 1, \sqrt{2}) \quad P_3 = \frac{1}{2}(1, 1, -\sqrt{2}) \quad P_4 = \frac{1}{2}(1, -1, \sqrt{2}) \quad P_5 = \frac{1}{2}(1, -1, -\sqrt{2})$$

Per trovare massimi e minimi basta confrontare i valori di f assunti su P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5

20.2 Esercizi su serie di funzioni

Esercizio 20.27. *Elencherò delle serie di potenze e i loro relativi RdC:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad R = 1 \quad \text{convergenza in } \overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k} \quad R = 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k z^k \quad R = 1$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \quad R = +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k! z^k \quad R = 0, \text{ converge solo in } z = 0$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k!}}{k!} \quad \text{svolgimento appena completo tutto}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{(k^2)}}{k!} \quad \text{svolgimento appena completo tutto}$$

Esercizio 20.28. $F(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ con raggio di convergenza $R > 0 \implies \forall r$ tale che $0 < r < R$

F è M -Lipschitz su $B(0, r)$, con $M = \sum_{k=0}^{+\infty} k |c_k| r^{k-1}$.

Esercizio 20.29. *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k! z^{k!}$$

Dimostrazione. Se $|z| = 1$ allora il termine della serie non è infinitesimo e dunque la serie non converge, dunque $R \leq 1$.

Sia $z = t \in (0, 1)$ allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! t^{k!} \leq \sum_{h=0}^{+\infty} h t^h$$

dove abbiamo usato che la serie è a termini positivi.

Ora la serie di destra converge, dunque per confronto anche quella di sinistra.

Dunque $R \geq t$ e poichè vale $\forall t < 1$ si ha $R = 1$

Esercizio 20.30. *Trovare il raggio di convergenza della serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k! z^{k^2}$$

Dimostrazione. Se $z = 1$ la serie non converge (il termine generale non è infinitesimo) dunque $R \leq 1$.

Viceversa se $z = t \in (0, 1)$ applicando il criterio del rapporto otteniamo

$$\frac{(k+1)! t^{k^2} \cdot t^{2k+1}}{k! t^{k^2}} \rightarrow 0$$

dunque la serie converge, ovvero $(0, 1) \subseteq B(0, R)$ e quindi $R \geq 1$

20.3 Esercizi sulle curve

Esercizio 20.31. *La curva*

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \gamma(t) = \begin{cases} (t, t \sin \frac{1}{t}) & t \in [0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases}$$

ha lunghezza infinita

Esercizio 20.32. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regolare, chiusa, iniettiva e di classe C^2 allora*

$$I = \int_a^b k(t) |\gamma'(t)| dt = \pm 2\pi$$

dove il segno deriva dall'orientazione della curva

Dimostrazione. Poichè

$$k(t) = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

allora l'integrale in studio diventa

$$\int_a^b \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} (x'^2 + y'^2)^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2} dt$$

Posto $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ osserviamo che essendo la curva regolare $\varphi(t) \neq 0$, dunque possiamo passare in coordinate polari

$$\varphi(t) = \rho(t) \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

Derivando otteniamo

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \varphi'(t) = \rho' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \theta'$$

inoltre poichè $\varphi(a) = \varphi(b)$ allora $\rho(a) = \rho(b)$ e $\theta(a) = \theta(b) + 2k\pi$ dove $k \in \mathbb{Z}$ Ora

$$y''x' - x''y' = \rho^2 \theta'$$

dunque

$$I = \int_a^b \frac{\rho^2 \theta'}{\rho^2} dt = \theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$$

Ora poichè la curva è iniettiva $k = \pm 1$ (si usa il teorema della curva di Jordan)

20.4 Esercizi sulle forme differenziali

Esercizio 20.33. *Discutere sull'esattezza e chiusura della forma*

$$\omega(x, y) = -y dx + \sin x dy$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\partial_y(-y) \neq \partial_x(\sin x)$ dunque ω non è chiusa e dunque nemmeno esatta

Esercizio 20.34. *Discutere sull'esattezza e chiusura della forma*

$$\omega(x, y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (y dx - x dy)$$

Dimostrazione. Sia $A = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) y$ e $B = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) (-x)$ allora $\omega = A dx + B dy$

$$\partial_y A = \partial_x B = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

dunque tale forma è chiusa.

