Tandem Jackson Network visto come processo QBD

Proprietà spettrali del processo e stima asintotica di decadimento

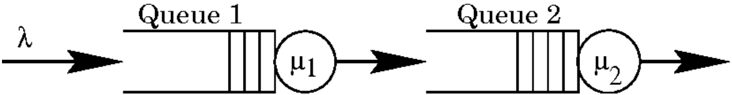
Nikita Deniskin

Università di Pisa

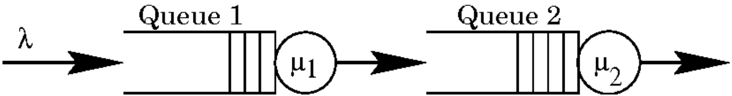
Metodi Numerici per Catene di Markov
prof. Beatrice Meini

28 Ottobre 2021

Il Tandem Jackson Network è rappresentato da due code di capienza $m + 1$ e ∞ rispettivamente. Lo analizzeremo come processo quasi-birth-and-death.

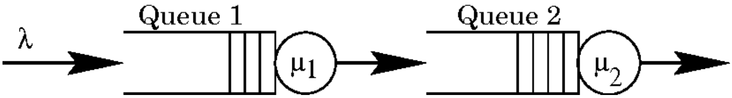


Il Tandem Jackson Network è rappresentato da due code di capienza $m+1$ e ∞ rispettivamente. Lo analizzeremo come processo quasi-birth-and-death.



Studieremo il decadimento asintotico del vettore invariante $\boldsymbol{\pi}$, ovvero $\pi_k \sim \gamma^k$, per il caso $m < \infty$ e $m = \infty$. Analizzeremo γ e l'andamento limite per $m \to \infty$.

Il Tandem Jackson Network è rappresentato da due code di capienza $m+1$ e ∞ rispettivamente. Lo analizzeremo come processo quasi-birth-and-death.



Studieremo il decadimento asintotico del vettore invariante $\boldsymbol{\pi}$, ovvero $\pi_k \sim \gamma^k$, per il caso $m < \infty$ e $m = \infty$. Analizzeremo γ e l'andamento limite per $m \to \infty$.

I risultati sono tratti dall'articolo
D.P. Kroese, W.R.W. Scheinhardt, P.G. Taylor,
Spectral Properties of the Tandem Jackson Network, Seen as a Quasi-Birth-and-Death Process,
The Annals of Applied Probability, Vol. 14 n. 4 (2004), pp. 2057–89.

Processo QBD

Q è la matrice generatrice di una catena di Markov continua.

$$Q = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 & Q_0 & & & \\ Q_2 & Q_1 & Q_0 & & \\ & Q_2 & Q_1 & Q_0 & \\ & & Q_2 & Q_1 & Q_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Processo QBD

Q è la matrice generatrice di una catena di Markov continua.

$$Q = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 & Q_0 & & & \\ Q_2 & Q_1 & Q_0 & & \\ & Q_2 & Q_1 & Q_0 & \\ & & Q_2 & Q_1 & Q_0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$Q_0, Q_1, Q_2, \widetilde{Q}_1$ sono matrici $(m+1) \times (m+1)$, m eventualmente è ∞.
Assumiamo che Q sia irriducibile.

Stima asintotica di decadimento

Sia $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \ldots)$ il vettore invariante della catena di Markov. È equivalente a $\boldsymbol{\pi} Q = 0$.

Stima asintotica di decadimento

Sia $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \ldots)$ il vettore invariante della catena di Markov. È equivalente a $\boldsymbol{\pi} Q = 0$.

In [Latouche-Ramaswami 1999], si mostra una stima asintotica per $\boldsymbol{\pi}_k$, per il caso $m < \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sum_i \pi_k(i)}{\rho(R)^k} = \text{cost}$$

Stima asintotica di decadimento

Sia $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \ldots)$ il vettore invariante della catena di Markov. È equivalente a $\boldsymbol{\pi} Q = 0$.
In [Latouche-Ramaswami 1999], si mostra una stima asintotica per $\boldsymbol{\pi}_k$, per il caso $m < \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sum_i \pi_k(i)}{\rho(R)^k} = \text{cost}$$

dove R è la soluzione minimale dell'equazione:

$$Q_0 + RQ_1 + R^2 Q_2 = 0$$

Stima asintotica di decadimento

Sia $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \dots)$ il vettore invariante della catena di Markov. È equivalente a $\boldsymbol{\pi} Q = 0$.

