Il Teorema di immersione di Jin

Francesco Di Baldassarre

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

15 Ottobre 2012

Introduzione

Dati A e B insiemi di numeri naturali definisco

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Introduzione

Dati A e B insiemi di numeri naturali definisco

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Molti studi in teoria dei numeri si occupano di risolvere problemi inversi, cioè di trovare informazioni sulla struttura degli insiemi A e B note alcune proprietà dell'insieme $A + B$.

Introduzione

Dati A e B insiemi di numeri naturali definisco

$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Molti studi in teoria dei numeri si occupano di risolvere problemi inversi, cioè di trovare informazioni sulla struttura degli insiemi A e B note alcune proprietà dell'insieme $A + B$.
La principale proprietà che considereremo sarà la "densità".

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

- densità di Shnirel'man

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

- densità di Shnirel'man
- densità asintotica inferiore

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

- densità di Shnirel'man
- densità asintotica inferiore
- densità asintotica superiore

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

- densità di Shnirel'man
- densità asintotica inferiore
- densità asintotica superiore
- densità di Banach

Esistono diverse definizioni di densità , quelle che noi utilizzeremo saranno:

- densità di Shnirel'man
- densità asintotica inferiore
- densità asintotica superiore
- densità di Banach

Tra queste la densità di Banach è quella che più si avvicina al concetto di probabilità in uno spazio di misura ma è anche la densità meno utilizzata dai teorici dei numeri.

Il teorema di immersione di Jin permette, tramite l'analisi nonstandard, di trasformare dei risultati riguardanti la densità di Shnirel'man o la densità asintotica inferiore in risultati riguardanti la densità di Banach

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali ${}^*\mathbb{R}$ sono:

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali $^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali ${}^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato
- contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali $^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato
- contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo
- contiene numeri infiniti e numeri infinitesimi non zero

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali ${}^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato
- contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo
- contiene numeri infiniti e numeri infinitesimi non zero
- mantiene alcune delle proprietà di $\mathbb{R}$

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali ${}^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato
- contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo
- contiene numeri infiniti e numeri infinitesimi non zero
- mantiene alcune delle proprietà di $\mathbb{R}$

Di seguito mostreremo una costruzione di ${}^*\mathbb{R}$ quozientando le funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite una relazione di equivalenza $\sim$ tale che $f \sim g$ se f e g coincidono su un insieme "grande".

Iperreali

Le principali caratteristiche di un insieme di numeri iperreali $^*\mathbb{R}$ sono:

- è dotato di una struttura di campo ordinato
- contiene $\mathbb{R}$ come sottocampo
- contiene numeri infiniti e numeri infinitesimi non zero
- mantiene alcune delle proprietà di $\mathbb{R}$

Di seguito mostreremo una costruzione di $^*\mathbb{R}$ quozientando le funzioni $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ tramite una relazione di equivalenza $\sim$ tale che $f \sim g$ se f e g coincidono su un insieme "grande".
Per formalizzare questa nozione di "grande" useremo un ultrafiltro.

Filtri ed Ultrafiltri

Filtro

Sia I un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(I) = \{A : A \subseteq I\}$ l'insieme delle parti di I. Un *filtro* su I è una classe non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tale che:

- $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \subseteq I \Longrightarrow B \in \mathcal{F}$

Un filtro si dice *proprio* se $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Filtri ed Ultrafiltri

Filtro

Sia I un insieme non vuoto e $\mathcal{P}(I) = \{A : A \subseteq I\}$ l'insieme delle parti di I. Un *filtro* su I è una classe non vuota $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ tale che:

- $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \wedge A \subseteq B \subseteq I \implies B \in \mathcal{F}$

Un filtro si dice *proprio* se $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Ultrafiltro

Un *ultrafiltro* è un filtro proprio $\mathcal{F}$ tale che:

$$\forall A \in \mathcal{P}(I) \ vale \ A \in \mathcal{F} \ \vee \ A^c \in \mathcal{F}$$

Costruzione degli Iperreali

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'insieme delle successioni reali.
Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$.

Costruzione degli Iperreali

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'insieme delle successioni reali.
Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$.
Definisco una relazione di equivalenza $\sim$ ponendo:

$$f \sim g \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$$

Costruzione degli Iperreali

Sia $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ l'insieme delle successioni reali.
Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$.
Definisco una relazione di equivalenza $\sim$ ponendo:

$$f \sim g \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{F}$$

Definisco l'insieme degli Iperreali

$$^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sim$$

Dato $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indico con [r] la sua classe di equivalenza in ${}^*\mathbb{R}$,

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s \sim r\}$$

Dato $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indico con [r] la sua classe di equivalenza in ${}^*\mathbb{R}$,

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s \sim r\}$$

Definisco una somma $+$ ed un prodotto $\cdot$ in ${}^*\mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{aligned} [f] + [g] &= [f \oplus g] \\ [f] \cdot [g] &= [f \odot g] \end{aligned}$$

Dato $r \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ indico con [r] la sua classe di equivalenza in ${}^*\mathbb{R}$,

$$[r] = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : s \sim r\}$$

Definisco una somma $+$ ed un prodotto $\cdot$ in ${}^*\mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{aligned}[f] + [g] =& [f \oplus g] \\ [f] \cdot [g] =& [f \odot g]\end{aligned}$$

Definisco un ordinamento su ${}^*\mathbb{R}$ ponendo

$$[f] < [g] \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)\} \in \mathcal{F}$$

Principali proprietà degli Iperreali

Teorema

La struttura $({}^*\mathbb{R}, +, *)$ è un campo ordinato con $[0]$ come elemento nullo e $[1]$ come unità.