Essendo definita su $x \neq 0$ e $y \neq 0$ ovvero sui 4 quadranti è esatta (i quadranti sono semplicemente connessi).

Passiamo al calcolo del potenziale

$$F_x = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + g(y)$$

Ora $F_y = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$ dunque $g'(y) = 0$ ovvero $g(y) = c$.

Una primitiva è la funzione

$$F(x, y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$$

Esercizio 20.35. *Discutere sull'esattezza e chiusura della forma*

$$\omega(x, y, z) = (y - z) dx + (x + z + 1) dy + (y - x + 1) dz$$

Nel caso sia esatta trovare una scrittura esplicita per il potenziale

Dimostrazione. Poniamo $A^1 = y - z$, $A^2 = x + z + 1$ e $A^3 = y - x + 1$.

Richiedere che la forma sia chiusa equivale a provare $\partial_j A^i - \partial_i A^j = 0$ per $i, j = 1, \dots, 3$ ovvero provare le 3 condizioni

$$\begin{cases} \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = 0 \\ \partial_1 A^3 - \partial_3 A^1 = 0 \\ \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = 0 \end{cases}$$

un semplice conto mostra che tali condizioni sono verificate.

Osserviamo inoltre che Ω è definita su \mathbb{R}^3 che è semplicemente connesso, dunque la forma è esatta.

Calcolare il potenziale, equivale a trovare una funzione u tale che $\omega = dU$ ovvero

$$\partial_j U = A^j \text{ per } j = 1, \dots, 3$$

- Supponiamo che la condizione valga per $j = 1$ allora dal teorema fondamentale del calcolo:

$$U(x, y, z) = U(0, y, z) + \int_0^x \partial_1 U(t, y, z) dt = g(y, z) + x(y - z)$$

dunque $U(x, y, z)$ deve avere la forma

$$x(y - z) + g(y, z)$$

- Affinchè la condizione valga per $j = 2$ deve accadere

$$\partial_2 U(x, y, z) = g_y(y, z) + x = x + z + 1$$

dunque deve accadere

$$g_y(y, z) = z + 1$$

Ora dal teorema fondamentale del calcolo:

$$g(y, z) = g(0, z) + \int_0^y \partial_1 g(s, z) ds = h(z) + y(z + 1)$$

Dunque abbiamo (affinchè la condizione valga per $j = 1, 2$)

$$U(x, y, z) = x(y - z) + y(z + 1) + h(z)$$

- Imponendo $\partial_3 U = A^3$ otteniamo

$$-x + y + h'(z) = y - x + 1 \quad \Rightarrow \quad h'(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad h(z) = z + c$$

dove $c \in \mathbb{R}$

Dunque tutti i potenziali sono della forma

$$U(x, y, z) = U(x, y, z) = x(y - z) + y(z + 1) + z + c \quad c \in \mathbb{R}$$

infatti essendo \mathbb{R}^3 semplicemente connesso, due potenziali differiscono per una costante

Esercizio 20.36. *Discutere sull'esattezza e chiusura della forma*

$$\omega(x, y, z) = A^1 dx + A^2 dy + A^3 dz = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{[(x - y)^2 + z^2]^2} dx + \frac{2x(x - y)}{[(x - y)^2 + z^2]^2} dy + \frac{2xy}{[(x - y)^2 + z^2]^2} dz$$

Nel caso sia esatta calcolare una primitiva

Dimostrazione. Il fatto che sia chiusa equivale a provare $\partial_i A^j = \partial_j A^i$ per $i, j = 1, 2, 3$ (3 condizioni: una semplice verifica).

Per quanto riguarda l'esattezza, osserviamo che ω è definita su

$$\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (\{z = 0\} \cap \{x = y\}) = \mathbb{R}^3 \setminus \{ \text{retta} \}$$

dunque su un dominio non semplicemente connesso.

