Indice

NOTA BENE

Prima stesura ancora da correggere. Questi sono appunti personali scritti rimettendo in ordine gli appunti presi in classe e non intendono essere una trattazione completa del corso. Se ti va, puoi segnalarmi eventuali errori al mio indirizzo email demarinis@student.dm.unipi.it. Grazie.

Capitolo 1

Prima Lezione

Definizione 1.1. (Curva)

Una curva (in $\mathbb{R}^3$) è una mappa di classe C^∞

$$\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

dove $I \subseteq \mathbb{R}$.

Osservazione 1. La curva γ è di classe C^∞ se lo sono le sue componenti.

Definizione 1.2. (Supporto)

Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva, allora $\gamma(I)$ si chiama supporto della curva γ.

Definizione 1.3. (Curva Regolare)

Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva, essa si dice regolare se la sua velocità $\gamma'(u)$ è tale che $\gamma'(u) \neq 0 \ \forall u \in I$.

Osservazione 2. D'ora in poi su $\mathbb{R}^n$ sarà fissato il prodotto scalare standard $\langle , \rangle$ con norma associata $\|\cdot\|$.

Esempio 1. (Elica)

Sia

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto (R\cos u, R\sin u, au) \end{aligned} \tag{1.2}$$

con $R > 0$ e $a \neq 0$ una parametrizzazione dell'elica circolare retta, allora

$$\gamma'(u) = (-R\sin u, R\cos u, a) \neq 0 \tag{1.3}$$

$\forall u \in \mathbb{R}$. L'elica circolare retta è dunque una curva regolare.

Esempio 2. (Cuspide)

Sia

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto (u^2, u^3, 0) \end{aligned} \tag{1.4}$$

una parametrizzazione della cuspide, allora

$$\gamma'(u) = (2u, 3u^3, 0) = 0 \iff u = 0. \tag{1.5}$$

La cuspide non è una curva regolare.

Lemma 1.0.1. *Il supporto della cuspide non è il supporto di una curva regolare.*

Dimostrazione. Sia

$$\begin{aligned} \alpha\colon I &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), 0) \end{aligned} \tag{1.6}$$

una qualsiasi parametrizzazione del supporto della cuspide e sia $t_0 \in I$ tale che

$$\alpha(t_0) = (0,0,0). \tag{1.7}$$

Vogliamo mostrare che α non è regolare in t_0 e dunque $\alpha'(t_0) = 0$. Si ha che $\alpha_1(u) \geq 0 \ \forall u \in I$, dunque t_0 è un minimo di α_1 e quindi $\alpha_1'(t_0) = 0$. Si hanno ora due casi

- $\alpha_2(u) = 0$ in un intorno di t_0, allora $\alpha_2'(t_0) = 0$.
- $\alpha_2(u) \neq 0$ in un intorno di t_0, allora esiste una successione $\{t_n\}$ tale che $t_n \to t_0$ e $\alpha_2(t_n) > 0$. Per definizione di cuspide si deve avere

$$\alpha_2(t_n) = \alpha_1(t_n)^{\frac{3}{2}} \tag{1.8}$$

da cui

$$\alpha_2'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_2(t_n) - \alpha_2(t_0)}{t_n - t_0} = 0. \tag{1.9}$$

$\square$

Definizione 1.4. (Lunghezza di una curva)
Sia $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva, la lunghezza di γ è

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(u)\| du. \tag{1.10}$$

Definizione 1.5. (Curva P.L.A.)
Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva, allora sono fatti equivalenti:

- $\|\gamma'(u)\| = 1 \ \forall u \in I$.
- $L(\gamma_{|_{[a,b]}}) = b - a \ \forall a,b \in I$ e $a \leq b$.

In tal caso γ si dice P.L.A. , cioè parametrizzata per lunghezza d'arco.

Definizione 1.6. (Riparametrizzazione)
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva, una riparametrizzazione di γ è una curva $\alpha = \gamma \circ \psi$ dove $\psi\colon J \to I$ è un diffeomorfismo crescente tra intervalli.

