Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Il Teorema di immersione di Jin

Candidato
Francesco Di Baldassarre

Relatore
Prof. Mauro Di Nasso

Anno Accademico 2011/2012

Indice

1 Introduzione **5**

1.1 Notazione 6

2 Iperreali **7**

2.1 Filtri ed Ultrafiltri 7

2.2 Costruzione e proprietà degli Iperreali 9

2.3 Estensione di entità reali 12

2.4 Transfer Principle 14

2.4.1 Modello standard e modello nonstandard 14

2.4.2 Formule in un modello 15

2.4.3 Formule nonstandard 16

2.4.4 Principio del Transfer 17

2.5 Insiemi interni 18

3 Teorema di immersione di Jin **21**

3.1 Densità su $\mathbb{N}$ 21

3.2 Densità su $^*\mathbb{N}$ 22

3.3 Teorema di immersione di Jin 24

4 Applicazioni **29**

4.1 Teorema di Kneser 29

4.2 Teorema di Plünnecke 33

4.3 Immersione Finita 36

Capitolo 1

Introduzione

Dati A e B insiemi di numeri naturali definisco

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Molti studi in teoria dei numeri si occupano di risolvere problemi inversi, cioè di trovare informazioni sulla struttura degli insiemi A e B note alcune proprietà dell'insieme $A + B$.

La principale misura di grandezza che considereremo per insiemi di numeri interi è la "densità". Tra le diverse formalizzazioni matematiche del concetto di densità quelle che noi utilizzeremo saranno la densità di Shnirel'man, la densità asintotica inferiore, la densità asintotica superiore e la densità di Banach. Tra queste la densità di Banach è quella che più si avvicina al concetto di probabilità in uno spazio di misura ma è anche la densità meno utilizzata dai teorici dei numeri. Gran parte dei risultati ottenuti in teoria dei numeri infatti riguardano la densità di Shnirel'man o la densità asintotica inferiore.

Dato un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ la densità di Shnirel'man $\sigma(A)$ è definita come

$$\sigma(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{|A \cap [1, n]|}{n}$$

mentre la densità di Banach $BD(A)$ è definita come

$$BD(A) = \lim_{n \to \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|A \cap [k, k + n - 1]|}{n}$$

Chiaramente si osserva che $0 \leq \sigma(A) \leq BD(A) \leq 1$.

Utilizzando strumenti di analisi nonstandard Renling Jin è recentemente riuscito a sviluppare un metodo generale che permette di trasformare un risultato di teoria dei numeri riguardante la densità di Shnirel'man o la densità asintotica inferiore in un risultato analogo riguardante la densità di Banach (cf.[3],[5]).

Per semplificare la trattazione in questa tesi mostreremo la costruzione tramite ultrapotenze dei numeri Iperreali ed Ipernaturali (cf.[1]). Ci soffermeremo in particolare sul Transfer Principle, che sarà il principale strumento utilizzato per tradurre proposizioni riguardanti i numeri reali in proposizioni riguardanti i numeri iperreali e viceversa. Dopo aver esteso le principali definizioni di densità a particolari insiemi di numeri ipernaturali enunceremo e dimostreremo il teorema di immersione di Jin. Questo teorema mette in relazione la densità di Banach di insiemi di numeri naturali con la densità di Shnirel'man e la densità asintotica inferiore di insiemi di numeri ipernaturali. Utilizzando il Transfer Principle ed il teorema di immersione di Jin ricaveremo quindi dei risultati analoghi ai teoremi di Kneser (cf.[6]) e Plünnecke (cf.[4],[7]) riguardanti la densità di Banach.

Ad esempio dato il teorema di Plünnecke

Teorema di Plünnecke. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B una base di ordine h. Allora vale*

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

otterremo il seguente

Teorema 1.0.1. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B base a tratti di ordine h. Allora vale*

$$BD(A+B) \geq BD(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

1.1 Notazione

Nel testo useremo la seguente notazione:

$\subseteq$ indica l'inclusione
$\subset$ indica l'inclusione propria
$\cup$ indica l'unione
$\sqcup$ indica l'unione disgiunta
$[a, b]$ indica l'intervallo chiuso
(a, b) indica l'intervallo aperto

Capitolo 2

Iperreali

Dato un campo ordinato $\mathbb{F}$ contenente i numeri naturali un numero $\epsilon \in \mathbb{F}$ si dice infinitesimo se $0 \leq |\epsilon| < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, mentre un numero ω si dice infinito se $|\omega| > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali $^*\mathbb{F}$ sono:

1. contiene numeri infiniti e numeri infinitesimi non zero
2. è dotato di una struttura di campo ordinato
3. contiene $\mathbb{F}$ come sottocampo
4. mantiene alcune delle proprietà di $\mathbb{F}$

Di seguito mostreremo una costruzione di $^*\mathbb{R}$ quozientando le funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite una relazione di equivalenza $\sim$ tale che $f \sim g$ se f e g coincidono su un insieme "grande". Per formalizzare questa nozione di "grande" useremo la nozione di ultrafiltro.

2.1 Filtri ed Ultrafiltri

Diamo le definizioni di filtro ed ultrafiltro e mostriamo le loro principali proprietà.

Definizione 2.1.1. Sia I un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(I) = \{A : A \subseteq I\}$ l'insieme delle parti di I. Un *filtro* su I è una classe non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tale che:

1. $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \subseteq I \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$

Un filtro si dice *proprio* se $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Definizione 2.1.2. Un *ultrafiltro* è un filtro proprio $\mathcal{F}$ tale che:

$$\forall A \in \mathcal{P}(I) \text{ vale } A \in \mathcal{F} \ \vee \ A^c \in \mathcal{F}$$

Tale condizione è equivalente a $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists i : A_i \in \mathcal{F}$.

Esempi 2.1.3. Sia I un insieme infinito.

1. $\mathcal{F}^{co} = \{A \subseteq I : I \setminus A \text{ è finito } \}$ è il filtro cofinito su I ed é proprio se e solo se I è infinito. Non è un ultrafiltro.

2. Per ogni $i \in I$ $\mathcal{F}^i = \{A \subseteq I : i \in A\}$ è un ultrafiltro ed è chiamato *l'ultrafiltro principale* generato da i. Se I è finito ogni ultrafiltro su I è nella forma $\mathcal{F}^i$ per qualche i.

3. Se $\emptyset \neq \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(I)$ allora il filtro $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ generato da $\mathcal{M}$ è il più piccolo filtro contenente $\mathcal{M}$ e corrisponde a

$$\mathcal{F}^{\mathcal{M}} = \{A \subseteq I : A \supseteq B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_t \quad B_i \in \mathcal{M}\}$$

Definizione 2.1.4. Un insieme non vuoto $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(I)$ ha la proprietà dell'intersezione finita (FIP) se $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{M} \quad B_1 \cap \cdots \cap B_n \neq \emptyset$

Osservazioni 2.1.5.

1. Ogni filtro $\mathcal{F}$ su I contiene {I}.

2. Se un ultrafiltro contiene un insieme finito allora contiene un singoletto e quindi è principale.

3. $\mathcal{M}$ ha la FIP $\iff$ $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ è un filtro proprio.

4. Se $\mathcal{M}$ ha la FIP allora $\forall A \subset I$ almeno uno tra $\mathcal{M} \cup \{A\}$ *e* $\mathcal{M} \cup \{A^c\}$ ha la FIP.

5. $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro $\iff$ $\mathcal{F}$ è un filtro proprio massimale.

La proprietà 4 suggerisce un metodo per costruire un ultrafiltro non principale su un insieme infinito I: parto da $\mathcal{M}$ dotato della FIP e per ogni $A \subset I$ aggiungo A oppure A^c a $\mathcal{M}$ in modo da conservare la FIP. Il mio ultrafiltro quindi sarà $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$. Per far ciò è necessario poter scorrere gli elementi di $\mathcal{P}(I)$ ad uno ad uno, assunzione equivalente all'assioma di scelta. La versione dell'assioma della scelta usata in questa costruzione è il lemma di Zorn.

Lemma di Zorn. *Se $(P, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato in cui ogni catena ha un maggiorante allora P contiene un elemento massimale.*

Proposizione 2.1.6. *Ogni insieme $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(I)$ dotato della FIP può essere esteso ad un ultrafiltro su I.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{M}$ ha la FIP allora $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ è un filtro proprio. Sia P la classe dei filtri propri su I che contengono $\mathcal{F}^{\mathcal{M}}$ ordinata per inclusione. Presa una catena $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots$ in P questa ha un maggiorante in quanto $\bigcup\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t \in$ P. Infatti possiamo riscrivere tale unione come $\bigcup\limits_{t \in T} \mathcal{F}_t = \{A : \exists t \in T : A \in \mathcal{F}_t\}$ che è un filtro e che contiene $\mathcal{M}$. Per il Lemma di Zorn quindi P ha un elemento massimale $\mathcal{F}$ $\Rightarrow \mathcal{F}$ è un filtro massimale $\Rightarrow \mathcal{F}$ è un ultrafiltro. □

Corollario 2.1.7. *Ogni insieme infinito possiede un ultrafiltro non principale.*