Ora $\pi_1(\Omega) = \mathbb{Z}$ dunque ha un solo generatore, ad esempio

$$\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Se proviamo che $\int_\gamma \omega = 0$ allora la forma risulterà esatta

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - \cos^2 t)(-\sin t) - 2 \sin t \cos t (\cos t)] dt = 0$$

Andiamo a determinare un potenziale ovvero cerchiamo U tale che

$$\partial_j U = A^j \quad \text{per } j = 1, 2, 3$$

- Supponiamo che la condizione valga per $j = 3$ allora dal teorema fondamentale del calcolo:

$$U(x, y, z) = g(y, z) - \int_0^z \frac{2xs}{[(x-y)^2 + s^2]^2} ds$$

Ora

$$\frac{2xs}{[(x-y)^2 + s^2]^2} = \frac{d}{ds} \frac{x}{(x-y)^2 + s^2} \Rightarrow U(x, y, z) = g(x, y) + \frac{x}{(x-y)^2} + \frac{x}{(x-y)^2 + z^2}$$

Poniamo

$$\tilde{g}(x, y) = g(x, y) + \frac{x}{(x-y)^2}$$

ottenendo

$$U(x, y, z) = \tilde{g}(x, y) + \frac{x}{(x-y)^2 + z^2}$$

- Affinchè valga la condizione per $j = 1$ deve accadere

$$\partial_1 U = \tilde{g}_x + \frac{(x-y)^2 + z^2 - 2x(x-y)}{[(x-y)^2 + z^2]^2} = A^1 \Rightarrow \tilde{g}_x = 0$$

- In modo analogo, affinchè valgano le condizione per $j = 2$ si avrà $\tilde{g}_y = 0$

Mettendo insieme i 3 punti otteniamo che un potenziale è della forma

$$U(x, y, z) = \frac{x}{(x-y)^2 + z^2}$$

Esercizio 20.37. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ armonica.

Mostrare che se Ω è semplicemente connesso, allora esiste $v \in C^2(\Omega)$ tale che $\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$.

Dimostrazione. Osserviamo che la forma $u_y dx - u_x dy$ è chiusa ovvero $\partial_y u_y = \partial_x u_x$.

Ora

$$\partial_y u_y = u_{yy} \quad \partial_x(-u_x) = -u_{xx}$$

dunque essendo armonica vale $u_{xx} + u_{yy} = 0$ da cui la tesi.

Poichè il dominio è semplicemente connesso, allora tale risulta esatta dunque $\exists v \in C^2(\Omega)$ con $v_x = u_y$ e $v_y = -u_x$ da cui la tesi

Esercizio 20.38. Nell'esercizio precedente l'ipotesi sulla semplice connessione è indispensabile (se vogliamo v definita su tutto Ω)

Dimostrazione. Consideriamo $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ allora

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$u_{xx} = \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -u_{yy}$$

allora $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ora

$$u_y dx - u_x dy = 2 \left(\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right)$$

che è chiusa ma non esatta.

Osserviamo che $\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$ è un potenziale su $\{y \neq 0\}$ che non è estendibile a tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

20.5 Esercizi integrali

Esercizio 20.39. Trovare l'area del dominio delimitato dall'asse x e dalla curva

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$$

Osserviamo che $x'(t) \geq 0$ dunque la funzione non torna indietro, dunque è un dominio regolare. Sia γ_0 la curva che parametrizza l'asse x da 0 a 2π e $-\gamma_1$ la curva $(x(t), y(t))$ allora dal corollario precedente

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) &= \int_{+\partial D} -y \, dx = \int_{\gamma_0} -y \, dx + \int_{-\gamma_1} y \, dx = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 - \cos t) \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = 3\pi \end{aligned}$$

Esercizio 20.40. Sia

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{z}, x \geq 1 \right\}$$

Calcolare $\text{Vol}(D)$ e $H^2(\partial D)$

Esercizio 20.41. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$ e $F = \{x^2, y^2, z\}$. Calcolare

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma$$

dove $ne_3 > 0$

Dimostrazione.

- Calcolo diretto.

Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Una parametrizzazione di S è data da

$$\phi : D \rightarrow S \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}$$

Allora otteniamo

$$\phi_x(1, 0, -2x) \quad \phi_y(0, 1, -2y) \quad \phi_x \wedge \phi_y = (2x, 2y, 1)$$

Osserviamo che la terza componente di $\frac{\phi_x \wedge \phi_y}{|\phi_x \wedge \phi_y|}$ è maggiore o uguale ad 1 da cui

$$\begin{aligned} \iint_S F \cdot n \, d\sigma &= \iint_D F(\phi) \phi_x \wedge \phi_y \, dx \, dy = \iint_D x^2 \cdot 2x + y^2 \cdot 2y + (2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \iint_D 2x^3 + 2y^3 + (2 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Ora D è simmetrica rispetto all'origine essendo x^3 e y^3 dispari otteniamo

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma = \iint_D 2 - x^2 - y^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r(2 - r^2) \, dr = 2\pi$$

- Usando il teorema della divergenza.