Lemma 1.0.2. *La proprietà di essere regolare è invariante per riparametrizzazione.*

Dimostrazione. Sia $\alpha = \gamma \circ \psi$ una riparametrizzazione di una curva regolare γ, derivando

$$\alpha'(s) = \gamma'(\psi(s))\psi'(s). \tag{1.11}$$

Dal momento che $\psi^{-1}(\psi(s)) = s$ e dunque $(\psi^{-1})'(\psi(s))\psi'(s) = 1$, allora $\psi'(s) \neq 0$ e dunque anche α è una curva regolare. □

Teorema 1.0.3. *Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva, sono fatti equivalenti:*

1. *γ è una curva regolare*
2. *γ ha una riparametrizzazione P.L.A.*

Dimostrazione.
$(2 \Rightarrow 1)$
Segue direttamente dal Lemma 1.0.2.
$(1 \Rightarrow 2)$
Sia $u_0 \in I$, pongo

$$f(u) = \int_{u_0}^{u} \|\gamma'(t)\| dt \tag{1.12}$$

con $f\colon I \to J$ e $0 \in J$ poichè $f(u_0) = 0$.
Ora si ha che $\forall u \in I$ $f'(u) = \|\gamma'(u)\| \neq 0$ per cui f è un diffeomorfismo crescente su $f(I) = K$.
Esiste l'inversa di f e chiamo $\psi = f^{-1}\colon K \to I$ e dico che $\gamma \circ \psi$ è P.L.A. .

Infatti

$$\|(\gamma \circ \psi)'(s)\| = \|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\| = \frac{\cancel{\|\gamma'(\psi(s))\|}}{\cancel{\|\gamma'(\psi(s))\|}} = 1. \tag{1.13}$$

□

Esempio 3. (Cicloide)

Sia

$$\begin{aligned} \gamma \colon (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto (u - \sin u, 1 - \cos u, 0) \end{aligned} \tag{1.14}$$

una parametrizzazione della cicloide, vediamo che non è P.L.A. .

Infatti si ha

$$\gamma'(u) = (1 - \cos u, \sin u, 0) = 0 \iff u = 2k\pi \tag{1.15}$$

e dunque la curva è regolare ma non P.L.A. poichè

$$\|\gamma'(u)\| = \sqrt{2 - 2\cos u} \not\equiv 1. \tag{1.16}$$

Dunque si ha che

$$\begin{aligned} L(\gamma_{|_{[0,u]}}) &= \int_0^u \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^u \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = \\ &= 2\int_0^u \sin\frac{t}{2} dt = 2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^u = -4\cos\frac{u}{2} + 4 \end{aligned} \tag{1.17}$$

la cui inversa è

$$u = 2\arccos\frac{4 - s}{4}. \tag{1.18}$$

Si ha che $\gamma\left(2\arccos\frac{4-s}{4}\right)$ è P.L.A. .

Capitolo 2

Seconda Lezione

Definizione 2.1. (Orientazione)
Due basi $e = \{e_i\}$ e $f = \{f_i\}$ con $i = 1, \ldots, n$ di uno spazio vettoriale V di dimensione n hanno la stessa orientazione se la matrice di cambio di base $\mathcal{M}_f^e$ ha determinante positivo. Denoteremo questa relazione con $e \sim f$.

Dalle proprietà elementari del determinante segue che $e \sim f$ è una relazione di equivalenza infatti si hanno le seguenti proprietà

- $e \sim e$. (Riflessività)
- Se $e \sim f$, allora $f \sim e$. (Simmetria)
- Se $e \sim f$ e $f \sim g$, allora $e \sim g$. (Transitività)

Lemma 2.0.4. *Esistono solamente due orientazioni.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B}_1$,$\mathcal{B}_2$,$\mathcal{B}_3$ tre basi tali che $\mathcal{B}_1 \not\sim \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2 \not\sim \mathcal{B}_3$. Sappiamo che la matrice di cambiamento di base è tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$ e dunque si ha che $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_1}) > 0$. □

Per convenzione l'orientazione canonica su $\mathbb{R}^n$ è quella indotta dalla base canonica, orientazione che indicheremo come positiva.

Lemma 2.0.5. *Sia $f\colon V \to W$ un isomorfismo di spazi orientati. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- $\exists \mathcal{B}_1 > 0$ *di V tale che $f(\mathcal{B}_1)$ è base positiva di W.*
- $\forall \mathcal{B}_1 > 0$ *di V la base $f(\mathcal{B}_1)$ è positiva su W.*
- $\exists\ \mathcal{B}_1 > 0$ *di V e $\mathcal{B}_2 > 0$ di W tali che* $\det \mathcal{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) > 0$.
- $\forall\ \mathcal{B}_1 > 0$ *di V e $\mathcal{B}_2 > 0$ di W,* $\det \mathcal{M}^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_1}(f) > 0$.

Definizione 2.2. (Isomorfismo Positivo)
In tutti questi casi si dice che f è un isomorfismo positivo o che preserva l'orientazione.

Siano $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ si ha che la mappa $\Psi\colon x \mapsto \det(v_1|\dots|v_{n-1}|x)$ è lineare. Per il teorema di Riesz $\exists!\ w \in \mathbb{R}^n$ tale che $\Psi(x) = \langle w, x\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 2.3. (Prodotto Vettore)
Chiamo $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ prodotto vettore di $v_1, \dots, v_{n-1}$.