In [Latouche-Ramaswami 1999], si mostra una stima asintotica per $\boldsymbol{\pi}_k$, per il caso $m < \infty$:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sum_i \pi_k(i)}{\rho(R)^k} = \text{cost}$$

dove R è la soluzione minimale dell'equazione:

$$Q_0 + RQ_1 + R^2 Q_2 = 0$$

Vogliamo estendere il risultato a $m = \infty$.

Condizione $\pi Q = 0$:

$$\begin{cases} \pi_0 \widetilde{Q}_1 + \pi_1 Q_2 = 0 \\ \pi_k Q_0 + \pi_{k+1} Q_1 + \pi_{k+2} Q_2 = 0 \end{cases}$$

Condizione $\pi Q = 0$:

$$\begin{cases} \pi_0 \widetilde{Q}_1 + \pi_1 Q_2 = 0 \\ \pi_k Q_0 + \pi_{k+1} Q_1 + \pi_{k+2} Q_2 = 0 \end{cases}$$

Da essa segue:

$$\pi_k = \pi_0 R^k$$

Il sistema diventa:

Condizione $\pi Q = 0$:

$$\begin{cases} \pi_0 \widetilde{Q}_1 + \pi_1 Q_2 = 0 \\ \pi_k Q_0 + \pi_{k+1} Q_1 + \pi_{k+2} Q_2 = 0 \end{cases}$$

Da essa segue:

$$\pi_k = \pi_0 R^k$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} \pi_0 \left(\widetilde{Q}_1 + R Q_2\right) = 0 \\ \pi_0 R^k \left(Q_0 + R Q_1 + R^2 Q_2\right) = 0 \end{cases}$$

Vogliamo trovare un andamento del tipo $\boldsymbol{\pi}_k \sim \gamma^k$

Vogliamo trovare un andamento del tipo $\boldsymbol{\pi}_k \sim \gamma^k$
Per il caso $m < \infty$, si ha $\gamma = \rho(R)$. Per avere $\boldsymbol{\pi} \in \ell^1$, serve $\rho(R) < 1$.

$$\sum_i \pi_k(i) = \boldsymbol{\pi}_k \mathbb{1} = \boldsymbol{\pi}_0 R^k \mathbb{1} = \rho(R)^k \boldsymbol{\pi}_0 \mathbb{1}$$

Vogliamo trovare un andamento del tipo $\boldsymbol{\pi}_k \sim \gamma^k$
Per il caso $m < \infty$, si ha $\gamma = \rho(R)$. Per avere $\boldsymbol{\pi} \in \ell^1$, serve $\rho(R) < 1$.

$$\sum_i \pi_k(i) = \boldsymbol{\pi}_k \mathbb{1} = \boldsymbol{\pi}_0 R^k \mathbb{1} = \rho(R)^k \boldsymbol{\pi}_0 \mathbb{1}$$

Nel caso $m = \infty$, studiamo lo spettro e cerchiamo autocoppie $wR = zw$.

Vogliamo trovare un andamento del tipo $\boldsymbol{\pi}_k \sim \gamma^k$
Per il caso $m < \infty$, si ha $\gamma = \rho(R)$. Per avere $\boldsymbol{\pi} \in \ell^1$, serve $\rho(R) < 1$.

$$\sum_i \pi_k(i) = \boldsymbol{\pi}_k \mathbb{1} = \boldsymbol{\pi}_0 R^k \mathbb{1} = \rho(R)^k \boldsymbol{\pi}_0 \mathbb{1}$$

Nel caso $m = \infty$, studiamo lo spettro e cerchiamo autocoppie $wR = zw$.