Dimostrazione. Sia I un insieme infinito, allora $\mathcal{F}^{co}$ è un filtro su I dotato di FIP $\Rightarrow$ esiste un ultrafiltro $\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}^{co} \subseteq \mathcal{F}$. Dimostro che $\mathcal{F}$ non è principale. Sia $i \in I$, allora $I \setminus \{i\} \in \mathcal{F}^{co} \Rightarrow I \setminus \{i\} \in \mathcal{F} \Rightarrow \{i\} \notin \mathcal{F}$ altrimenti $\mathcal{F}$ non sarebbe un filtro proprio. Quindi $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^i \quad \forall i \in I \Rightarrow \mathcal{F}$ non è principale. □

2.2 Costruzione e proprietà degli Iperreali

Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'insieme delle successioni reali. Definisco una somma $\oplus$ ed un prodotto $\odot$ su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} f \oplus g = h &\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ dove} \\ h &\colon n \longmapsto f(n) + g(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \odot g = h &\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ dove} \\ h &\colon n \longmapsto f(n) \cdot g(n) \end{aligned}$$

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \oplus, \odot)$ è un anello commutativo con la funzione nulla come zero e la funzione costante 1 come unità.
Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Definisco una relazione di equivalenza $\sim$ ponendo:

$$f \sim g \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$$

Le proprietà di relazione di equivalenza seguono direttamente dalle proprietà di filtro di $\mathcal{F}$. Se $f \sim g$ dico che f e g coincidono quasi ovunque modulo $\mathcal{F}$. Definisco

$$^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

Dato $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indico con [r] la sua classe di equivalenza in $^*\mathbb{R}$,

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s \sim r\}$$

Definisco una somma + ed un prodotto $\cdot$ in $^*\mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{aligned} [f] + [g] =& [f \oplus g] \\ [f] \cdot [g] =& [f \odot g] \end{aligned}$$

Definisco un ordinamento su $^*\mathbb{R}$ ponendo

$$[f] < [g] \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)\} \in \mathcal{F}$$

È facile verificare che le definizioni sono ben poste, cioè non dipendono dai rappresentanti scelti nelle classi di equivalenza.

Nota. Di seguito useremo la seguente notazione

$$[[f = g]] = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\}$$

e analogamente per $[[f < g]]$,$[[f > g]]$ e $[[f \neq g]]$.

Osservazione 2.2.1. La costruzione degli Iperreali dipende dalla scelta non univoca dell'ultrafiltro $\mathcal{F}$. Si può dimostrare infatti che la cardinalità dell'insieme degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è pari alla cardinalità di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Assumendo l'ipotesi del continuo si può dimostrare che tutti i quozienti di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ determinano campi ordinati isomorfi e dunque la costruzione di $^*\mathbb{R}$ è unica. Senza tale ipotesi la situazione resta indeterminata.

Enunciamo alcune delle principali proprietà degli Iperreali.

Teorema 2.2.2. *La struttura* $(^*\mathbb{R}, +, *)$ *è un campo ordinato con [0] come elemento nullo e [1] come unità.*

Dimostrazione. È immediato osservare che $^*\mathbb{R}$ è un anello commutativo con [0] come elemento nullo, [1] come unità ed in cui l'opposto di [f] è [-f].

Definisco l'inverso di elementi non nulli.
Sia $[f] \neq [0] \ \Rightarrow [[f = 0]] \notin \mathcal{F} \ \Rightarrow J = [[f \neq 0]] \in \mathcal{F}$.
Definisco $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{f(n)} & n \in J \\ 0 & n \notin J \end{cases}$$

Allora $[[f \cdot g = 1]] = J \in \mathcal{F} \ \Rightarrow [f] \cdot [g] = [f \cdot g] = [1] \ \Rightarrow [g] = [f^{-1}]$.
Dimostro che ${}^*\mathbb{R}$ è totalmente ordinato.
Siano $[f], [g] \in {}^*\mathbb{R}$, allora $\mathbb{N} = [[f = g]] \sqcup [[f < g]] \sqcup [[f > g]]$ quindi uno solo di questi 3 insiemi appartiene ad $\mathcal{F}$ e perciò vale una sola delle seguenti:

$$\begin{cases} [f] = [g] \\ [f] < [g] \\ [f] > [g] \end{cases}$$

Dimostro che ${}^*\mathbb{R}^+ = \{[f] \in {}^*\mathbb{R} : [f] > [0]\}$ è chiuso per addizione e moltiplicazione.
Dimostro che è chiuso per addizione.
$[f], [g] \in {}^*\mathbb{R}^+ \ \Rightarrow [[f > 0]], [[g > 0]] \in \mathcal{F}$. Quindi
$[[f + g > 0]] \supseteq [[f > 0]] \cap [[g > 0]] \in \mathcal{F} \ \Rightarrow [[f + g > 0]] \in \mathcal{F}$
$\Rightarrow [f + g] \in {}^*\mathbb{R}^+$.
La dimostrazione della chiusura per moltiplicazione è analoga. □

Possiamo trattare $\mathbb{R}$ come un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$ identificando $r \in \mathbb{R}$ con la classe di equivalenza ${}^*r = [C_r]$ della funzione costante $C_r : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $C_r(n) = r \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Vale infatti il seguente teorema di facile dimostrazione.

Teorema 2.2.3. *La mappa $\phi \colon \mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ tale che $\phi(r) = {}^*r$ è un omomorfismo iniettivo di campi.*

In ${}^*\mathbb{R}$ esistono numeri infinitesimi non banali e numeri infiniti.

Ad esempio sia $\epsilon \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\epsilon(n) = \frac{1}{n}$. Allora $[\epsilon] \in {}^*\mathbb{R}$ ed ho:

1. $[[0 < \epsilon]] = \mathbb{N} \in \mathcal{F}$
2. $[[\epsilon < r]] \in \mathcal{F}$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ poichè cofinito quindi $[\epsilon] < r \ \ \forall r \in \mathbb{R}^+$

Quindi ϵ è un numero *infinitesimo* non banale.

Sia $\omega \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega(n) = n$, allora $[\omega] \in {}^*\mathbb{R}$ ed ho

1. $[[\omega > r]] \in \mathcal{F}$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ poichè cofinito quindi $[\omega] > r \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Quindi ω è un numero *infinito.*

Osservazione 2.2.4. Il fatto che ${}^*\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ siano due strutture differenti dipende dall'aver scelto un filtro $\mathcal{F}$ non principale. Infatti se $\mathcal{F} = \mathcal{F}^k$ allora avrei che $[f] = [g] \iff f(k) = g(k)$. In tal caso $\forall [f] \in {}^*\mathbb{R} \quad f(k) = r \Longrightarrow [f] = {}^*r$ quindi ${}^*\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

2.3 Estensione di entità reali

Esiste un modo canonico di estendere insiemi, funzioni e relazioni su $\mathbb{R}$ a dei loro corrispettivi su ${}^*\mathbb{R}$.

Definizione 2.3.1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, definisco *iper-estensione* o *estensione nonstandard* di A l'insieme

$$^*A = \{[f] \in {}^*\mathbb{R} : [[f \in A]] \in \mathcal{F}\}$$

Dimostro che è una buona definizione.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&f \sim g \iff [[f = g]] \in \mathcal{F} \\
&[[g \in A]] \supseteq [[f = g]] \cap [[f \in A]] \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow [[g \in A]] \in \mathcal{F} \\
&\Rightarrow [g] \in {}^*A
\end{aligned}$$

□

Osservazione 2.3.2. $A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow {}^*A \cap \mathbb{R} = A$

Dimostrazione. Sia $s \in A$ e $C_s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione costante $C_s(n) = s$. Allora $[[C_s \in A]] = \mathbb{N} \in \mathcal{F} \Rightarrow [C_s] \in {}^*A$. Identificando $[C_s]$ con s quindi ho che $A \subseteq {}^*A$ ed in particolare $A \subseteq {}^*A \cap \mathbb{R}$. Se $A \subset {}^*A \cap \mathbb{R}$ allora $\exists [C_r] \in {}^*A \cap \mathbb{R} : r \notin A$ quindi $[[r \in A]] = \emptyset$. Il che è assurdo in quanto $[C_r] \in {}^*A \Rightarrow [[r \in A]] \in \mathcal{F}$. □

Gli elementi in ${}^*A \setminus A$ sono quindi i nuovi elementi "nonstandard" di ${}^*A$.

Teorema 2.3.3. *Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è infinito se e solo se ${}^*A$ ha degli elementi nonstandard.*

Dimostrazione. Dimostro $\Rightarrow$
Sia A infinito, allora esiste $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che:

1. $f(n) \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \neq m \Rightarrow f(n) \neq f(m)$

Allora $[f] \in {}^*A$ e $[f] \neq [C_s] \quad \forall s \in A$ poichè $[[f = s]]$ è al più un singoletto.
Dunque ${}^*A \setminus A \neq \emptyset$.

Dimostro $\Leftarrow$
Dimostro che se A è finito allora $A = {}^*A$
Sia $A = \{a_1, \dots, a_n\}$
Se $[f] \in {}^*A$, allora $[[f \in A]] = [[f = a_1]] \sqcup \cdots \sqcup [[f = a_n]]$
$\Rightarrow \exists k : [[f = a_k]] \in \mathcal{F} \Rightarrow [f] = [a_k] \Rightarrow [f] \in A \Rightarrow A = {}^*A$ □

Osservazione 2.3.4. L'insieme $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{R}$ non è della forma ${}^*A$.
Infatti sia $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che ${}^*A = \mathbb{N}$, allora ho due casi:

- A infinito $\Rightarrow {}^*A = \mathbb{N}$ contiene elementi nonstandard

- A finito $\Rightarrow A = {}^*A = \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ è finito

Poichè in entrambi i casi ho un assurdo segue che $\mathbb{N}$ non è nella forma ${}^*A$ per nessun $A \subseteq \mathbb{R}$. La stessa proprietà vale sostituendo $\mathbb{N}$ con un qualunque insieme numerabile.