Esempio 4. (Prodotto Vettore in $\mathbb{R}^3$)
Per $\mathbb{R}^3$ abbiamo

$$\det(v_1|v_2|x) = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & x_1 \\ b_1 & b_2 & x_2 \\ c_1 & c_2 & x_3 \end{bmatrix} = x_1w_1 + x_2w_2 + x_3w_3 = \langle w, x\rangle. \tag{2.1}$$

Con $w = \begin{bmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ -(a_1c_2 - a_2c_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$. E quindi $v_1 \wedge v_2 = w$.

Teorema 2.0.6. *Sono valide le seguenti affermazioni:*

- $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}$ *è multilineare alterno.*
- $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = 0 \iff v_i$ *sono indipendenti.*
- *Se* $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \neq 0$ *allora* $(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})$ *è base positiva.*
- $\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}, v_i \rangle = 0 \ \forall i.$

Dimostrazione. Tutte le affermazioni seguono direttamente dalla definizone.

□

Definizione 2.4. (Elemento di Volume)
Sia V spazio vettoriale con $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $(v_1, \ldots, v_k)$ una base di V e $(e_1, \ldots, e_k)$ una base ortonormale.
L'elemento di volume $vol(v_1, \ldots, v_k)$ è dato da $vol(v_1, \ldots, v_k) = |\det H|$ dove H è la matrice delle cordinate dei v_i rispetto agli e_i.

Osservazione 3. La definizione 2.4 è ben posta poichè il cambio di base ortonormale ha $\det = \pm 1$.

Osservazione 4. $vol(v_1, \ldots, v_k)$ non è altro che il volume del parallelepipedo generato.

Proposizione 2.0.7. *Siano* $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ *linearmente indipendenti in* $\mathbb{R}^n$. *Allora* $\|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\| = vol(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

Dimostrazione. Sia $f_1, \ldots, f_{n-1}$ una base ortonormale di $Span\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ e la completo ad una base ortonormale positiva con f_n. Sia $A \in SO(n)$ tale che $Af_i = e_i$ ovvero l'i-esimo vettore della base canonica. Avrò

$$\|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\|^2 = \langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}, v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \rangle = \det(v_1 | \cdots | v_{n-1} | v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) \tag{2.2}$$

e dal momento che, per costruzione, ho che $\det(A) = 1$ allora

$$\det(v_1|\cdots|v_{n-1}|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) = \det A(v_1|\cdots|v_{n-1}|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}). \tag{2.3}$$

Vediamo che $A(v_1|\cdots|v_{n-1}|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})$ è la matrice a blocchi

$$\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Infatti H è la matrice che ha per colonne le coordinate dei v_i rispetto a $f_1, \ldots, f_{n-1}$ (che sono sempre $n-1$). L'ultima colonna è invece conseguenza del fatto che $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} \perp v_i, \forall i$ e dunque anche $A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) \perp Av_i, \forall i$ il che implica

$$A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

dove $|\lambda| = \|A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})\|$. Infine si avrà

$$\begin{aligned} \|v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1}\|^{\cancel{2}} &= |\det(H)| \cdot |\lambda| = vol(v_1, \ldots, v_{n-1}) \cdot \|A(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})\| = \\ &= vol(v_1, \ldots, v_{n-1}) \cdot \cancel{\|(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{n-1})\|}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

□

Corollario 2.0.8. *Dato $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ sistema ortonormale in $\mathbb{R}^n$ allora $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_1 \wedge \ldots e_{n-1})$ è una base ortonormale positiva.*

Corollario 2.0.9. *Dati $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ allora $\|v_1 \wedge v_2\| = vol(v_1, v_2) = \|v_1\|\|v_2\| \sin(\theta)$, con θ angolo compreso.*

Capitolo 3

Terza Lezione

Continuiamo a parlare di curve. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare ovvero tale che $\gamma'(u) \neq 0, \forall u \in I$.

Definizione 3.1. (Versore Tangente)
Il versore tangente di γ in $\gamma(u)$ è definito da $t(u) = \dfrac{\gamma'(u)}{\|\gamma'(u)\|}$.
Se γ è parametrizzata per lunghezza d'arco allora $t(u) = \gamma'(u)$ e il versore tangente è invariante per riparametrizzazioni. Basta mettere in bigezione il tempo tra le due parametrizzazioni.