Convergence norm: $\frac{1}{\alpha} = \lim_{k\to\infty} (R_{ij}^k)^{1/k}$

Vogliamo trovare un andamento del tipo $\boldsymbol{\pi}_k \sim \gamma^k$
Per il caso $m < \infty$, si ha $\gamma = \rho(R)$. Per avere $\boldsymbol{\pi} \in \ell^1$, serve $\rho(R) < 1$.

$$\sum_i \pi_k(i) = \boldsymbol{\pi}_k \mathbb{1} = \boldsymbol{\pi}_0 R^k \mathbb{1} = \rho(R)^k \boldsymbol{\pi}_0 \mathbb{1}$$

Nel caso $m = \infty$, studiamo lo spettro e cerchiamo autocoppie $wR = zw$.

Convergence norm: $\dfrac{1}{\alpha} = \lim\limits_{k\to\infty} (R_{ij}^k)^{1/k}$

Vale se e solo se la serie $\sum\limits_k R^k z^k$ ha raggio di convergenza α.

Definizione: Dati $\beta > 0$ e $x \geq 0$ vettore, x è β-subinvariante se $xR \leq \frac{1}{\beta}x$.

Definizione: Dati $\beta > 0$ e $x \geq 0$ vettore, x è β-subinvariante se $xR \leq \frac{1}{\beta}x$.

Teorema di Perron Frobenius, caso infinito

Dato R con convergence norm $1/\alpha$, non può esistere nessun vettore β-subinvariante per R con $\beta > \alpha$.

Definizione: Dati $\beta > 0$ e $x \geq 0$ vettore, x è β-subinvariante se $xR \leq \frac{1}{\beta}x$.

Teorema di Perron Frobenius, caso infinito

Dato R con convergence norm $1/\alpha$, non può esistere nessun vettore β-subinvariante per R con $\beta > \alpha$.

Corollario

$\frac{1}{\alpha}$ è il minimo autovalore positivo per R, con un autovettore x non-negativo.

Definizione: Dati $\beta > 0$ e $x \geq 0$ vettore, x è β-subinvariante se $xR \leq \frac{1}{\beta}x$.

Teorema di Perron Frobenius, caso infinito

Dato R con convergence norm $1/\alpha$, non può esistere nessun vettore β-subinvariante per R con $\beta > \alpha$.

Corollario

$\frac{1}{\alpha}$ è il minimo autovalore positivo per R, con un autovettore x non-negativo.

$wR = zw$ con $w \geq 0$.
Stima dal basso: $z \geq \frac{1}{\alpha}$.
Stima dall'alto: $z \leq 1$

Lemma

Supponiamo di avere w vettore tale che $wR = zw$. Allora

$$w\, zQ(z) = w\,(Q_0 + zQ_1 + z^2 Q_2) = w\big(Q_0 + RQ_1 + R^2 Q_2\big) = 0$$

Lemma

Supponiamo di avere w vettore tale che $wR = zw$. Allora

$$w\, zQ(z) = w\,(Q_0 + zQ_1 + z^2 Q_2) = w\big(Q_0 + RQ_1 + R^2 Q_2\big) = 0$$

Viceversa [Ramaswami-Taylor 1996]

Teorema 2.5

Sia $q_k = -Q_1(k,k)$. Sia z tale che $|z| < 1$ e $\sum_k |w_k|\, q_k < \infty$.
Supponiamo che $w\, Q(z) = 0$. Allora necessariamente $wR = zw$.

Lemma

Supponiamo di avere w vettore tale che $wR = zw$. Allora

$$w\, zQ(z) = w\,(Q_0 + zQ_1 + z^2 Q_2) = w\big(Q_0 + RQ_1 + R^2 Q_2) = 0$$

Viceversa [Ramaswami-Taylor 1996]

Teorema 2.5

Sia $q_k = -Q_1(k,k)$. Sia z tale che $|z| < 1$ e $\sum_k |w_k|\, q_k < \infty$.
Supponiamo che $w\, Q(z) = 0$. Allora necessariamente $wR = zw$.

$$Q(z) = \frac{1}{z}Q_0 + Q_1 + zQ_2 = (I - \frac{1}{z}R)(Q_1 + RQ_2 + zQ_2)$$

Teorema 2.4

Supponiamo che esista $w \in \ell^1$, $w \geq 0$ e $0 \leq z < 1$ tali che

$$w(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0$$

$$wR = zw$$

Allora il vettore $\boldsymbol{\pi}$ è strettamente positivo, $\boldsymbol{\pi}\mathbb{1} = 1$ e $\boldsymbol{\pi}_0 = cw$ con γ costante di normalizzazione.