Definizione 2.3.5. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $F : A \longrightarrow B$, definisco *iper-estensione* o *estensione nonstandard* di F la funzione

$${}^*F \colon {}^*A \longrightarrow {}^*B$$

tale che ${}^*F([f]) = [F \circ f]$.

Dimostro che è una buona definizione.

Dimostrazione. Sia $f \sim g$, ${}^*F(f) = [F \circ f]$, ${}^*F(g) = [F \circ g]$.
$[[f = g]] \in \mathcal{F}$ e $[[F \circ f = F \circ g]] \supseteq [[f = g]]$ quindi $[[F \circ f = F \circ g]] \in \mathcal{F}$ da cui $[F \circ f] = [F \circ g]$. □

Analogamente posso definire l'iper-estensione di funzioni in più variabili.

Definizione 2.3.6. Siano $A_1, \cdots, A_k, B \subseteq \mathbb{R}$ e $F : A_1 \times \cdots \times A_k \longrightarrow B$, definisco *iper-estensione* o *estensione nonstandard* di F la funzione

$$^*F : {^*A} \longrightarrow {^*B}$$

tale che $^*F(([f_1], \cdots, [f_k])) = [F(f_1(n), \cdots, f_k(n))]$.

Estendiamo infine le relazioni su $\mathbb{R}$.

Definizione 2.3.7. Sia $\mathcal{R}$ una relazione di arietà k su $\mathbb{R}$. Allora definisco *iper-estensione* o *estensione nonstandard* di $\mathcal{R}$ la relazione $^*\mathcal{R}$ di arietà k su $^*\mathbb{R}$ tale che, dati $[f_1], \cdots, [f_k] \in {^*\mathbb{R}}$, valga

$$^*\mathcal{R}([f_1], \cdots, [f_k]) \iff [[\mathcal{R}(f_1, \cdots, f_k)]] \in \mathcal{F}$$

Dimostro che è una buona definizione.

Dimostrazione. Siano $g_1, \cdots, g_k : g_i \sim f_i \quad \forall i \in \{1, \cdots, k\}$
Allora $^*\mathcal{R}([f_1], \cdots, [f_k]) \iff [[\mathcal{R}(f_1, \cdots, f_k)]] \in \mathcal{F}$
Poichè $[[\mathcal{R}(g_1, \cdots, g_k)]] \supseteq [[\mathcal{R}(f_1, \cdots, f_k)]] \cap [[f_1 = g_1]] \cap \cdots \cap [[f_k = g_k]]$ e $[[f_i = g_i]] \in \mathcal{F}$ per ogni i allora $[[\mathcal{R}(g_1, \cdots, g_k)]] \in \mathcal{F}$.
Quindi $^*\mathcal{R}([g_1], \cdots, [g_k])$. □

2.4 Transfer Principle

Per trovare quali proprietà di un'entità reale si preservano passando alla sua iper-estensione useremo il Principio del Transfer. Tale principio ci permetterà di trasferire alcune proprietà di $\mathbb{R}$ su $^*\mathbb{R}$ e viceversa, fornendoci sia un metodo rapido di dimostrare alcune proprietà degli Iperreali, sia un sistema per riportare su $\mathbb{R}$ alcuni risultati dimostrati su $^*\mathbb{R}$.

2.4.1 Modello standard e modello nonstandard

Definisco modello standard il modello

$$\mathcal{R} = \langle \mathbb{R}, Rel_{\mathbb{R}}, Fun_{\mathbb{R}} \rangle$$

dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, $Rel_{\mathbb{R}}$ è l'insieme delle relazioni su $\mathbb{R}$ e $Fun_{\mathbb{R}}$ è l'insieme delle funzioni, eventualmente parziali, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Definisco modello nonstandard il modello

$$^*\mathcal{R} = \langle {^*\mathbb{R}}, \{^*R : R \in Rel_{\mathbb{R}}\}, \{^*F : F \in Fun_{\mathbb{R}}\} \rangle$$

In ${}^*\mathcal{R}$ quindi ho le estensioni delle funzioni e delle relazioni di $\mathcal{R}$ ma non ho un modello completo (full-structure) poichè esistono delle funzioni in ${}^*\mathbb{R}$ che non sono nella forma ${}^*F$ per qualche funzione $F \in Fun_{\mathbb{R}}$.
Ad esempio $G : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $G([n]) = [n]$ non è in ${}^*\mathcal{R}$. Infatti se esistesse $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $G = {}^*F : {}^*A \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ allora avrei ${}^*A = \mathbb{N}$ che è assurdo per l'Osservazione 2.3.4.

2.4.2 Formule in un modello

Ad ogni modello $\mathcal{S} = \langle S, Rel_S, Fun_S \rangle$ è associato un linguaggio $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ basato sul seguente alfabeto:

- Connettivi logici $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Quantificatori $\forall \quad \exists$
- Parentesi (,) , [,] , { , }
- Simboli di variabile $x,\ y,\ A,\ \cdots$

Definizione 2.4.1. L'insieme $Ter(\mathcal{L}_{\mathcal{S}})$ dei termini del linguaggio è definito dalle seguenti regole induttive:

1. Ogni variabile di $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ è un $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termine
2. Ogni elemento di S è un $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termine
3. Se $f \in Fun_S$ con arietà k e $t_1, \cdots, t_k$ sono $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termini allora $f(t_1, \cdots, t_k)$ è un $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termine

Un $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termine si dice *chiuso* se non contiene simboli di variabile.

Definizione 2.4.2. Un $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termine chiuso τ *definisce* qualcosa se:

1. $\tau = s \in S$, ed in tal caso τ definisce s
2. se $\tau_1, \cdots, \tau_k$ definiscono $s_1, \cdots, s_k$, f è una funzione di arietà k e $(s_1, \cdots, s_k) \in Dom(f)$ allora $\tau = f(\tau_1, \cdots, \tau_k)$ definisce $f(s_1, \cdots, s_k)$

Un termine è *indefinito* se non definisce nulla.

Definizione 2.4.3. Se $R \in Rel_S$ di arietà k e $t_1, \cdots, t_k$ sono $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$-termini allora $R(t_1, \cdots, t_k)$ è detta *formula atomica.*

Definizione 2.4.4. Le formule del linguaggio $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}$ sono definite induttivamente dalle seguenti regole:

1. Ogni formula atomica è una formula
2. Se φ, ψ sono formule allora $\neg\varphi,\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi)$ sono formule
3. Se φ è una formula, x è una variabile e R una relazione di arietà 1 allora $(\forall x \in R)\varphi$ e $(\exists x \in R)\varphi$ sono formule

Definizione 2.4.5. Una variabile x in una formula φ è detta *legata* se è contenuta in una sotto-formula di φ della forma $(\forall x \in R)\varphi$ oppure $(\exists x \in R)\varphi$.
Una variabile si dice *libera* se non è legata.

Definizione 2.4.6. Una *proposizione* è una formula le cui variabili sono tutte legate. Una proposizione è *definita* se non contiene variabili libere ed i suoi termini chiusi sono tutti definiti.

2.4.3 Formule nonstandard

Trasformo le formule di $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ in formule di $\mathcal{L}_{^*\mathbb{R}}$.
Sia $\tau \in Ter(\mathcal{L}_{\mathbb{R}})$, definisco $^*\tau$ tramite le seguenti regole:

1. se τ è una variabile allora $^*\tau = \tau$
2. se $\tau = f(t_1, \cdots, t_k)$ allora $^*\tau = {}^*f(^*t_1, \cdots, {}^*t_k)$

Sia φ una $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-formula, definisco $^*\varphi$ tramite le seguenti regole:

1. se φ è atomica, $\varphi = P(t_1, \cdots, t_k)$ allora $^*\varphi = {}^*P(^*t_1, \cdots, {}^*t_k)$
2. se $\varphi = \neg\psi$ allora $^*\varphi = \neg{}^*\psi$
3. se $\varphi = \psi \wedge \zeta$ allora $^*\varphi = {}^*\psi \wedge {}^*\zeta$
4. se $\varphi = \psi \vee \zeta$ allora $^*\varphi = {}^*\psi \vee {}^*\zeta$
5. se $\varphi = \psi \rightarrow \zeta$ allora $^*\varphi = {}^*\psi \rightarrow {}^*\zeta$
6. se $\varphi = \psi \leftrightarrow \zeta$ allora $^*\varphi = {}^*\psi \leftrightarrow {}^*\zeta$
7. se $\varphi = (\exists x \in P)\psi$ allora $^*\varphi = (\exists x \in {}^*P){}^*\psi$
8. se $\varphi = (\forall x \in P)\psi$ allora $^*\varphi = (\forall x \in {}^*P){}^*\psi$

2.4.4 Principio del Transfer

Transfer Principle. *Una $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-proposizione definita φ è vera se e solo se ${}^*\varphi$ è vera.*

Usando questo principio possiamo quindi dimostrare alcune proprietà di ${}^*\mathbb{R}$ senza dover far riferimento alla sua costruzione tramite ultrafiltro. Abbiamo inoltre un metodo alternativo per dimostrare alcune proposizioni riguardanti entità reali: possiamo infatti tradurle in termini Iperreali e dimostrarle su ${}^*\mathbb{R}$.