Principali proprietà degli Iperreali

Teorema

La struttura $({}^*\mathbb{R}, +, *)$ è un campo ordinato con $[0]$ come elemento nullo e $[1]$ come unità.

Proposizione

Possiamo trattare $\mathbb{R}$ come un sottocampo di ${}^*\mathbb{R}$ identificando $r \in \mathbb{R}$ con la classe di equivalenza ${}^*r = [C_r]$ della funzione costante $C_r(n) = r$

Osservazione

Esiste un modo canonico di estendere insiemi, funzioni e relazioni su $\mathbb{R}$ a dei loro corrispettivi su ${}^*\mathbb{R}$.

Osservazione

Esiste un modo canonico di estendere insiemi, funzioni e relazioni su $\mathbb{R}$ a dei loro corrispettivi su ${}^*\mathbb{R}$.

Ad esempio

Iperestensione di un insieme

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, definisco *iper-estensione* o *estensione nonstandard* di A l'insieme

$$ {}^*A = \{[f] \in {}^*\mathbb{R} : \{n \in \mathbb{N} : f(n) \in A\} \in \mathcal{F}\} $$

Transfer Principle

Data una proposizione φ riguardante i numeri reali posso transformarla in una proposizione ${}^*\varphi$ riguardante i numeri iperreali e viceversa. Vale il seguente

Transfer Principle

Una $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$-proposizione definita φ è vera se e solo se ${}^*\varphi$ è vera.

Densità su $\mathbb{N}$

Definiamo $A(a, b) = |A \cap [a, b]|$ e $A(b) = A(1, b)$

Densità su $\mathbb{N}$

Definiamo $A(a, b) = |A \cap [a, b]|$ e $A(b) = A(1, b)$

Densità

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$, allora

- la densità di Shnirel'man di A è
$$\sigma(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n}$$
- la densità asintotica inferiore di A è
$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \to \infty} \frac{A(n)}{n}$$

Densità

- la densità asintotica superiore A è

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

- la densità di Banach di A è

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n}$$

Densità

- la densità asintotica superiore A è

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

- la densità di Banach di A è

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{A(k, k+n-1)}{n}$$

Vale $0 \le \sigma(A) \le \underline{d}(A) \le \overline{d}(A) \le BD(A) \le 1$.

Densità su $^*\mathbb{N}$

Densità

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $[f] \in {}^*\mathbb{N}$

- la densità di Shnirel'man di $^*A$ in $[f]$ è

$$\sigma_{[f]}(^*A) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{^*A([f]+1,[f]+n)}{n}$$

- la densità asintotica inferiore di $^*A$ in $[f]$ è

$$\underline{d}_{[f]}(^*A) = \liminf_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\to\infty}} \frac{^*A([f]+1,[f]+n)}{n}$$

Teorema di immersione di Jin

Teorema di immersione di Jin

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora sono equivalenti:

- $BD(A) \geq \alpha$
- $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \sigma_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$
- $\exists [f] \in {}^*\mathbb{N} \ : \ \underline{d}_{[f]}({}^*A) \geq \alpha$

Teorema di Kneser

Teorema di Kneser

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tali che $\underline{d}(A+B) < \underline{d}(A) + \underline{d}(B)$.
Allora $\exists d \in \mathbb{N}$, $d > 0$ e $G \subseteq [0, d-1]$ tali che

- $\underline{d}(A+B) \geq \underline{d}(A) + \underline{d}(B) - \frac{1}{d}$
- $A + B \subseteq G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}$
- $(G + \{dn : n \in \mathbb{N}\}) \setminus (A + B)$ è finito

Utilizzando il teorema di immersione di Jin possiamo dimostrare il seguente

Utilizzando il teorema di immersione di Jin possiamo dimostrare il seguente

Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tali che $BD(A+B) < BD(A) + BD(B)$.
Allora $\exists d \in \mathbb{N} \ : \ d > 0 \ , \ \exists G \subseteq [0, d-1] \ \exists \{[a_k, b_k]\}_{k \in \mathbb{N}}$ tali che

- $BD(A+B) \geq BD(A) + BD(B) - \frac{1}{d}$
- $(A+B) \cap [a_k, b_k] \supseteq (a_k + G + \{dn\}_{n \in \mathbb{N}}) \cap [a_k, b_k]$
- $\lim_{k \to \infty} b_k - a_k = \infty$