Teorema 2.4

Supponiamo che esista $w \in \ell^1$, $w \geq 0$ e $0 \leq z < 1$ tali che

$$w(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0$$

$$wR = zw$$

Allora il vettore $\boldsymbol{\pi}$ è strettamente positivo, $\boldsymbol{\pi}\mathbb{1} = 1$ e $\boldsymbol{\pi}_0 = cw$ con γ costante di normalizzazione.

Dimostrazione: $\boldsymbol{\pi}_0 = cw$ e $\boldsymbol{\pi}_k = cwR^k = cz^k w$.

$$\boldsymbol{\pi}\mathbb{1} = c\sum_k z^k w\mathbb{1} = c\,(w\mathbb{1})\sum_k z^k = c\,(w\mathbb{1})(1-z)^{-1} = 1$$

$$c = \frac{1-z}{w\mathbb{1}}$$

Riformulazione del problema

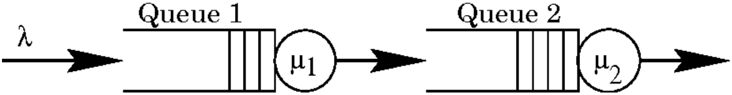
Date le matrici Q_0, Q_1, Q_2, vogliamo trovare $0 \leq z < 1$ e $w \geq 0$ tali che:

1. $wQ(z) = 0$
2. $w(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0$
3. Siano rispettate le ipotesi del teorema 2.5.

Infatti $1 + 3 \Rightarrow \; w\,R = zw$, da cui $\boldsymbol{\pi}_0 = w$ e $\boldsymbol{\pi}_k = z^k w$.

Tandem Jackson Network

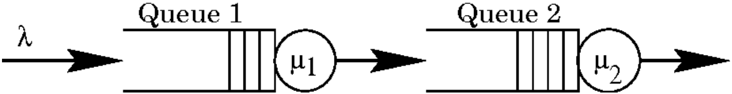
Sono presenti due code, ogni processo di entrata/uscita è Poisson.



Il parametro di entrata nel processo è λ, per passare dalla prima alla seconda coda è μ_1, per uscire dal processo è μ_2.

Tandem Jackson Network

Sono presenti due code, ogni processo di entrata/uscita è Poisson.



Il parametro di entrata nel processo è λ, per passare dalla prima alla seconda coda è μ_1, per uscire dal processo è μ_2.
Definiamo $\rho_i = \lambda/\mu_i$ per $i = 1, 2$.

Condizione di stabilità: $\lambda < \mu_1, \mu_2$.

Caso $m = \infty$

$$\widetilde{Q}_1 = Q_1 + Q_2$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \mu_1 & 0 & & & \\ & \mu_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & & & & \\ & \mu_2 & & & \\ & & \mu_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu_2) & \lambda & & & \\ & -(\lambda+\mu_1+\mu_2) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Caso $m < \infty$

$$\widetilde{Q}_1 = Q_1 + Q_2$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \mu_1 & 0 & & & \\ & \mu_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & & & & \\ & \mu_2 & & & \\ & & \mu_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mu_2 \end{pmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -(\lambda + \mu_2) & \lambda & & & \\ & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2) & \lambda \\ & & & & -(\mu_1 + \mu_2) \end{pmatrix}$$

Caso $m = \infty$

$$Q(z) = \frac{1}{z} Q_0 + Q_1 + z Q_2$$

$$Q(z) = \begin{pmatrix} -\lambda - \mu_2 + \mu_2 z & \lambda & & \\ \frac{1}{z}\mu_1 & -\lambda - \mu_1 - \mu_2 + \mu_2 z & \lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Caso $m < \infty$

$$Q(z) = \frac{1}{z} Q_0 + Q_1 + z Q_2$$

$$Q(z) = \begin{pmatrix} -\lambda - \mu_2 + \mu_2 z & \lambda & & \\ \frac{1}{z}\mu_1 & -\lambda - \mu_1 - \mu_2 + \mu_2 z & \lambda & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \frac{1}{z}\mu_1 & -\mu_1 - \mu_2 + \mu_2 z \end{pmatrix}$$