Esempi 2.4.7. Ecco alcune proprietà di $\mathbb{R}$ che si trasferiscono su ${}^*\mathbb{R}$.

1. **Principio di Eudosso-Archimede**

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} : x < m$$

Usando il Transfer ottengo

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; \exists m \in {}^*\mathbb{N} : x < m$$

È invece falso che

$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} \;\; \exists m \in \mathbb{N} : x < m$$

2. **Densità dei razionali**

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; (x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y)$$

Usando il Transfer ottengo

$$\forall x, y \in {}^*\mathbb{R} \;\; (x < y \Rightarrow \exists q \in {}^*\mathbb{Q} : x < q < y)$$

3. **Operazioni finite sugli insiemi**

$$\forall x \in A \;\; x \in A \cup B \iff x \in A \;\vee\; x \in B$$

Usando il Transfer ottengo

$$\forall x \in {}^*A \;\; x \in {}^*(A \cup B) \iff x \in {}^*A \;\vee\; x \in {}^*B$$

Quindi ${}^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$. Ciò non è vero per operazioni infinite. Infatti vale ${}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*A_n$, mentre non vale l'uguaglianza. Ad esempio ${}^*\mathbb{N} = {}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\}\right) \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} {}^*\{n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n\} = \mathbb{N}$.

4. $\mathbb{N}$ **è discreto**

$$\forall x, n \in \mathbb{N} \ \ (n \leq x \leq n+1 \Rightarrow x = n \ \vee \ x = n+1)$$

Usando il Transfer ottengo

$$\forall x, n \in {}^*\mathbb{N} \ \ (n \leq x \leq n+1 \Rightarrow x = n \ \vee \ x = n+1)$$

2.5 Insiemi interni

Definizione 2.5.1. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Definisco $[A_n] \subseteq {}^*\mathbb{R}$ l'insieme tale che:

$$[f] \in [A_n] \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in A_n\} \in \mathcal{F}$$

Gli insiemi costruiti in tal maniera sono detti *insiemi interni*.
Un insieme non interno è detto *esterno*.

Definizione 2.5.2. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : A_n \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_n \subseteq \mathbb{R}$.
Allora definisco $[f_n] : [A] \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ tale che

$$[f_n]([g]) = [h] \text{ dove } h(n) = (f_n \ \circ g)(n)$$

Le funzioni costruite in tal maniera sono dette *funzioni interne*.
Una funzione non interna è detta *esterna*.

Osservazioni 2.5.3.

1. Gli insiemi nella forma ${}^*A$ sono interni poichè ${}^*A = [A_n]$ con $A_n = A \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Ogni sottoinsieme degli Iperreali finito $X = \{[f_1], \cdots, [f_k]\}$ è interno. Infatti $X = [X_n]$ con $X_n = \{f_1(n), \cdots, f_k(n)\}$.

3. L'intervallo aperto $([f], [g]) = \{[x] \in {}^*\mathbb{R} : [f] < [x] < [g]\}$ è interno. Infatti $([f], [g]) = [A_n]$ con $A_n = (f(n), g(n))$. Il discorso è analogo per gli altri tipi di intervallo.

4. A, B interni $\ \Rightarrow A \cap B$ interno.

5. Se un sottoinsieme A dei Reali è interno allora ogni suo sottoinsieme è interno.

Dimostrazione. Sia $X \subseteq A$, ${}^*X$ interno e A interno $\Rightarrow A \cap {}^*X$ interno.
$A \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A \cap {}^*X = (A \cap {}^*X) \cap \mathbb{R} = A \cap ({}^*X \cap \mathbb{R}) = A \cap X = X$. Quindi X è interno. $\square$

6. Sono esterni gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, gli Ipernaturali illimitati, gli Iperreali limitati.

7. $[f_n]$ è iniettiva $\iff$ $\{f_n$ è iniettiva $\} \in \mathcal{F}$

Definizione 2.5.4. La *cardinalitá interna* di un insieme interno è definita da

$$|[A_n]|_{int} = [\{|A_n|\}_{n\in\mathbb{N}}]$$

Definizione 2.5.5. Un insieme interno si dice *iperfinito* se

$$[[A_n \text{ è finito }]] \in \mathcal{F}$$

Proposizione 2.5.6. *Un insieme interno A è iperfinito con cardinalità interna N se e solo se esiste una biiezione interna $f : \{1, \cdots, N\} \longrightarrow A$.*

Dimostrazione. Dimostro $\Rightarrow$
Sia $A = [A_n]$, $|A|_{int} = h = [h_n]$ e supponiamo $|A_n| = h_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists f_n : \{1, \ldots, h_n\} \longrightarrow A_n$ biiettiva. Sia $f = [f_n]$, allora $f\colon [1, h] \longrightarrow A$ è una funzione interna, è iniettiva per l'osservazione 2.5.3 (7) ed è surgettiva poichè $Imm(f) = [f_n(\{1, \ldots, h_n\})] = [A_n] = A$.

Dimostro $\Leftarrow$
Sia $[f_n] = f\colon [1, h] \longrightarrow A$ biiezione interna. Allora

$$[dom(f_n)] = dom([f_n]) = dom(f) = [1, h] = [\{1, \ldots, h_n\}]$$

Per cui $[[dom(f_n) = \{1, \ldots, h_n\}]] \in \mathcal{F}$, dunque $A = [f_n(\{1, \ldots, h_n\})]$. Definendo $A_n = f_n(\{1, \ldots, h_n\})$ ho che $A = [A_n]$ è interno. Per l'Osservazione 2.5.3 (7) ho $[[f_n$ è iniettiva $]] \in \mathcal{F}$ quindi $|A|_{int} = [\{|A_n|\}] = [\{h_n\}] = h$. $\square$

Definizione 2.5.7. Definisco *insieme degli ipernaturali infiniti* l'insieme

$${}^*\mathbb{N}_\infty = \{h \in {}^*\mathbb{N} : h > n \;\; \forall n \in \mathbb{N}\}] = {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$$

Proposizione 2.5.8. *Ogni insieme interno è finito oppure non numerabile.*

Dimostrazione. Sia $|A|_{int} = h \in {}^*\mathbb{N}$.

Caso $h \in \mathbb{N}$
Per la Proposizione 2.5.6 abbiamo $|A| = |\{1, \ldots, h\}| = h$. Quindi $|A|$ è finita.

Caso $h \in {}^*\mathbb{N}_\infty$
Sia

$$\Gamma = \left\{ \frac{i}{h} : i = 0, \ldots, h \right\} \subseteq {}^*[0,1]$$

Sia $r \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$, allora $\exists i_r \in \{1, \ldots, h\} : \dfrac{i_r - 1}{h} < r \leq \dfrac{i_r}{h}$.
Definisco

$$\begin{aligned} \phi \colon (0,1] &\longrightarrow \{1, \ldots, h\} \\ r &\longmapsto i_r \end{aligned}$$

Siano $r_1, r_2 \in \mathbb{R} : \phi(r_1) = \phi(r_2)$, allora $[|C_{r_2} - C_{r_1}|] \leq \dfrac{1}{h}$ quindi $|r_2 - r_1| = 0$ in quanto $\frac{1}{h}$ è infinitesimo. Quindi ϕ è iniettiva dunque $|\{1, \ldots, h\}| \geq \mathfrak{C}$. Usando la Proposizione 2.5.6 quindi $|A| = |\{1, \ldots, h\}| \geq \mathfrak{C}$.

□

Caratterizziamo ora i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono insiemi interni.

Proposizione 2.5.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora A è interno $\iff$ A è finito*

Dimostrazione. A finito $\Rightarrow$ A interno segue direttamente dall'Osservazione 2.5.3 (2).
Viceversa se esistesse A interno di cardinalità infinita allora potrei trovare un suo sottoinsieme di cardinalità numerabile che, per l'Osservazione 2.5.3 (5), sarebbe interno, il che contraddice la Proposizione 2.5.8. □

Nota. Di seguito indicheremo la cardinalità interna di un insieme interno A semplicemente con $|A|$.

Introduciamo ora un principio molto usato nelle dimostrazioni basato sul fatto che $\mathbb{N}$ non è un insieme interno.

Overspill. *Se un insieme interno Λ contiene tutti in numeri finiti, cioè $\mathbb{N} \subseteq \Lambda$, allora $\exists \nu$ infinito tale che $[1, \nu] \subseteq \Lambda$.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $[1, \nu] \not\subseteq \Lambda$ $\forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Allora definisco

$$A = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : [1, \nu] \subseteq \Lambda\}$$

A è un insieme interno poichè è definito da una formula contenente solo parametri interni. Dal fatto che $A = \mathbb{N}$ otteniamo quindi un assurdo. □

Capitolo 3

Teorema di immersione di Jin

Per misurare la densità di un insieme finito A di numeri naturali possiamo utilizzare il rapporto $\dfrac{|A|}{b-a+1}$ dove $b = max\{A\}$ e $a = min\{A\}$. Quando A è infinito tuttavia la cardinalità non è più utile per determinare la grandezza di un insieme. Dobbiamo quindi dare una diversa definizione di densità. Esistono diverse definizioni di densità per insiemi infiniti di interi e l'uso dell'analisi nonstandard ci permette, tramite il teorema di immersione di Jin, di trasformare i teoremi validi usando una certa densità in teoremi relativi ad un'altra densità .