Definizione 3.2. (Versore Normale)
Sia γ parametrizzata per lunghezza d'arco. Allora se t ne è il versore tangente e $t'(u) \neq 0$ definiamo il versore normale in $\gamma(u)$ ponendo $n(u) = \dfrac{t'(u)}{\|t'(u)\|}$.
Più in generale se γ è solo regolare e $\alpha = \gamma \circ \psi$ ne è una riparametrizzazione per lunghezza d'arco allora pongo $n_\gamma(u) = n_\alpha(\psi^{-1}(u))$.

Osservazione 5. Si tratta di una buona definizione in quanto due parametrizzazioni per lunghezza d'arco della stessa curva differiscono per una traslazione.

Definizione 3.3. (Curvatura)
Sia γ parametrizzata per lunghezza d'arco allora la curvatura di γ in $\gamma(u)$ è data da $\|t'(u)\| = \|\gamma''(u)\|$ per cui se $\gamma''(u) \neq 0$ allora $t'(u) = K(u) \cdot n(u)$.
Più in generale se γ è solo regolare e $\alpha = \gamma \circ \psi$ ne è una riparametrizzazione per lunghezza d'arco allora $K_\gamma(u) = K_\alpha(\psi^{-1}(u))$.

Osservazione 6. Nel caso in cui γ' non abbia velocità costante in modulo, γ'' ha due componenti: tangenziale e centripeta.

Lemma 3.0.10. *$\forall u \in I$ ho che $n(u) \perp t(u)$ quando sono definiti.*

Per questa dimostrazione occorre premettere il seguente

Lemma 3.0.11. *Sia $b\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bilineare e siano $\gamma\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ e sia $f\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}^k$ tale che
$f(t) = b(\gamma(t), \alpha(t))$.
Allora*

$$f'(t) = b(\gamma'(t), \alpha(t)) + b(\gamma(t), \alpha'(t)). \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Posso supporre $k = 1$. Ho quindi che

$$b(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} u_i v_j. \tag{3.2}$$

Perciò

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \gamma_i \alpha_j. \tag{3.3}$$

La tesi segue dal caso $n = m = 1$ in cui vale la regola di Leibiniz per il calcolo della derivata del prodotto. $\square$

Dimostrazione. (del Lemma 3.0.10)
Posso supporre γ parametrizzata per lunghezza d'arco. Allora

$$1 \equiv \langle t(u), t(u) \rangle \tag{3.4}$$

e derivando si ottiene

$$0 = 2\langle t'(u), t(u)\rangle = 2K(u)\langle n(u), t(u)\rangle \tag{3.5}$$

Quando $n(u)$ è definito necessariamente $K(u) \neq 0$ da cui la tesi. $\square$

Osservazione 7. Ricorda che il versore normale non esiste sempre poichè non sempre $\gamma''(u) \neq 0$. Se γ è regolare dunque $K(u)$ è sempre definito mentre $n(u)$ è definito solamente quando $K(u) \neq 0$.

Definizione 3.4. (Curva Biregolare)
Sia γ regolare allora γ si dice biregolare se $K(u) \neq 0, \forall u$ nel suo dominio. Se γ è parametrizzata per lunghezza d'arco ciò equivale a chiedere che $\gamma''(u) \neq 0, \forall u$.

Esempio 5. $\gamma(t) = (t, t^3, 0)$ non è biregolare ma l'unico punto problematico è l'origine. Infatti n è definito $\forall t \neq 0$ ma non si estende in 0 con continuità.

Definizione 3.5. (Piano Osculatore)
Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare allora $\forall u \in I$ il piano osculatore di γ in $\gamma(u)$ è

$$\gamma(u) + Span\langle t(u), n(u)\rangle. \tag{3.6}$$

Definizione 3.6. (Cerchio Osculatore)
Sia $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare allora $\forall u \in I$ il cerchio osculatore di γ in $\gamma(u)$ è il cerchio che giace sul piano osculatore con centro in

$$\gamma(u) + n(u)R(u) \tag{3.7}$$

dove $R(u) = \dfrac{1}{K(u)}$ è il raggio di curvatura di γ in $\gamma(u)$.

Proposizione 3.0.12. *Sia d la distanza euclidea.*
Allora

- *Il piano osculatore in $\gamma(t_0)$ è l'unico piano affine $H \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $d(\gamma(t), H) = o((t-t_0)^2)$ per $t \to t_0$.*
- *Il cerchio osculatore è l'unico cerchio parametrizzato per lunghezza d'arco α tale che $d(\alpha(t), \gamma(t)) = o((t-t_0)^2)$ per $t \to t_0$.*

Dimostrazione.