Sia

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$$

allora $\partial V = S \cup S_0$ dove S_0 è la circonferenza centrata nell'origine e raggio $\sqrt{2}$ nel piano (x, y)

$$\iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} F \cdot n \, d\sigma = \iint_S F \cdot n_e \, d\sigma + \iint_{S_0} F \cdot n_e \, d\sigma$$

Il secondo integrale è nullo infatti n_e su S_0 è parallelo a z da cui otteniamo

$$\iint_S F \cdot n_e \, d\sigma = \iint_V 2x + 2y + 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \operatorname{Area}(V_z) \, dz = \pi \int_0^2 (2-z)^2 \, dz = 2\pi$$

dove abbiamo usato che V simmetrico rispetto a y e $2x$ è dispari. Analogamente con $2y$

Esercizio 20.42. Sia

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1, z \geq 0\} \quad e \quad F = (1, 1, 1)$$

Calcolare

$$\iint_S F \cdot n \, d\sigma$$

dove $n \cdot e_3 > 0$

Dimostrazione. Sia

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 \leq 1, z \geq 0\}$$

allora dal teorema della divergenza, poichè $\operatorname{div} F = 0$ abbiamo

$$0 = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz = \iint_S F \cdot n_e \, d\sigma + \iint_{S_0} F \cdot n_e \, d\sigma$$

Dove S_0 è il cerchio unitario, nel piano x, y e su tale insieme $n_e = (0, 0, -1)$ dunque abbiamo

$$\iint_S F \cdot n_e = - \iint_{S_0} -1 \, dx \, dy = \pi$$

Esercizio 20.43. Sia V un aperto con bordo regolare a tratti. Sia

$$F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad F(x, y, z) = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \quad \text{dove } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

allora

$$\iint_{\partial V} F \cdot n_e \, d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \notin \bar{V} \\ 4\pi & \text{se } 0 \in V \end{cases}$$

Dimostrazione. Se $0 \notin \bar{V}$ si può usare il teorema della divergenza infatti $\operatorname{div} F = 0$.

Mostriamo ora il caso $0 \in V$.

Sia $U = \bar{V} \setminus B(0, \delta)$ allora per il teorema della divergenza $\iint_{\partial U} F \cdot n_e \, d\sigma = 0$ ora

$$\iint_{\partial U} F \cdot n_e \, d\sigma = \iint_{\partial V} F \cdot n_e - \iint_{\partial B(0, \delta)} F \cdot n_e \, d\sigma$$

Poichè

$$\int_{\partial B(0,\delta)} F \cdot n_e \, d\sigma = \iint_{\partial B(0,\delta)} \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \, d\sigma = \iint_{\partial B(0,\delta)} \frac{1}{\delta^2} \, d\sigma = \frac{1}{\delta^2} 4\pi\delta^2$$

si ha la tesi.

Esercizio 20.44. Calcolare $\iint_{S_\alpha} F \cdot n \, d\sigma$ dove F è il campo di sopra e

$$S_\alpha = \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0, z \cos \alpha - x \sin \alpha \leq 0\}$$

20.6 Esercizi sulle equazioni differenziali

Esercizio 20.45. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e $F(x) = \varphi(r)x$ dove $r = (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$.
Che condizioni bisogna imporre su φ in modo che $\operatorname{div}F = 0$?

Dimostrazione. $\operatorname{div}F = \sum \partial_i F_i$, ora

$$F_i = x_i \varphi(r) \quad \Rightarrow \quad \partial_i F_i = \varphi(r) + x_i \varphi'(r) \partial_i r = \varphi(r) + \frac{x_i^2}{r} \varphi'(r)$$

poichè $\partial_i r = \frac{x_i}{r}$.