3.1 Densità su $\mathbb{N}$

Siano $a,\ b \in \mathbb{N}$, $a < b$ ed $A \subseteq \mathbb{N}$.
Denotiamo con $[a, b]$ l'intervallo chiuso di estremi a, b.
Definiamo $A(a, b) = |A \cap [a, b]|$ e $A(b) = A(1, b)$.

Definizione 3.1.1. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, allora

- la densità di Shnirel'man di A è $\sigma(A) = \inf\limits_{n \geq 1} \dfrac{A(n)}{n}$

- la densità asintotica inferiore di A è $\underline{d}(A) = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n}$

- la densità asintotica superiore A è $\overline{d}(A) = \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{A(n)}{n}$

- la densità di Banach di A è $BD(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{A(k, k+n-1)}{n}$

Si può verificare che il limite nella definizione della densità di Banach esiste, ed inoltre vale

$$BD(A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \max_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n} \right\}$$

Quando $\underline{d}(A) = \overline{d}(A) = \alpha$ diciamo che A ha *densità* α e scriviamo $d(A) = \alpha$.
Si osserva subito che $0 \leq \sigma(A) \leq \underline{d}(A) \leq \overline{d}(A) \leq BD(A) \leq 1$.

Definizione 3.1.2. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Allora definisco
$A + B = \{a + b : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$
$hA = \underbrace{A + A + \cdots + A}_{\text{h volte}}$

Proposizione 3.1.3. $\forall A \subseteq \mathbb{N} \quad \exists\{[a_n, b_n]\}$ *successione di intervalli di numeri naturali tali che*

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_n, b_n)}{b_n - a_n + 1} \ \ e \ \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \infty$$

Dimostrazione.

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n)}{n+1}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $a_n \in \mathbb{N}$ tale che.

$$\max_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n} = \frac{A(a_n, a_n+n-1)}{n}$$

Definendo $b_n = a_n + n - 1$ allora ho

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_n, b_n)}{b_n - a_n + 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \infty$$

□

3.2 Densità su ${}^*\mathbb{N}$

In tutto il seguito ${}^*\mathbb{N}$ sarà un insieme di numeri ipernaturali costruito mediante un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ come visto nel Capitolo 2.
Estendiamo alcune definizioni di densità date in 3.1.1 a sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{N}$.

Definizione 3.2.1. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $[f] \in {}^*\mathbb{N}$

- la densità di Shnirel'man di $^*A$ in $[f]$ è

$$\sigma_{[f]}(^*A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{^*A([f]+1,[f]+n)}{n}$$

- la densità asintotica inferiore di $^*A$ in $[f]$ è

$$\underline{d}_{[f]}(^*A) = \liminf_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\to\infty}} \frac{^*A([f]+1,[f]+n)}{n}$$

- la densità asintotica superiore di $^*A$ in $[f]$ è

$$\overline{d}_{[f]}(^*A) = \limsup_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\to\infty}} \frac{^*A([f]+1,[f]+n)}{n}$$

È di immediata verifica la seguente proposizione.

Osservazione 3.2.2.

$$^*A([f]+1,[f]+i) = [\ A(f(n)+1, f(n)+i)\ ] \in \{0,\ldots,i\} \subseteq \mathbb{N}$$

Nota. Di seguito dati $A \subseteq \mathbb{N}$ e $[f] \in {}^*\mathbb{N}$ indicheremo con A_f l'insieme $(^*A - [f]) \cap \mathbb{N}$.

Proposizione 3.2.3. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $[f],[g] \in {}^*\mathbb{N}$, allora*

1. $\sigma_{[f]}(^*A) = \sigma(A_f)$
2. $\underline{d}_{[f]}(^*A) = \underline{d}(A_f)$
3. $\overline{d}_{[f]}(^*A) = \overline{d}(A_f)$
4. $\sigma_{[f]+[g]}(^*A + {}^*B) \geq \sigma(A_f + B_g)$
5. $\underline{d}_{[f]+[g]}(^*A + {}^*B) \geq \underline{d}(A_f + B_g)$
6. $\overline{d}_{[f]+[g]}(^*A + {}^*B) \geq \overline{d}(A_f + B_g)$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\sigma_{[f]}({}^*A) &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{{}^*A([f]+1,[f]+n)}{n} = \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\ {}^*A \cap [[f]+1,[f]+n]\ |}{n} = \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\ ({}^*A-[f]) \cap [1,n]\ |}{n} = \\
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|\ ({}^*A-[f]) \cap \mathbb{N} \cap [1,n]\ |}{n} = \\
&= \sigma(({}^*A-[f])\cap\mathbb{N}) = \sigma(A_f)
\end{aligned}$$

Analogamente per le altre uguaglianze.

$$\begin{aligned}
\sigma_{[f]+[g]}({}^*A+{}^*B) &= \sigma([{}^*A+{}^*B-([f]+[g])]\cap\mathbb{N}) = \\
&= \sigma(({}^*A-[f]+{}^*B-[g])\cap\mathbb{N}) \geq \\
&\geq \sigma([({}^*A-[f])\cap\mathbb{N}]+[({}^*B-[g])\cap\mathbb{N}]) \\
&= \sigma(A_f+B_g)
\end{aligned}$$

Analogamente per le altre disuguaglianze. □

3.3 Teorema di immersione di Jin

Presentiamo ora il teorema di immersione di Jin con il quale potremo trasformare un risultato riguardante la densità di Shnirel'man, la densità asintotica inferiore o la densità asintotica superiore in un risultato riguardante la densità di Banach.

Teorema di immersione di Jin. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:*

1. $BD(A) \geq \alpha$
2. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N}\ :\ \sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$
3. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N}\ :\ \underline{d}_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$
4. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N}\ :\ \overline{d}_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$

Dimostrazione. Dimostro (1) $\Rightarrow$ (2).
Per la Proposizione 3.1.3 possiamo prendere $[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \infty \text{ e } \lim_{n\to\infty} \frac{A(a_n, b_n)}{b_n - a_n + 1} = BD(A) \geq \alpha$$

Vogliamo trovare $\{[c_k, d_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = \infty \text{ e } \frac{A(c_k + 1, c_k + i)}{i} > \alpha - \frac{1}{k} \quad \forall i \in [1, d_k - c_k]$$

Siano $m, k \in \mathbb{N}$, definisco

$$l_{m.k} = \max\left\{ x \in \mathbb{N} : \exists c \in [a_m, b_m] : \forall i \in [1, x] \quad \frac{A(c+1, c+i)}{i} > \alpha - \frac{1}{k} \right\}$$

Fissati k ed m, $l_{m,k}$ rappresenta l'ampiezza massima di un intervallo $[c_k, d_k]$ con $c_k \in [a_m, b_m]$ e $\inf_{i\in[c_k,d_k]} \frac{A(c_k+1,c_k+i)}{i} > \alpha - \frac{1}{k}$.
Poichè voglio che $\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = \infty$ ho bisogno che $\forall k > \overline{K} \;\; \{l_{m,k}\}$ sia illimitata.

Lemma 3.3.1. *$\forall k \in \mathbb{N} \;\; \{l_{m,k}\}$ è illimitata.*

Dimostrazione. Per assurdo sia $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $l_{m,k_0} < L \;\; \forall m \in \mathbb{N}$.
Sia m grande abbastanza in modo da avere:

- $\dfrac{A(a_m, b_m)}{b_m - a_m + 1} > \alpha - \dfrac{1}{2k_0}$
- $\dfrac{L}{b_m - a_m + 1} < \dfrac{1}{2k_0}$

Definisco una sequenza $\{d_0, \cdots, d_t\}$ tale che:

1. $a_m - 1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_t \leq b_m$
2. $\dfrac{A(d_i + 1, d_{i+1})}{d_{i+1} - d_i} \leq \alpha - \dfrac{1}{k_0}$
3. $b_m - d_t \leq L$

Visto che

$$l_{m,k_0} = \max\left\{ x \in \mathbb{N} : \exists c \in [a_m, b_m] : \forall i \in [1, x] \quad \frac{A(c+1, c+i)}{i} > \alpha - \frac{1}{k_0} \right\} < L$$

allora prendendo $x > L$ ho che

$$\forall c \in [a_m, b_m] \;\; \exists i \in [1, x] : \frac{A(c+1, c+i)}{i} \leq \alpha - \frac{1}{k_0}$$

Definisco la sequenza $d_0 < d_1 < \cdots < d_t$ come segue

Caso base:
$d_0 = a_m - 1$
Visto che $a_m \in [a_m, b_m]$ e $b_m - a_m + 1 > 2k_0L > L \implies$
$\exists i_0 \in [1, b_m - a_m]$ tale che $\dfrac{A(a_m+1, a_m+i_0)}{i_0} \leq \alpha - \dfrac{1}{k_0}$
Definisco quindi $d_1 = a_m + i_0$. Chiaramente $d_0 < d_1 \leq b_m$.

Caso induttivo: $d_i \in [a_m, b_m]$
Se $b_m - d_i < L$ allora ho terminato la sequenza.
Se $b_m - d_i \geq L$ allora

$$d_i \in [a_m, b_m] \text{ e } b_m - d_i \geq L \Rightarrow \exists s \in [1, b_m - d_i] \text{ tale che } \frac{A(d_i+1, a_i+s)}{s} \leq \alpha - \frac{1}{k_0}$$

Sia $\bar{s}$ il massimo di tali s.
Definisco quindi $d_{i+1} = d_i + \bar{s}$. Si ha che $d_i < d_{i+i} \leq b_m$.