- Sia H un piano affine che esprimiamo come $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, b\rangle = a\}$ per qualche $b \in \mathbb{R}^3$, $\|b\| = 1$ e $a \in \mathbb{R}$.
  Poniamo $t_0 = 0$ e passiamo alla variabile u.
  Allora $d(\gamma(u), H) = o(u^2) \iff f(u) = \langle \gamma(u), b\rangle - a$ è un $o(u^2)$.
  In quanto $d(\gamma(u), H) = |f(u)|$.
  D'altronde f è un $o(u^2) \iff f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$.
  Troviamo le tre quantità:

$$f(0) = \langle \gamma(0), b\rangle - a \tag{3.8}$$

$$f'(0) = \langle \gamma'(0), b\rangle = \langle t(0), b\rangle \tag{3.9}$$

$$f''(0) = K(0)\langle n(0), b\rangle \tag{3.10}$$

  Dunque H è il piano cercato $\iff a = \langle \gamma(0), b\rangle$ e $b \perp Span\langle t(0), n(0)\rangle$.
  Quindi $\gamma(0) \in H$ e la giacitura di H è proprio $Span\langle t(0), n(0)\rangle$ da cui la tesi.

- Un qualsiasi cerchio di $\mathbb{R}^3$ parametrizzato per lunghezza d'arco è dato da $\alpha(u) = p + R\cos(\frac{u}{R})v_1 + R\sin(\frac{u}{R})v_2$ con v_1 e v_2 ortonormali.
  Le condizioni del testo sono equivalenti a chiedere che

$$\alpha(0) = \gamma(0) \tag{3.11}$$

$$\alpha'(0) = \gamma'(0) = t(0) \tag{3.12}$$

$$\alpha''(0) = \gamma''(0) = K(0)n(0) \tag{3.13}$$

Trovo le tre derivate e le calcolo in $u = 0$.

$$\alpha(u) = p + R\cos(\frac{u}{R})v_1 + R\sin(\frac{u}{R})v_2 \Longrightarrow \alpha(0) = p + Rv_1 \tag{3.14}$$

$$\alpha'(u) = -\sin(\frac{u}{R})v_1 + \cos(\frac{u}{R})v_2 \Longrightarrow \alpha'(0) = v_2 \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{R}\cos(\frac{u}{R})v_1 + \frac{1}{R}\sin(\frac{u}{R})v_2 \Longrightarrow \alpha''(0) = -\frac{v_1}{R} \tag{3.16}$$

Dunque mettendo a sistema si ha

$$\begin{cases} p + Rv_1 = \gamma(0) \\ v_2 = t(0) \\ -\dfrac{v_1}{R} = K(0)n(0) \end{cases} . \tag{3.17}$$

Ricordando che $K(0) = \dfrac{1}{R}$ si ottiene $v_1 = -n(0)$. Dunque ora risolvendo il sistema ritroviamo le quantità della definizione del cerchio osculatore ovvero $p = \gamma(0) - Rv_1 = \gamma(0) + Rn(0)$ e $R = \dfrac{1}{K(0)}$.

$\square$

Calcolare esplicitamente la curvatura utilizzando la definizione a volte può non essere possibile. Molto utile risulta quindi la seguente

Proposizione 3.0.13.
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare. Allora $\forall u \in I$ si ha

$$K(u) = \frac{\|\gamma'(u) \wedge \gamma''(u)\|}{\|\gamma'(u)\|^3}. \tag{3.18}$$

In particolare $K(u) = 0 \iff \gamma''(u)$ è un multiplo di $\gamma'(u)$.

Dimostrazione.
Se v è una curva mai nulla allora

$$\frac{d}{du}\|v(u)\| = \frac{d}{du}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\langle v, v\rangle}}\cancel{2}\langle v', v\rangle = \frac{\langle v', v\rangle}{\|v\|}. \tag{3.19}$$

Sia $\alpha = \gamma \circ \psi$ una parametrizzazione per lunghezza d'arco di γ.
La sua derivata sarà

$$\alpha'(u) = \gamma'(\psi(u))\psi'(u) \tag{3.20}$$

passando alle norme ottengo

$$1 = \|\gamma'(\psi(u))\|\psi'(u) \tag{3.21}$$

da cui

$$\psi'(u) = \frac{1}{\|\gamma'(\psi(u))\|}. \tag{3.22}$$

Posso ora trovare la derivata seconda di ψ

$$\psi''(u) = -\frac{1}{\|\gamma'(\psi(u))\|^2}\frac{\langle \gamma''(\psi(u))\psi'(u), \gamma'(\psi(u))\rangle}{\|\gamma'(\psi(u))\|} = -\frac{\langle \gamma''(\psi(u)), \gamma'(\psi(u))\rangle}{\|\gamma'(\psi(u))\|^4}. \tag{3.23}$$