Caso $m = \infty$

L'equazione $wQ(z) = 0$, scritta per componenti, diventa:

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu_2(1-z))z w_0 + \mu_1 w_1 & = 0, \\ -\lambda z w_{k-1} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z w_k + \mu_1 w_{k+1} & = 0, \qquad k \geq 1 \end{cases}$$

Caso $m = \infty$

L'equazione $wQ(z) = 0$, scritta per componenti, diventa:

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu_2(1-z))z w_0 + \mu_1 w_1 & = 0, \\ -\lambda z w_{k-1} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z w_k + \mu_1 w_{k+1} & = 0, \qquad k \geq 1 \end{cases}$$

$$\mu_1 u^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z u + \lambda z = 0$$

Caso $m = \infty$

L'equazione $wQ(z) = 0$, scritta per componenti, diventa:

$$\begin{cases} -(\lambda + \mu_2(1-z))z w_0 + \mu_1 w_1 & = 0, \\ -\lambda z w_{k-1} - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z w_k + \mu_1 w_{k+1} & = 0, \qquad k \geq 1 \end{cases}$$

$$\mu_1 u^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))zu + \lambda z = 0$$

Studiamo inoltre

$$\Delta(z) = (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))^2 z^2 - 4\lambda\mu_1 z$$

$$\tau(z) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z)) + 2\sqrt{\frac{\lambda\mu_1}{z}}$$

$$\mu_1 u^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))zu + \lambda z = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu_1}$$

$$w_k = c_1 u_1^k + c_2 u_2^k$$

$$\mu_1 u^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))zu + \lambda z = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu_1}$$

$$w_k = c_1 u_1^k + c_2 u_2^k$$

Lemma 4.2

Il vettore w appartiene a ℓ^1 solo se il parametro z soddisfa:

$$z_1 < z < \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

con $z_1 = \frac{1}{2\mu_2}(2\lambda + \mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)^2 + 4\mu_1\mu_2})$.

Si osservi che $z_1 < 0$.

$$\mu_1 u^2 - (\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))zu + \lambda z = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))z \pm \sqrt{\Delta}}{2\mu_1}$$

$$w_k = c_1 u_1^k + c_2 u_2^k$$

Lemma 4.2

Il vettore w appartiene a ℓ^1 solo se il parametro z soddisfa:

$$z_1 < z < \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

con $z_1 = \frac{1}{2\mu_2}(2\lambda + \mu_1 + \mu_2 - \sqrt{(2\lambda + \mu_1 + \mu_2)^2 + 4\mu_1\mu_2})$.

Si osservi che $z_1 < 0$.

Corollario 4.3

Esiste una soluzione $w \in \ell^1$ al sistema $wR = zw$ se $z_1 < z < \min\{1, \frac{\mu_1}{\mu_2}\})$

Ora vogliamo mostrare che w ha componenti positive. Definiamo la sequenza di polinomi in x:

$$
\begin{aligned}
P_0(x; z) &= 1, \\
\frac{\mu_1}{z} P_1(x; z) &= x + \lambda + \mu_2(1 - z) \\
\frac{\mu_1}{z} P_n(x; z) &= (x + \lambda + \mu_1 + \mu_2(1 - z))P_{n-1}(x; z) - \lambda P_{n-2}(x; z)
\end{aligned}
$$

Ora vogliamo mostrare che w ha componenti positive. Definiamo la sequenza di polinomi in x:

$$\begin{aligned}
P_0(x;z) =& 1,\\
\frac{\mu_1}{z}P_1(x;z) =& x+\lambda+\mu_2(1-z)\\
\frac{\mu_1}{z}P_n(x;z) =& (x+\lambda+\mu_1+\mu_2(1-z))P_{n-1}(x;z)-\lambda P_{n-2}(x;z)
\end{aligned}$$

Vale $w_n = P_n(0;z)$.
Per quali z, $P_n(0;z)$ è positivo per ogni n?