Per come è stata definita la sequenza $d_0 < d_1 < \cdots < d_t$, abbiamo quindi che

$$\begin{aligned}
\frac{A(a_m, b_m)}{b_m - a_m + 1} &= \frac{\sum_{i=0}^{t-1} A(d_i+1, d_{i+1}) + A(d_t+1, b_m)}{b_m - a_m + 1} \leq \\
&\leq \frac{1}{b_m - a_m + 1} \cdot \left[\left(\alpha - \frac{1}{k_0} \right) \sum_{i=0}^{t-1} (d_{i+1} - d_i) + L \right] = \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{k_0} \right) \cdot \frac{\sum_{i=0}^{t-1} (d_{i+1} - d_i)}{b_m - a_m + 1} + \frac{L}{b_m - a_m + 1} = \\
&= \left(\alpha - \frac{1}{k_0} \right) \cdot \frac{d_t - d_0}{b_m - a_m + 1} + \frac{L}{b_m - a_m + 1} \leq \\
&\leq \left(\alpha - \frac{1}{k_0} \right) + \frac{1}{2k_0} = \alpha - \frac{1}{2k_0}
\end{aligned}$$

il che è assurdo per la definizione di m. □

Quindi per il lemma $\forall k \in \mathbb{N}$ posso scegliere m_k tale che $l_k = l_{m_k,k} > k$.
Prendo ora $c_k \in [a_{m_k}, b_{m_k}]$ tale che $\dfrac{A(c_k+1, c_k+i)}{i} > \alpha - \dfrac{1}{k}$ per ogni $i \in [1, l_k]$
Definisco $f(k) = c_k$ e voglio dimostrare che $\sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$.

$$A(f(k)+1, f(k)+i) \in \{0, 1, \cdots, i\} \Rightarrow \frac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} \in \left\{ 0, \frac{1}{i}, \frac{2}{i} \cdots, 1 \right\}$$

Fisso $i \in \mathbb{N}$, se $i < l_k$ allora $\dfrac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} > \alpha - \dfrac{1}{k}$.

Posso quindi prendere $\tilde{k}$ sufficientemente grande tale che

1. $i < l_{\tilde{k}}$
2. $\left\{0, \frac{1}{i}, \frac{2}{i} \cdots, 1\right\} \cap \left[\alpha - \frac{1}{\tilde{k}}, \alpha\right) = \emptyset$

Per la seconda condizione ho che, se $k \geq \tilde{k}$, allora

$$\frac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} > \alpha - \frac{1}{k} \iff \frac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} \geq \alpha$$

Quindi

$$\forall k > \tilde{k} \quad \frac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} \geq \alpha$$
$$\Rightarrow \left[\left[\frac{A(f(k)+1, f(k)+i)}{i} \geq \alpha\right]\right] \in \mathcal{F}$$

Otteniamo dunque

$$\frac{{}^*A([f]+1, [f]+i)}{i} \geq \alpha$$

Poichè posso ripetere tale procedimento per ogni $i \in \mathbb{N}$ in quanto $l_{m,k}$ è illimitata, allora

$$\frac{{}^*A([f]+1, [f]+i)}{i} \geq \alpha \quad \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow \sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$$

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) è immediata poichè

$$\alpha \leq \sigma_{[f]}({}^*A) \leq \underline{d}_{[f]}({}^*A) \leq \overline{d}_{[f]}({}^*A)$$

Dimostro (4) $\Rightarrow$ (1) Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato.

$$\overline{d}_{[f]}({}^*A) \geq \alpha \Rightarrow \exists m_k \in \mathbb{N} : m_k > k \text{ e } \frac{{}^*A([f]+1, [f]+m_k)}{m_k} > \alpha - \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow S_k = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{A(f(n)+1, f(n)+m_k)}{m_k} > \alpha - \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F} \Rightarrow S_k \neq \emptyset$$

Sia $n \in S_k$, definisco $a_k = f(n)+1$ e $b_k = f(n)+m_k$. Allora

$$\frac{A(a_k, b_k)}{b_k - a_k + 1} > \alpha - \frac{1}{k} \ \wedge \ b_k - a_k + 1 = m_k > k$$

Quindi ho che $\forall k \in \mathbb{N} \ \ \exists [a_k, b_k]$ tale che $\frac{A(a_k,b_k)}{b_k-a_k+1} > \alpha - \frac{1}{k}$. Allora

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{A(a_k, b_k)}{b_k - a_k + 1} \geq \alpha$$

$\square$

Corollario 3.3.2. *Sia $BD(A) = \alpha$. Allora*

1. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \sigma_{[f]}({}^*A) = \alpha$
2. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \underline{d}_{[f]}({}^*A) = \alpha$
3. $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \overline{d}_{[f]}({}^*A) = \alpha$

Dimostrazione. Per il teorema di immersione di Jin $BD(A) \geq \alpha \Rightarrow \exists [f] \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$. Se $\sigma_{[f]}({}^*A) = \beta > \alpha$ allora avrei $BD(A) \geq \beta > \alpha$ il che è assurdo. Quindi $\sigma_{[f]}({}^*A) = \alpha$. Per le altre densità il discorso è analogo. $\square$

Capitolo 4

Applicazioni

Utilizzando il teorema di immersione di Jin trasferiremo i risultati dei teoremi di Kneser e Plünnecke alla densità di Banach e dimostreremo alcuni risultati riguardanti il concetto di immersione finita.

4.1 Teorema di Kneser

Enunciamo ora alcuni risultati riguardanti la densità e la struttura dell'insieme $A + B$ per le cui dimostrazioni rimandiamo a [2] e [10].

Teorema di Shnirel'man. *Dati $A, B \subseteq \mathbb{N}$, se $0 \in A$ e $1 \in B$ allora*

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B)$$

Osservazione 4.1.1. Questo teorema non vale se sostituisco σ con $\underline{d}$.
Sia $k, g \in \mathbb{N} : 2k^2 < g$ e $A = [0, k-1] + \{gn : n \in \mathbb{N}\}$, allora $\underline{d}(A) = d(A) = k/g < 1$. Se valesse il teorema di Shnirel'man con $\underline{d}$ al posto di σ allora avrei

$$\underline{d}(2A) \geq 2\underline{d}(A) - \underline{d}(A)^2.$$

Tuttavia $\underline{d}(A) = k/g$ mentre

$$\underline{d}(2A) = \underline{d}(A + A) = \frac{2k - 1}{g} = 2\frac{k}{g} - \frac{1}{g} < 2\underline{d}(A) - \left(\frac{k}{g}\right)^2 = 2\underline{d}(A) - \underline{d}(A)^2$$

Quindi $\underline{d}(2A) < 2\underline{d}(A) - \underline{d}(A)^2$, il che è assurdo.

Il teorema di Kneser fornisce un risultato analogo a quello del teorema di Shnirel'man relativo alla densità asintotica inferiore. Infatti se la densità asintotica inferiore di $A+B$ è "piccola" rispetto alle densità di A e B abbiamo che $A+B$ é, a meno di un numero finito di punti, una unione di progressioni aritmetiche di stessa differenza. Per una dimostrazione del teorema rimandiamo a [2] e [9].

Teorema di Kneser. *Siano* $A, B \subseteq \mathbb{N}$ *tali che* $\underline{d}(A+B) < \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$.
Allora $\exists d \in \mathbb{N}$, $d > 0$ *e* $G \subseteq [0, d-1]$ *tali che*

1. $\underline{d}(A+B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B) - \frac{1}{d}$
2. $A + B \subseteq G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}$
3. $(G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}) \setminus (A+B)$ *è finito*

Trasferiamo ora questo risultato alla densità di Banach usando il teorema di immersione di Jin.

Teorema 4.1.2. *Siano* $A, B \subseteq \mathbb{N}$.
Se $BD(A+B) < BD(A) + BD(B)$ *allora*
$\exists d \in \mathbb{N}\ :\ d > 0$, $\exists G \subseteq [0, d-1]$ $\exists \{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ *tali che*

1. $BD(A+B) \geq BD(A) + BD(B) - \frac{1}{d}$
2. $(A+B) \cap [a_k, b_k] \supseteq (a_k + G + \{dn\}_{n \in \mathbb{N}}) \cap [a_k, b_k]$
3. $\lim_{k \to \infty} b_k - a_k = \infty$

Dimostrazione. Per il teorema di immersione di Jin

$$BD(A) = \alpha \Rightarrow \exists [f] \text{ tale che } \underline{d}_{[f]}({}^*A) = \alpha$$
$$BD(B) = \beta \Rightarrow \exists [g] \text{ tale che } \underline{d}_{[g]}({}^*B) = \beta$$

Abbiamo quindi $\underline{d}_{[f]+[g]}({}^*A + {}^*B) \leq BD(A+B) < \alpha + \beta$.

Se $A_f = ({}^*A - [f]) \cap \mathbb{N}$ e $B_g = ({}^*B - [g]) \cap \mathbb{N}$ allora per la Proposizione 3.2.3 ho che

$$\underline{d}(A_f + B_g) \leq \underline{d}_{[f]+[g]}({}^*A + {}^*B) < \alpha + \beta = \underline{d}(A_f) + \underline{d}(B_g)$$

Per il teorema di Kneser quindi $\exists d \in \mathbb{N}\ :\ d > 0$ ed $\exists G \subseteq [0, d-1]$:

1. $\underline{d}(A_f + B_g) \geq \underline{d}(A_f) + \underline{d}(B_g) - \frac{1}{d}$
2. $A_f + B_g \subseteq G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}$

3. $(G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}) \setminus (A_f + B_g)$ è finito

Da (1) ricavo che

$$\underline{d}_{[f]+[g]}({}^*A + {}^*B) \geq \underline{d}(A_f + B_g) \geq \underline{d}(A_f) + \underline{d}(B_g) - \frac{1}{d} = \underline{d}_{[f]}({}^*A) + \underline{d}_{[g]}({}^*B) - \frac{1}{d}$$

quindi, applicando il teorema di immersione di Jin

$$BD(A + B) \geq BD(A) + BD(B) - \frac{1}{d}$$

Cerco ora gli intervalli $[a_k, b_k]$ in cui posso determinare la struttura di $A + B$.