Da cui

$$\operatorname{div}F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{r} \left(\sum x_i^2 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n\varphi(r) + \varphi'(r)r = 0$$

Ora

$$\varphi'(r) = -\frac{n}{r}\varphi(r)$$

è un'equazione differenziale lineare che ha soluzione cr^{-n} (verifica diretta).
Per Cauchy-Lipschitz tutte le soluzioni sono di questa forma con $c = \varphi(1)$

Esercizio 20.46. Sia $A(t)$ antisimmetrica e W la matrice wroskiana

$$\begin{cases} W'(t) = A(t)W(t) \\ W(0) = Id \end{cases} \quad \Rightarrow \quad W(t)^T W(t) = I \quad \forall t$$

Suggerimento: Derivare la relazione della tesi.

Esercizio 20.47.

1. Classificare il sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases}$$

2. Scrivere, esplicitamente, le soluzioni

3. Descrivere geometricamente le orbite

Esercizio 20.48. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

Mostrare che sia $x(t)$ che $y(t)$ sono soluzioni dell'equazione

$$u'' = \operatorname{Tr}(A)u' + \det A u$$

Provare ad usare questo criterio per risolvere il punto 2 dell'esercizio precedente

Esercizio 20.49. Il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

è esatto se e solo se $a + d = 0$

Esercizio 20.50. Denotiamo un punto di \mathbb{R}^{2N} come $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$. Sia $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$. Un sistema hamiltoniano è un sistema della forma

$$\begin{cases} p_i' = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(p, q) \\ q_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p, q) \end{cases}$$

Verificare che H è un integrale primo

Esercizio 20.51.

$$P_0 \text{ stabile} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{P_0} \text{ aperto connesso per archi}$$

Esercizio 20.52. Sia P_0 asintoticamente stabile. Il bacino di attrazione

$$\Omega_{P_0} = \left\{ P \in \Omega : \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_P(t) = P_0 \right\}$$

è un intorno di P_0

Dimostrazione. Poichè P_0 è asintoticamente stabile, $\Omega_{P_0} \neq \emptyset$.

Sia r_0 della definizione di asintoticamente stabile.

$$P_1 \in \Omega_{P_0} \quad \Rightarrow \quad \exists t_0 \varphi_{P_1}(t_0) \in B(P_0, r_0)$$

Ora poichè la funzione $\phi(p) = \varphi_p$ è continua in p (dipendenza dalle condizioni iniziali) abbiamo

$$P_1 \in \varphi^{-1}(B(P_0, r_0)) \subseteq \Omega_{P_0}$$

□

Esercizio 20.53. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -x - \frac{y}{\log r^2} \\ y' = -y + \frac{x}{\log r^2} \end{cases} \quad \text{dove } r^2 = x^2 + y^2$$

Studiare la stabilità dei punti stazionari.

Dimostrazione. Utilizzando le coordinate polari:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

da cui

$$(x(t)/y(t))' = r'(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} + r(t) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \theta'(t) = -r(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} + \frac{r(t)}{\log r(t)^2} \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} r' = -r \\ \theta' = \frac{1}{\log r^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r(t) = r_0 e^t \\ \theta(t) = -\frac{1}{2} \log(c + 2t) + \theta_0 \end{cases} \quad \text{dove } c = 2 \log \frac{1}{r_0}$$

Osserviamo inoltre che $\theta(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$.

Osserviamo, inoltre, che 0 è un nodo a stella per il sistema linearizzato

Esercizio 20.54. Determinare i punti critici e determinarne la stabilità del sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \sin x - y \end{cases}$$

Dimostrazione. I punti critici sono tutti e soli i punti $P_k = (k\pi, 0)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Per studiarne la stabilità consideriamo la matrice Jacobiana

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos x & -1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$J(k\pi, 0) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } k \text{ pari} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Da cui

- Se k pari, il determinante è -1 dunque ho autovalori di segno opposto dunque una sella
- Se k dispari. Allora

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

dunque poichè $Re(\lambda) < 0$ ho un fuoco stabile

Esercizio 20.55. Trovare i punti critici e stabilirne la natura per il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = y^2 - 2y \end{cases}$$

Esercizio 20.56. Sia $g \in C^1(\mathbb{R})$ con $yg(y) > 0$ per ogni $y \neq 0$.

Allora $y \equiv 0$ è soluzione di $y'' + y' + g(y) = 0$.