Tornando ad α ne calcolo la derivata seconda

$$\alpha''(u) = \gamma''(\psi(u))\psi'(u)^2 + \gamma'(\psi(u))\psi''(u) \tag{3.24}$$

e sostituendo $\psi'(u)$ e $\psi''(u)$ trovati

$$\alpha''(u) = \frac{\gamma''(\psi(u))}{\|\gamma'(\psi(u))\|^2} - \frac{\langle \gamma''(\psi(u)), \gamma'(\psi(u))\rangle}{\|\gamma'(\psi(u))\|^4}\gamma'(\psi(u)). \tag{3.25}$$

Raccogliendo

$$\alpha''(u) = \frac{1}{\|\gamma'(\psi(u))\|^2}\left(\gamma''(\psi(u)) - \langle \gamma''(\psi(u)), \frac{\gamma'(\psi(u))}{\|\gamma'(\psi(u))\|}\rangle \frac{\gamma'(\psi(u))}{\|\gamma'(\psi(u))\|}\right) \tag{3.26}$$

e passando alla norma

$$\|\alpha''(u)\| = \frac{1}{\|\gamma'(\psi(u))\|^2}\|\gamma''(\psi(u)) \wedge \frac{\gamma'(\psi(u))}{\|\gamma'(\psi(u))\|}\| = \frac{\|\gamma''(\psi(u)) \wedge \gamma'(\psi(u))\|}{\|\gamma'(\psi(u))\|^3} \tag{3.27}$$

da cui la tesi. $\square$

Capitolo 4

Quarta Lezione

Definizione 4.1. (Versore Binormale)
Sia γ una curva biregolare. Il versore binormale è definito da

$$b(u) = t(u) \wedge n(u) \tag{4.1}$$

Definizione 4.2. (Triedro di Frenet)
(t, n, b) è una base ortonormale e prende il nome di triedro di Frenet.

Vogliamo ora definire la torsione. Supponiamo γ parametrizzata per lunghezza d'arco e calcoliamo la derivata del versore binormale

$$b' = t' \wedge n + t \wedge n' = (k \cdot n) \wedge n + t \wedge n' = t \wedge n' \tag{4.2}$$

e quindi $b' \perp t$. Inoltre dal momento che b è un versore si ha $b' \perp b$ (derivando l'uguaglianza $\langle b, b \rangle = 1$) e quindi, essendo ortogonale a due vettori della base, b' è un multiplo del terzo vettore e quindi $b' = \tau \cdot n$.

Definizione 4.3. (Torsione)
Sia γ biregolare e PLA. Chiamo torsione $\tau(s)$ la funzione tale che
$b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$.

Lemma 4.0.14. *Sia γ biregolare. Allora $\tau, K \colon I \to \mathbb{R}$ sono di classe $C^\infty(I)$.*

Dimostrazione. Posso supporre γ PLA.
Allora $K = \|\gamma''(s)\|$, e dal momento che $\gamma''(s) \neq 0, \forall s$ e C^∞ è C^∞ anche $\|\gamma''(s)\|$.
Dal momento che t, n, b sono C^∞ lo è anche b' e dunque $\tau = \langle b', n\rangle$ è C^∞. □

Osservazione 8. Dal Lemma 4.0.14 segue che il triedro di Frenet varia in modo C^∞.

Esempio 6. Trovare esempio di curva solo regolare, far vedere che K è definita ma non può essere di classe C^∞.

Lemma 4.0.15. *Si ha che*

1. *Sia γ regolare. Allora il supporto di γ è contenuto in una retta $\iff$ $K = 0$.*

2. *Sia γ biregolare. Allora γ è piana $\iff$ $\tau = 0$.*

Dimostrazione.

1. Banale.

2. ($\Rightarrow$) Ho γ piana e quindi il piano osculatore rimane fisso. Questo vuol dire che il vettore binormale è costante e dunque $0 = b'(s) = \tau(s)n(s)$.Questo vuol dire che $\tau = 0, \forall s$.
($\Leftarrow$) Supponiamo che $\tau \equiv 0$, allora $b(s)$ è costante. Voglio far vedere che anche $f(s) = \langle\gamma(s), b\rangle$ è costante. Derivo $f' = \langle\gamma', b\rangle = \langle t, b\rangle = 0$.