Per un qualsiasi $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} ({}^*A + {}^*B) \cap (\mathbb{N} + [f] + [g]) &\supseteq ({}^*A \cap ([f] + \mathbb{N})) + ({}^*B \cap ([g] + \mathbb{N})) \supseteq \\ &\supseteq (({}^*A \cap ([f] + \mathbb{N})) + ({}^*B \cap ([g] + \mathbb{N}))) \cap ([f] + [g] + m + \mathbb{N}) = C_m \end{aligned}$$

Poichè

$$\begin{aligned} ({}^*A \cap ([f] + \mathbb{N})) &= ({}^*A - [f] \cap \mathbb{N}) + [f] = A_f + [f] \\ ({}^*B \cap ([g] + \mathbb{N})) &= ({}^*B - [g] \cap \mathbb{N}) + [g] = B_g + [g] \end{aligned}$$

allora per $m \in \{dn\}$ sufficientemente grande

$$\begin{aligned} C_m &= (A_f + B_g + [f] + [g]) \cap ([f] + [g] + m + \mathbb{N}) = \\ &= (G + \{dn\} + [f] + [g]) \cap ([f] + [g] + m + \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Intersecando entrambi i membri con l'intervallo $\big[\ [f]+[g]+m, [f]+[g]+m+k\ \big]$ con $k \in \mathbb{N}$ ho che

$$\begin{aligned} &({}^*A + {}^*B) \cap \big[\ [f] + [g] + m, [f] + [g] + m + k\ \big] \supseteq \\ &\supseteq C_m \cap \big[\ [f] + [g] + m, [f] + [g] + m + k\ \big] = \\ &= (G + \{dn\} + [f] + [g]) \cap \big[\ [f] + [g] + m, [f] + [g] + m + k\ \big] \end{aligned}$$

In particolare $\exists n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &(A + B) \cap \big[\ f(n) + g(n) + m, f(n) + g(n) + m + k\ \big] \supseteq \\ &\supseteq (G + \{dn\} + f(n) + g(n)) \cap \big[\ f(n) + g(n) + m, f(n) + g(n) + m + k\ \big] \end{aligned}$$

Definendo $a_k = f(n) + g(n) + m$ e $b_k = f(n) + g(n) + m + k$ e ricordando che $m \in \{dn\}$ abbiamo che

$$(A+B) \cap [a_k, b_k] \supseteq (G + \{dn\} + a_k - m) \cap [a_k, b_k] \supseteq (G + \{dn\} + a_k) \cap [a_k, b_k]$$

e

$$\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = \infty$$

□

Osserviamo subito che, mentre il teorema di Kneser affermava che $A + B$ era contenuto in una unione di progressioni aritmetiche $G + \{dn\}$, ora invece abbiamo che $A + B$ contiene $G + \{dn\}$ se ci restringiamo agli intervalli $[a_k, b_k]$. Possiamo tuttavia migliorare questo risultato per ottenere il seguente teorema, la cui dimostrazione è omessa (cf.[6]).

Teorema 4.1.3. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tali che $BD(A) = \alpha$ e $BD(B) = \beta$ e $BD(A+B) \leq \alpha + \beta$. Allora esistono $g \in \mathbb{N}$ e $G \subseteq [0, g-1]$ tali che*

1. $BD(A+B) \geq \alpha + \beta - \frac{1}{g}$
2. $A + B \subseteq G + \{gn\}$
3. *se $\{[a_n^{(i)}, b_n^{(i)}]\}_{n\in\mathbb{N}}$ per $i = 1, 2$ sono due sequenze di intervalli tali che*

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \left(b_n^{(i)} - a_n^{(i)}\right) = \infty$$

   (b)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{A(a_n^{(1)}, b_n^{(1)})}{b_n^{(1)} - a_n^{(1)} + 1} = \alpha \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty} \frac{B(a_n^{(2)}, b_n^{(2)})}{b_n^{(2)} - a_n^{(2)} + 1} = \beta$$

   (c)
   $$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n^{(1)} - a_n^{(1)}}{b_n^{(2)} - a_n^{(2)}} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n^{(1)} - a_n^{(1)}}{b_n^{(2)} - a_n^{(2)}} < \infty$$

   allora esistono $[c_n^{(i)}, d_n^{(i)}] \subseteq [a_n^{(i)}, b_n^{(i)}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i = 1, 2$ tali che

   (a)
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{d_n^{(i)} - c_n^{(i)}}{b_n^{(i)} - a_n^{(i)}} = 1$$

   (b)
   $$(A+B) \cap [c_n^{(1)} + c_n^{(2)}, d_n^{(1)} + d_n^{(2)}] = (G + g\mathbb{N}) \cap [c_n^{(1)} + c_n^{(2)}, d_n^{(1)} + d_n^{(2)}]$$

4.2 Teorema di Plünnecke

Il teorema di Plünnecke è utilizzato per trovare dei particolari insiemi di numeri naturali detti "componenti essenziali".

Definizione 4.2.1. Un insieme $B \subseteq \mathbb{N}$ è detto *componente essenziale* se

$$\sigma(A+B) > \sigma(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{N} : 0 < \sigma(A) < 1$$

Enunciamo alcuni teoremi utili per trovare delle componenti essenziali (cf.[2]).

Osservazione 4.2.2. Per il teorema di Shnirel'man se $0 \in B$ e $\sigma(B) > 0$ allora B è una componente essenziale. Infatti $\sigma(A) > 0 \Rightarrow 1 \in A$, vale quindi

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A) + \sigma(B) - \sigma(A)\sigma(B) > \sigma(A)$$

poichè $\sigma(A) < 1 \Rightarrow \sigma(B) > \sigma(A)\sigma(B)$.

L'osservazione 4.2.2 non comprende tutte le componenti essenziali, esistono infatti degli insiemi con densità di Shnirel'man nulla che sono componenti essenziali. I teoremi seguenti prendono in esame la densità di $A+B$ quando B è una "base".

Definizione 4.2.3. Un insieme $B \subseteq \mathbb{N}$ si dice *base di ordine* h se $hB = \mathbb{N}$.

Osservazioni 4.2.4.

1. B base di ordine $h \iff \sigma(hB) = 1$

2. Esistono basi con densità di Shnirel'man nulla, ad esempio $B = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ è una base di ordine 4 ma $\sigma(B) = 0$.

Teorema di Erdös. *Sia B una base di ordine h, allora*

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A) + \frac{1}{2h}\,\sigma(A)(1-\sigma(A))$$

Questo risultato si può migliorare sostituendo ad h, l'ordine medio h^*, definito qui di seguito.

Definizione 4.2.5. Sia $B \subseteq \mathbb{N}$, definisco $h_B(m) = \min\{h \in \mathbb{N} : m \in hB\} \cup \{0\}$.

Definizione 4.2.6. L'*ordine medio* h^* di una base B è dato da

$$h^* = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} h_B(m)$$

Si osserva facilmente che $h^* \leq h \leq 2h^*$.

Teorema 4.2.7. *Sia B una base di ordine medio h^*, allora*

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A) + \frac{1}{2h^*}\,\sigma(A)(1-\sigma(A))$$

Questo risultato ha un analogo per quanto riguarda la densità asintotica inferiore.

Definizione 4.2.8. Un insieme $B \subseteq \mathbb{N}$ è detto *base asintotica di ordine h* se

$$\exists M \in \mathbb{N} \;:\; hB \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n > M\}$$

Definizione 4.2.9. L'*ordine medio asintotico* h^* di una base asintotica B è dato da

$$h^* = \limsup_{n\to\infty}\; \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} h_B(m)$$

Teorema di Rohrbach. *Sia B una base asintotica di ordine medio asintotico h^*, allora*

$$\underline{d}(A+B) \geq \underline{d}(A) + \frac{1}{2h^*}\,\underline{d}(A)(1-\underline{d}(A))$$

Un miglioramento notevole del risultato di Erdös è il teorema di Plünnecke.

Teorema di Plünnecke. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B una base di ordine h. Allora vale*

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

Osservazione 4.2.10. Nel teorema di Plünnecke non possiamo sostituire l'ordine della base con l'ordine medio asintotico per ottenere un analogo che valga per $\underline{d}$. Infatti se $A = \{1+3n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{i+3n : i = 0,1 \;\; n \in \mathbb{N}\}$ allora $A+B = \{i+3n : i = 1,2 \;\; n \in \mathbb{N}\}$, $\sigma(A) = \sigma(B) = \frac{1}{3}$, $\sigma(A+B) = \underline{d}(A+B) = \frac{2}{3}$. B è una base di ordine $h = 2$ e ordine medio asintotico $h^* = \frac{4}{3}$ quindi

$$\underline{d}(A)^{1-\frac{1}{h^*}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} > \frac{2}{3} = \underline{d}(A+B)$$

Utilizziamo ora il teorema di immersione di Jin per dimostrare un teorema analogo al teorema di Plünnecke per la densità di Banach.