Proposizione

Per $z > 0$, i polinomi $P_n(x; z)$ sono ortogonali.

$$\int_I P_n(x;z)P_m(x;z)\psi(x)dx = \left(\frac{z\lambda}{\mu_1}\right)^n \delta_{n,m}$$

$$I = \begin{cases} [\sigma(z), \tau(z)] & \text{per } z \leq \rho_1 \\ [\sigma(z), \tau(z)] \cup \{\chi(z)\} & \text{per } z > \rho_1 \end{cases}$$

$$\tau(z) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z)) + 2\sqrt{\lambda\mu_1 z^{-1}}$$

$$\sigma(z) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z)) - 2\sqrt{\lambda\mu_1 z^{-1}}$$

$$\chi(z) = \left(\frac{\lambda}{z} - \mu_2\right)(1-z)$$

$\psi(x)$ è continua su $[\sigma(z), \tau(z)]$, ed è una delta su $\chi(z)$.
Inoltre $\frac{1}{z^2}\Delta(z) = \sigma(z)\tau(z)$.

Siano $x_{n,1} < \ldots < x_{n,n}$ gli zeri di $P_n(x; z)$, che sono reali. Si ha:

- $\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = \sigma(z)$ è monotona decrescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n-1} = \tau(z)$ è monotona crescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n} = \chi_1(z) := \max(\chi(z), \tau z)$ è monotona crescente.

Siano $x_{n,1} < \ldots < x_{n,n}$ gli zeri di $P_n(x; z)$, che sono reali. Si ha:

- $\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = \sigma(z)$ è monotona decrescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n-1} = \tau(z)$ è monotona crescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n} = \chi_1(z) := \max(\chi(z), \tau z)$ è monotona crescente.

Proposizione

Il vettore w è positivo se e solo se $\chi_1(z) \leq 0$

Siano $x_{n,1} < \ldots < x_{n,n}$ gli zeri di $P_n(x;z)$, che sono reali. Si ha:

- $\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = \sigma(z)$ è monotona decrescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n-1} = \tau(z)$ è monotona crescente.
- $\lim_{n\to\infty} x_{n,n} = \chi_1(z) := \max(\chi(z), \tau z)$ è monotona crescente.

Proposizione

Il vettore w è positivo se e solo se $\chi_1(z) \leq 0$

Dimostrazione: Fissato $z > 0$, la sequenza $P_n(x;z)$ è positiva per ogni n se e solo se $x \geq \chi_1(z)$.
Infatti, gli zeri $x_{n,n}$ si accumulano da sinistra a $\chi_1(z)$, per cui per $x < \chi_1(z)$ e per l'interlacciamento esiste n con $P_n(x;z) < 0$.
Si conclude prendendo $x = 0$ e dunque $w_n = P_n(0;z)$.

Proposizione

Il vettore w è positivo se e solo se $\chi_1(z) \leq 0$

Se $z \leq \rho_1$, allora $\chi_1(z) = \tau(z) \leq 0$, ovvero $z \geq \eta$ (perché τ è decrescente con unico zero η in $(0, 1)$).
Se $z > \rho_1$, allora $\chi_1(z) = \chi(z) \leq 0$, ovvero $z \geq \rho_2$.

Proposizione

Il vettore w è positivo se e solo se $\chi_1(z) \leq 0$

Se $z \leq \rho_1$, allora $\chi_1(z) = \tau(z) \leq 0$, ovvero $z \geq \eta$ (perché τ è decrescente con unico zero η in $(0,1)$).
Se $z > \rho_1$, allora $\chi_1(z) = \chi(z) \leq 0$, ovvero $z \geq \rho_2$.

Teorema 4.9

Il sistema $wR = zw$ ha una soluzione $w \in \ell^1$, con $w \geq 0$

- Per $\mu_1 \leq \mu_2$, se $\eta \leq z < \frac{\mu_1}{\mu_2}$
- Per $\mu_1 > \mu_2$, se $\rho_2 \leq z < 1$

Il sistema che vogliamo risolvere è

$$\begin{cases} w\,(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0 \\ w\,R = zw \end{cases}$$

Per z in un opportuno intervallo, la seconda equazione ammette soluzione. Non è detto che soddisfi la prima.