□

Teorema 4.0.16. *(Formule di Frenet)*
Sia γ biregolare e PLA con curvatura K e torsione τ. Allora

$$\begin{cases} t'(s) = K(s)n(s) \\ n'(s) = -K(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases} \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato la prima e la terza equazione. Manca solo la seconda.
Abbiamo (t, n, b) base positiva quindi $n(s) = b(s) \wedge t(s)$. Derivando ho

$$n' = b' \wedge t + b \wedge t' = (\tau(s)n(s)) \wedge t(s) + (K(s)b(s)) \wedge n(s) = -\tau(s)b(s) - K(s)t(s). \tag{4.4}$$

□

Vediamo ora come interpretare il segno della torsione. Si ha infatti che se γ è biregolare e PLA il suo piano osculatore divide $\mathbb{R}^3$ in due semispazi

$$\begin{aligned} H^+(s) &= \{p + \lambda b(s), \lambda > 0, p \in H\} \\ H^-(s) &= \{p + \lambda b(s), \lambda < 0, p \in H\} \end{aligned}. \tag{4.5}$$

Proposizione 4.0.17.
$\tau(s) > 0 \iff$ *γ sta passando da H^+ a H^-.*

Dimostrazione. Si tratta di fare uno sviluppo di Taylor in $s = 0$. Si ha

$$\gamma(u) = \gamma(0) + \gamma'(0)u + \gamma''(0)\frac{u^2}{2} + \gamma'''(0)\frac{u^3}{6} + o(u^3). \tag{4.6}$$

Segue dalle definizioni che $\gamma'(0) = t(0)$, $\gamma''(0) = K(0)n(0)$ e

$$\gamma''' = K'n + Kn' = K'n + K(-Kt - \tau b). \tag{4.7}$$

Valutata γ''' in 0, l'unica cosa che non sta nel piano osculatore ($Span\langle t, n\rangle$) è $-K\tau b$.
Si ha dunque

$$\gamma(u) = (\text{elementi nel piano osculatore}) - \frac{\tau(0)K(0)b(0)}{6}u^3 + o(u^3) \tag{4.8}$$

e, dal momento che $K > 0$, il coefficiente di $b(0)$ nella parte rilevante dello sviluppo ha lo stesso segno di $\tau(0)$ per $u < 0$ e segno opposto per $u > 0$. $\square$

Esercizio 1. Si calcolino curvatura e torsione dell'elica circolare retta

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} R\cos(s) \\ R\sin(s) \\ as \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

<u>Svolgimento</u>
Controllo se la curva è PLA, vedo che $\|\gamma'(s)\| = \sqrt{R^2 + a^2}$ e quindi non è PLA. Riparametrizzo calcolando l' inverso della lunghezza della curva su $[0, u]$ ed ottengo

$$\gamma(s) = \begin{bmatrix} R\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ R\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{as}{\sqrt{R^2+a^2}} \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Quindi dal momento che $t(s) = \gamma'(s)$ ho che

$$t'(s) = \gamma''(s) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{R^2+a^2}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ -\frac{R}{R^2+a^2}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{bmatrix} = K(s)n(s) \tag{4.11}$$

e quindi $K(s) = \frac{R}{R^2+a^2}$ e

$$n(s) = \begin{bmatrix} \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Ora calcolo

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{a}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\sin^2(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) + \frac{R}{\sqrt{R^2+a^2}}\cos^2(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

e quindi

$$b'(s) = \begin{bmatrix} \frac{a}{R^2+a^2}\cos(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ \frac{a}{R^2+a^2}\sin(\frac{s}{\sqrt{R^2+a^2}}) \\ 0 \end{bmatrix} = \tau(s)n(s) \tag{4.14}$$

da cui si deduce che $\tau(s) = -\frac{a}{R^2+a^2}$.

Corollario 4.0.18. *Date due costanti $k_0 \in \mathbb{R}_+$ e $\tau_0 \in \mathbb{R}$ esiste un'elica circolare retta con tali torsione e curvatura.*

Capitolo 5

Quinta Lezione

Chiamiamo $Isom(\mathbb{R}^3)$ il gruppo delle isometrie in $\mathbb{R}^3$.

Prendiamo $f \in Isom(\mathbb{R}^3)$ tale che $f = Ax + b$, con $A \in O(n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 5.1. (Isometrie Positive)

Le isometrie positive sono quelle che preservano l'orientazione.

Osservazione 9. Un'isometria è positiva $\iff \det(A) = 1$.

Definizione 5.2. (Curve Congruenti/Equivalenti)

Siano $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \mathbb{R}$ P.L.A. . Allora esse si dicono congruenti, $\gamma_1 \sim \gamma_2$ se $\exists f \in Isom^+(\mathbb{R}^3)$ tale che $\gamma_1(s) = f(\gamma_2(s))$.

Proposizione 5.0.19.

Siano $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \mathbb{R}$ P.L.A. e biregolari tali che $\gamma_1 \sim \gamma_2$, allora $At_1(s) = t_2(s)$, $An_1(s) = n_2(s)$, $Ab_1(s) = b_2(s)$, $K_1(s) = K_2(s)$ e $\tau_1(s) = \tau_2(s), \forall s$.