Definizione 4.2.11. Sia $B \subseteq \mathbb{N}$, B si dice *base a tratti di ordine h* se

$$\exists\{c_k\} \;\; c_k > 0 : h \cdot (B \cap [c_k, c_k+k]) \supseteq [hc_k, hc_k+k]$$

Teorema 4.2.12. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B base a tratti di ordine h. Allora vale*

$$BD(A+B) \geq BD(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

Dimostrazione. B base a tratti $\Rightarrow \exists\{c_k\}$ $c_k > 0$ tale che $h \cdot (B \cap [c_k, c_k + k]) \supseteq [hc_k, hc_k + k]$.
Sia $g(k) = c_k$ e $id(k) = k$, allora

$$h \cdot \big(\, {}^*B \cap \big[[g], [g] + [id]\big] \,\big) \supseteq \big[h[g], h[g] + [id]\big]$$

$$h \cdot \big(\, {}^*B \cap \big[[g], [g] + [id]\big] \,\big) - h[g] \supseteq \big[0, [id]\big]$$

$$h \cdot \big(\, ({}^*B \cap \big[[g], [g] + [id]\big]) - [g] \,\big) \supseteq [0, [id]]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{N} = \big[0, [id]\big] \cap \mathbb{N} \subseteq h \cdot \big(\, \big({}^*B \cap \big[[g], [g] + [id]\big]\big) - [g] \,\big) \cap \mathbb{N} = \\ = h \cdot \Big(\big(\, \big({}^*B \cap \big[[g], [g] + [id]\big]\big) - [g]\big) \cap \mathbb{N} \,\Big) = \\ = h \cdot \big(\, ({}^*B \cap ([g] + \mathbb{N})) - [g] \,\big) = h \cdot B_g\end{aligned}$$

Quindi B_g è una base di ordine h.

Sia $BD(A) = \alpha$, allora, per il teorema di immersione di Jin, esiste $[f]$ tale che $\sigma_{[f]}({}^*A) = \alpha$.

Per la Proposizione 3.2.3 inoltre

$$\sigma_{[f]+[g]}({}^*A + {}^*B) \geq \sigma(A_f + B_g)$$

Applicando il teorema di Plünnecke quindi

$$\begin{aligned}BD(A+B) = \sigma_{[f]+[g]}({}^*A + {}^*B) \geq \\ \geq \sigma(A_f + B_g) \geq \sigma(A_f)^{1-\frac{1}{h}} = \\ = \sigma_{[f]}({}^*A)^{1-\frac{1}{h}} = BD(A)^{1-\frac{1}{h}}\end{aligned}$$

□

4.3 Immersione Finita

Daremo ora la definizione di immersione finita di insiemi di numeri naturali (cf.[8]), mostreremo una sua caratterizzazione e dimostreremo un teorema equivalente al teorema di immersione di Jin, espresso in termini elementari senza l'uso di ultrapotenze.

Definizione 4.3.1. Dati A, B insiemi di numeri naturali dico che B si *immerge finitamente* in A se

$$\forall \{b_1, \dots, b_n\} \in B \ \ \exists x \in \mathbb{N} \ : \ x + b_i \in A \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ed in tal caso scrivo $B \leq A$.

Il seguente teorema è una caratterizzazione nonstandard dell'immersione finita.

Teorema 4.3.2. *Siano A e B insiemi di numeri naturali. Allora*

$$B \leq A \iff \exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ [f] + B \subseteq {}^*A$$

Dimostrazione. Sia $B = \{b_1, b_2, \dots\}$.
Dimostro $\Rightarrow$
Se $B \leq A$ allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \in \mathbb{N}$ tale che $k_n + b_1, \dots, k_n + b_n \in A$. Imponendo $f(n) = k_n$ ho quindi che $f(n) + b_i \in A$ per ogni $n \geq i$. Di conseguenza $\{n \in \mathbb{N} : f(n) + b_i \in A\} \in \mathcal{F}$ in quanto complementare di un insieme finito. Da ciò ho che $[f] + b_i \in {}^*A$ per ogni $b_i \in B$ quindi $[f] + B \subseteq {}^*A$.
Dimostro $\Leftarrow$
Per ipotesi esiste $[f] \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $[f] + B \subseteq {}^*A$ quindi $\{n \in \mathbb{N} : f(n) + b_i \in A\} \in \mathcal{F}$ per ogni $b_i \in B$. Sia $J = \{j_1, \dots, j_h\}$ un insieme finito di indici, allora

$$C_J = \bigcap_{j \in J} \{n \in \mathbb{N} : f(n) + b_j\} \in \mathcal{F}$$

ed in particolare C_J è non vuoto. Prendendo $k_J \in C_J$ quindi ho che
$k_J + b_{j_1}, \dots, k_J + b_{j_h} \in A$ e dunque $B \leq A$. □

Teorema 4.3.3. *Sia A insieme di numeri naturali tale che $BD(A) = \alpha$. Allora esiste $B \subseteq \mathbb{N}$ tale che $B \leq A$ e $\sigma(B) \geq \alpha$.*

Dimostrazione. Usando il teorema di immersione di Jin abbiamo che

$$BD(A) = \alpha \Rightarrow \exists [f] \in {}^*\mathbb{N} : \sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$$

$$\sigma_{[f]}({}^*A) = \sigma(A_f) = \sigma(({}^*A - [f]) \cap \mathbb{N})$$

Sia $B = A_f$. Allora abbiamo $\sigma(B) \geq \alpha$ e

$$B + [f] = A_f + [f] \subseteq ({}^*A - [f]) + [f] = {}^*A$$

Quindi abbiamo, applicando il teorema precedente, $B \leq A$. $\square$

Questo teorema è equivalente al teorema di immersione di Jin, vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 4.3.4.

$$\exists B \leq A \textit{ tale che } \sigma(B) \geq \alpha \iff \exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \textit{ tale che } \sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$$

Dimostrazione. Dimostro $\Rightarrow$
Se $\exists B \leq A$ tale che $\sigma(B) \geq \alpha$ allora per il Teorema 4.3.2 $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $[f] + B \subseteq {}^*A$, quindi $B \subseteq ({}^*A - [f]) \cap \mathbb{N} = A_f$. Ho quindi $\sigma_{[f]}({}^*A) = \sigma(A_f) \geq \sigma(B) \geq \alpha$.
Dimostro $\Leftarrow$
Segue direttamente dalla dimostrazione del Teorema 4.3.3. $\square$

Osservazione 4.3.5. Possiamo dimostrare il Teorema 4.3.2 all'interno dell'analisi nonstandard, senza ricorrere alla costruzione tramite ultrafiltro, sfruttando il Transfer Principle ed il principio di Overspill.

Teorema 4.3.6. *Siano A e B insiemi di numeri naturali. Allora*

$$B \leq A \iff \exists \zeta \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \zeta + B \subseteq {}^*A$$

Dimostrazione. Dimostro $\Leftarrow$
Siano $b_1, \ldots, b_n \in B$. Per ipotesi $\exists \zeta \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\zeta + b_i \in {}^*A$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Utilizzando il Transfer ottengo che $\exists \zeta \in \mathbb{N}$ tale che $\zeta + b_i \in A$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ Quindi $B \leq A$.
Dimostro $\Rightarrow$
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots\}$ mentre ${}^*B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots, b_\nu, b_{\nu+1}, \ldots\}$
Sia

$$\Lambda = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} : \exists \zeta \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \zeta + b_i \in {}^*A \ \ \forall i \in [1, \nu]\}$$

Per ipotesi $\mathbb{N} \subseteq \Lambda$ ma Λ è interno poichè è definito da una formula contenente solo parametri interni. Per Overspill quindi $\exists \bar{\nu}$ infinito tale che $\bar{\nu} \in \Lambda$. Dunque $\exists \zeta \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\zeta + b_i \in {}^*A$ per ogni $i \in [1, \bar{\nu}]$ ed in particolare per ogni $i \in \mathbb{N}$. Quindi $\zeta + B \subseteq {}^*A$. $\square$

Bibliografia

[1] Robert Goldblatt. *Lectures on the Hyperreals, An Introduction to Nonstandard Analysis*. Springer, 1998.

[2] H. Halberstam and K. F. Roth. *Sequences*. Oxford University Press, 1966.

[3] Renling Jin. Nonstandard methods for upper Banach density problems. *The Journal of Number Theory, 91*, 2001.

[4] Renling Jin. Standardizing nonstandard methods for upper Banach density problems. *DIMACS Series, Unusual Applications of Number Theory*, 2004.

[5] Renling Jin. Ultrapower of $\mathbb{N}$ and density problems. *Proceedings of Workshop UltraMath 2008-Applications of Ultrafilters and Ultraproducts in Mathematics*, 2008.

[6] Renling Jin. Characterizing the structure of A+B when A+B has small upper Banach density. *The Journal of Number Theory, Vol. 130, No. 8*, 2010.

[7] Renling Jin. Plunnecke's theorem for asymptotic densities. *The Transactions of American Mathematical Society, Vol. 363*, 2011.

[8] Mauro Di Nasso. Embeddability properties of difference sets. *Arxiv:1201.5865 [math:LO]*, 2012.

[9] M. B. Nathanson. *Additive Number Theory - Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*. Springer, 1996.

[10] M. B. Nathanson. *Additive Number Theory - The Classical Bases*. Springer, 1996.