Studiare la stabilità della soluzione

Dimostrazione. Consideriamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} y' = p \\ p' = -p + g(y) \end{cases}$$

Notiamo che $y \equiv 0$ è soluzione infatti poichè g cambia segno in un intorno di 0 si ha $g(0) = 0$. Andiamo a studiare la stabilità di $(0, 0)$

$$DF(y, p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(y) & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g'(0) & -1 \end{pmatrix}$$

Poichè non sappiamo nulla se $g'(0) = 0$ non possiamo concludere nulla.

Consideriamo

$$G(y) = \int_0^y g(s) ds$$

allora G ha un minimo in 0 e si ha

$$V(p, y) = \frac{1}{2}p^2 + G(y)$$

è una funzione di Lyapunov infatti

$$\dot{V} = \nabla V \cdot F = (g(y)/p) \begin{pmatrix} p \\ -p - g(y) \end{pmatrix} = -p^2 < 0$$

dunque 0 è asintoticamente stabile ed inoltre Ω_0 (bacino di attrazione di $(0, 0)$) è tutto \mathbb{R}^2 infatti $\dot{V} < 0$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Esercizio 20.57. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = y = f(x, y) \\ y' = -x + x^3 = g(x, y) \end{cases}$$

allora

(i) Individuare e classificare gli eventuali punti critici

(ii) Descrivere qualitativamente le orbite

Dimostrazione. I punti critici sono $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Osserviamo che la forma $g dx - f dy$ è esatta e una primitiva è data dalla funzione

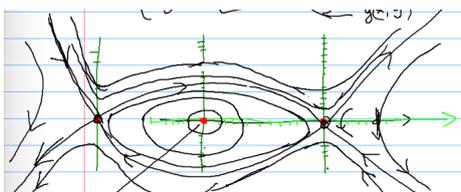
$$U(x, y) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

dunque le orbite sono descritte implicitamente da $U(x, y) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che per $c = \frac{1}{4}$ possiamo esprimere esplicitamente le traiettorie

$$U(x, y) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4}(x^4 - 2x^2 + 1) = \frac{y^2}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 - 1)$$

Il ritratto di fase è come in figura



Esercizio 20.58. Determinare esplicitamente le soluzioni di

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2 = \cos t \\ y_2' - 2y_1 = \sin t \end{cases}$$

[Suggerimento: usare il metodo di variazioni delle costanti ovvero cercare una soluzione della forma

$$y(t) = e^{tA}c(t) \text{ dove } c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

Esercizio 20.59. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y \\ Y(0) = Id \end{cases}$$

dove $A(t) : \mathbb{R} \rightarrow M(n, n)$ continua.

Mostrare che se $A(t)$ è antisimmetrica per ogni t allora se Y è soluzione del sistema matriciale si ha $Y(t)$ ortogonale

Dimostrazione. Osserviamo che Y è soluzione del sistema se le sue colonne Y_i risolvono il sistema

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = e_1 \end{cases}$$

La tesi equivale a dimostrare che $Y^T(t) \cdot Y(t) = Id$ andando a derivare otteniamo

$$\frac{d}{dt} (Y^T(t) \cdot Y(t)) = Y'^T Y(t) + Y^T Y' = 0$$

dunque $Y^T(t)Y(t) = \text{costante}$ per $t = 0$ la tesi

Esercizio 20.60. Trovare un'espressione esplicita per le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y_1' + 2y_2 = \cos t \\ y_2' - 2y_1 = \sin t \end{cases}$$

Dimostrazione. Possiamo scrivere il sistema nella forma

$$Y' = AY + b(t) \text{ dove } A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } b(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono date da

$$y(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds + e^{tA} \xi \text{ con } \xi = y(0)$$

ora $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$ da cui

$$e^{-tA} b(s) = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cos 2t + \sin t \sin 2t \\ -\cos t \sin 2t + \cos 2t \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

dunque

$$\int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{tA} \int_0^t e^{-sA} b(s) ds = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{pmatrix}$$

mentre una soluzione del sistema omogeneo ha la forma $e^{tA}\xi$

Esercizio 20.61. *Si consideri il sistema*

$$Y' = AY \text{ dove } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che l'origine è stabile e scrivere le equazioni generali del sistema