Possiamo migliorare questo risultato per ottenere il seguente teorema

Possiamo migliorare questo risultato per ottenere il seguente teorema

Teorema 2

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ tali che $BD(A) = \alpha$ e $BD(B) = \beta$ e $BD(A + B) < \alpha + \beta$. Allora esistono $g \in \mathbb{N}$ e $G \subseteq [0, g - 1]$ tali che

- $BD(A + B) \geq \alpha + \beta - \frac{1}{g}$
- $A + B \subseteq G + \{gn\}$
- esistono degli intervalli $[c_n, d_n]$ tali che

$$(A + B) \cap [c_n, d_n] = (G + g\mathbb{N}) \cap [c_n, d_n]$$

Teorema di Plünnecke

Il teorema di Plünnecke è utilizzato per trovare dei particolari insiemi di numeri naturali detti "componenti essenziali", cioè insiemi $B \subseteq \mathbb{N}$ tali che

$$\sigma(A+B) > \sigma(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{N} : 0 < \sigma(A) < 1$$

Teorema di Plünnecke

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B una base di ordine h. Allora vale

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

Teorema di Plünnecke

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B una base di ordine h. Allora vale

$$\sigma(A+B) \geq \sigma(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

Utilizzando il teorema di immersione di Jin possiamo dimostrare il seguente

Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. Sia B base a tratti di ordine h.
Allora vale

$$BD(A+B) \geq BD(A)^{1-\frac{1}{h}}$$

La dimostrazione in questo caso è un'applicazione quasi immediata del teorema di immersione di Jin.

La dimostrazione in questo caso è un'applicazione quasi immediata del teorema di immersione di Jin.
B base a tratti $\Rightarrow$
$\exists\{c_k\} \quad c_k > 0$ tale che $h \cdot (B \cap [c_k, c_k + k]) \supseteq [hc_k, hc_k + k]$.
Sia $g(k) = c_k$ allora

$$\mathbb{N} = h \cdot B_g = h \cdot ((^*B - [g]) \cap \mathbb{N})$$

Quindi B_g è una base di ordine h.

La dimostrazione in questo caso è un'applicazione quasi immediata del teorema di immersione di Jin.
B base a tratti $\Rightarrow$
$\exists\{c_k\}\ \ c_k > 0$ tale che $h \cdot (B \cap [c_k, c_k + k]) \supseteq [hc_k, hc_k + k]$.
Sia $g(k) = c_k$ allora

$$\mathbb{N} = h \cdot B_g = h \cdot ((^*B - [g]) \cap \mathbb{N})$$

Quindi B_g è una base di ordine h.
Sia $BD(A) = \alpha$, allora, per il teorema di immersione di Jin, esiste $[f]$ tale che $\sigma_{[f]}(^*A) = \alpha$.

La dimostrazione in questo caso è un'applicazione quasi immediata del teorema di immersione di Jin.
B base a tratti $\Rightarrow$
$\exists \{c_k\} \quad c_k > 0$ tale che $h \cdot (B \cap [c_k, c_k + k]) \supseteq [hc_k, hc_k + k]$.
Sia $g(k) = c_k$ allora

$$\mathbb{N} = h \cdot B_g = h \cdot ((^*B - [g]) \cap \mathbb{N})$$

Quindi B_g è una base di ordine h.
Sia $BD(A) = \alpha$, allora, per il teorema di immersione di Jin, esiste $[f]$ tale che $\sigma_{[f]}(^*A) = \alpha$.
Applicando il teorema di Plünnecke quindi

$$\begin{aligned} BD(A+B) &= \sigma_{[f]+[g]}(^*A + {}^*B) \geq \\ &\geq \sigma(A_f + B_g) \geq \sigma(A_f)^{1-\frac{1}{h}} = \\ &= \sigma_{[f]}(^*A)^{1-\frac{1}{h}} = BD(A)^{1-\frac{1}{h}} \end{aligned}$$

Immersione Finita

Immersione Finita

Dati A, B insiemi di numeri naturali dico che B si *immerge finitamente* in A se

$$\forall b_1, \ldots, b_n \in B \;\; \exists x \in \mathbb{N} \; : \; x + b_i \in A \;\; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

ed in tal caso scrivo $B \leq A$.

Immersione Finita

Immersione Finita

Dati A, B insiemi di numeri naturali dico che B si *immerge finitamente* in A se

$$\forall b_1, \dots, b_n \in B \;\; \exists x \in \mathbb{N} \; : \; x + b_i \in A \;\; \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

ed in tal caso scrivo $B \leq A$.

Il seguente teorema è quindi equivalente al teorema di immersione di Jin

Teorema

Sia A insieme di numeri naturali tale che $BD(A) = \alpha$.
Allora esiste $B \subseteq \mathbb{N}$ tale che $B \leq A$ e $\sigma(B) \geq \alpha$.