Il sistema che vogliamo risolvere è

$$\begin{cases} w\,(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0 \\ w\,R = zw \end{cases}$$

Per z in un opportuno intervallo, la seconda equazione ammette soluzione. Non è detto che soddisfi la prima.

Per il Tandem Jackson Network con $\widetilde{Q}_1 = Q_1 + Q_2$, la velocità di decadimento è ρ_2, indipendentemente da $\mu_1 > \mu_2$ o viceversa.

Il sistema che vogliamo risolvere è

$$\begin{cases} w\,(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0 \\ w\,R = zw \end{cases}$$

Per z in un opportuno intervallo, la seconda equazione ammette soluzione. Non è detto che soddisfi la prima.

Per il Tandem Jackson Network con $\widetilde{Q}_1 = Q_1 + Q_2$, la velocità di decadimento è ρ_2, indipendentemente da $\mu_1 > \mu_2$ o viceversa.

Scegliendo opportunamente $\widetilde{Q}_1$, è possibile risolverlo per ogni z ammissibile.

Scelta di $\widetilde{Q}_1$ per $\mu_1 > \mu_2$

Dato $z \in [\rho_2, 1)$, sia w la soluzione positiva a $wR = zw$.

Scelta di $\widetilde{Q}_1$ per $\mu_1 > \mu_2$

Dato $z \in [\rho_2, 1)$, sia w la soluzione positiva a $w\,R = zw$.

$$\widetilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ & -\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & & \\ & & -\lambda_2-\mu_1 & \lambda_2 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_2 z \\ \lambda_{i+1} = \lambda_i \dfrac{w_i}{w_{i+1}} + \mu_2 z - \mu_1 \end{cases}$$

Scelta di $\widetilde{Q}_1$ per $\mu_1 > \mu_2$

Dato $z \in [\rho_2, 1)$, sia w la soluzione positiva a $w\,R = zw$.

$$\widetilde{Q}_1 = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & & \\ & & -\lambda_2 - \mu_1 & \lambda_2 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = \mu_2 z \\ \lambda_{i+1} = \lambda_i \dfrac{w_i}{w_{i+1}} + \mu_2 z - \mu_1 \end{cases}$$

Vale $w\,\widetilde{Q}_1 = -\mu_2 z w$, da cui segue $w(\widetilde{Q}_1 + RQ_2) = 0$.
Dunque $\boldsymbol{\pi}_0 = cw$ e la velocità di decadimento è z:

$$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_0 R^k = cwR^k = cz^k w$$

- Per $\mu_1 > \mu_2$, ogni valore di $z \in [\rho_2, 1)$ è raggiungibile
- Per $\mu_1 < \mu_2$, ogni valore di $z \in [\eta, \rho_2]$ è raggiungibile

Comportamento limite per m finito

Una coppia (w, z) soddisfa $w\,R = zw$ se e solo se soddisfa $w(\frac{1}{z}Q_0 + Q_1 + zQ_2) = 0$.

Comportamento limite per m finito

Una coppia (w, z) soddisfa $w\,R = zw$ se e solo se soddisfa $w(\frac{1}{z}Q_0 + Q_1 + zQ_2) = 0$. Facciamo variare m, studiando lo spettro di R_m e di $Q^{(m)}(z)$.

Comportamento limite per m finito

Una coppia (w, z) soddisfa $w\,R = zw$ se e solo se soddisfa $w(\frac{1}{z}Q_0 + Q_1 + zQ_2) = 0$. Facciamo variare m, studiando lo spettro di R_m e di $Q^{(m)}(z)$.

Si definiscano i polinomi ortogonali:

$$\begin{aligned}
\widehat{P}_0(x; z) =& 1, \\
\frac{\mu_1}{z}\widehat{P}_1(x; z) =& x + \mu_2(1-z) \\
\frac{\mu_1}{z}\widehat{P}_n(x; z) =& (x + \lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))\widehat{P}_{n-1}(x; z) - \lambda(1-z) \\
\frac{\mu_1}{z}\widehat{P}_n(x; z) =& (x + \lambda + \mu_1 + \mu_2(1-z))\widehat{P}_{n-1}(x; z) - \lambda\widehat{P}_{n-2}(x; z)
\end{aligned}$$

Comportamento limite per m finito

Lemma 5.2

Per m finito, gli autovalori di $Q^{(m)}(z)$ sono gli zeri del polinomio $\widehat{P}_m(x;z)$. Per ogni autovalore γ, il suo autovettore corrispondente è

$$w = (P_0(\gamma;z), P_1(\gamma;z), \ldots, P_m(\gamma;z))$$

Comportamento limite per m finito

Lemma 5.2

Per m finito, gli autovalori di $Q^{(m)}(z)$ sono gli zeri del polinomio $\widehat{P}_m(x;z)$. Per ogni autovalore γ, il suo autovettore corrispondente è

$$w = (P_0(\gamma;z), P_1(\gamma;z), \ldots, P_m(\gamma;z))$$

Vogliamo stabilire l'autovettore w corrispondente a $\gamma = 0$. In particolare serve che $\gamma = 0$ sia una radice di $\widehat{P}_n(x;z)$.

Comportamento limite per m finito

Lemma 5.2

Per m finito, gli autovalori di $Q^{(m)}(z)$ sono gli zeri del polinomio $\widehat{P}_m(x; z)$. Per ogni autovalore γ, il suo autovettore corrispondente è

$$w = (P_0(\gamma; z), P_1(\gamma; z), \ldots, P_m(\gamma; z))$$

Vogliamo stabilire l'autovettore w corrispondente a $\gamma = 0$. In particolare serve che $\gamma = 0$ sia una radice di $\widehat{P}_n(x; z)$.

Teorema 5.4

Esiste un unico $z \in (0, 1)$ tale che $\gamma = 0$ è la radice più grande di $\widehat{P}_m(x; z)$. Tale z è l'autovalore massimo di R_m.

Usando gli interlacciamenti degli zeri di $\widehat{P}_n(x; z)$ e $P_n(x; z)$, si dimostra che la radice più grande di $\widehat{P}_n(x; z)$ tende crescendo a $\chi_1(z)$

Comportamento limite per m finito

Corollario 5.5

Sia γ_m l'autovalore di Perron di R_m. Allora:

- Per $\mu_1 \leq \mu_2$, si ha $\gamma_m \uparrow \eta$.
- Per $\mu_1 > \mu_2$, si ha $\gamma_m \uparrow \rho_2$.

Comportamento limite per m finito

Corollario 5.5

Sia γ_m l'autovalore di Perron di R_m. Allora:

- Per $\mu_1 \leq \mu_2$, si ha $\gamma_m \uparrow \eta$.
- Per $\mu_1 > \mu_2$, si ha $\gamma_m \uparrow \rho_2$.

Indipendentemente da μ_1, μ_2, per $m = \infty$ il decadimento asintotico è ρ_2. Quindi per $\mu_1 \leq \mu_2$, il limite del decadimento di R_m non tende a quello con R_∞.

Grazie per l'attenzione!

Fattorizzazione di Q

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 & Q_0 & & \\ Q_2 & Q_1 & Q_0 & \\ & Q_2 & Q_1 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -R & & \\ & I & -R & \\ & & I & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 + RQ_2 & & \\ Q_2 & Q_1 + RQ_2 & \\ & Q_2 & \ddots \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$Q(z) = \frac{1}{z} Q_0 + Q_1 + zQ_2 = (I - \frac{1}{z} R)(Q_1 + RQ_2 + zQ_2)$$

Bibliografia

D.P. Kroese, W.R.W. Scheinhardt, P.G. Taylor, *Spectral Properties of the Tandem Jackson Network, Seen as a Quasi-Birth-and-Death Process*, The Annals of Applied Probability, Vol. 14 n. 4 (2004), pp. 2057–89.

G. Latouche, V. Ramaswami, *Introduction to Matrix-Analytic Methods in Stochastic Modelling*, ASA-SIAM, Phiadelphia (1999).

V. Ramaswami, P.G. Taylor, *Some properties of the rate operators in level dependent quasi-birth-and-death processes with a countable number of phases*, Stoch. Models, Vol 12 (1996), pp. 143-164.