Dimostrazione. Vado a mettere in relazione tra di loro i triedri di Frenet conoscendo la relazione che intercorre tra γ_1 e γ_2.

Vedo quanto vale il versore tangente di γ_2

$$t_2(s) = \gamma_2'(s) = (A\gamma_1(s) + b)' = A\gamma_1'(s) = At_1(s). \tag{5.1}$$

Sfruttando il fatto che $t'(s) = K(s)n(s)$ vado a studiare la curvatura e il versore normale

$$K_2(s)n_2(s) = t_2'(s) = (At_1(s))' = At_1'(s) = K_1(s)An_1(s) \tag{5.2}$$

e quindi $K_1(s) = K_2(s)$ e $n_2(s) = An_1(s)$.
Vedo ora come si comporta il vettore binormale utilizzando le relazioni trovate

$$b_2(s) = t_2(s) \wedge n_2(s) = (At_1(s)) \wedge (An_1(s)) = A(t_1(s) \wedge n_1(s)) = Ab_1(s). \tag{5.3}$$

Posso finalmente vedere quanto vale la torsione

$$\tau_2(s)n_2(s) = b_2'(s) = (Ab_1(s))' = Ab_1'(s) = \tau_1(s)An_1(s) = t_1(s)n_2(s) \tag{5.4}$$

Ho trovato quindi che $\tau_1(s) = \tau_2(s), \forall s.$ $\square$

Teorema 5.0.20. *(Teorema Fondamentale delle Curve)*
Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e siano $K\colon I \to \mathbb{R}^+$ e $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, allora esiste una curva $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ parametrizzata per lunghezza d'arco e biregolare con curvatura K e torsione τ. Tale γ è unica a meno di conguenza.
In particolare, due curve sono congruenti se e solo se hanno stessa curvatura e torsione.

Dimostrazione.
Esistenza
Il triedro di Frenet verifica il sistema

$$\begin{cases} \bar{t}'(s) = \bar{K}(s)\bar{n}(s) \\ \bar{n}'(s) = -\bar{K}(s)\bar{t}(s) - \bar{\tau}(s)\bar{b}(s) \\ \bar{b}'(s) = \bar{\tau}(s)\bar{n}(s) \end{cases} . \tag{5.5}$$

Fisso le condizioni iniziali $\bar{t}(s_0) = \bar{t}_0$, $\bar{n}(s_0) = \bar{n}_0$, $\bar{b}(s_0) = \bar{b}_0$ dove $s_0 \in \mathring{I}$ (parte interna di I) e $(\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0)$ è una base ortonormale positiva. Ne fisso una qualsiasi poichè posso sempre applicare una congruenza.
Quello scritto è un sistema lineare del primo ordine normalizzato di 9 equazioni in 9 incognite e dunque ammette un'unica soluzione che è definita su tutto I. La mia candidata curva è

$$\gamma(s) = p_0 + \int_{s_0}^{s} \bar{t}(u)du \tag{5.6}$$

con $p_0 \in \mathbb{R}^3$ fissato a caso.
Per verificare che γ funziona devo mostrare innanzitutto che $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ è una base ortonormale positiva $\forall s \in I$.
Osservo che il sistema può essere scritto anche così

$$\left[\bar{t}' \middle| \bar{n}' \middle| \bar{b}'\right] = \left[\bar{t} \middle| \bar{n} \middle| \bar{b}\right] \begin{bmatrix} 0 & -\bar{K} & 0 \\ \bar{K} & 0 & \bar{\tau} \\ 0 & -\bar{\tau} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.7}$$

Siano $f_{11}(s) = \langle \bar{t}(s), \bar{t}(s) \rangle$, $f_{12}(s) = \langle \bar{t}(s), \bar{n}(s) \rangle$, $f_{13}(s) = \langle \bar{t}(s), \bar{b}(s) \rangle$, $f_{22}(s) = \langle \bar{n}(s), \bar{n}(s) \rangle$, $f_{23}(s) = \langle \bar{n}(s), \bar{b}(s) \rangle$, $f_{33}(s) = \langle \bar{b}(s), \bar{b}(s) \rangle$.
$(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ è ortonormale in ogni istante se e solo se queste funzioni sono costanti (in quanto vanno bene in s_0).
Derivando ottengo un sistema della forma

$$\begin{cases} f_{11}' = F_{11}(f_{ij}) \\ \vdots \\ f_{33}' = F_{33}(f_{ij}) \end{cases} \tag{5.8}$$

di 6 equazioni in 6 incognite con condizione iniziale $f_{ij}(s_0) = \delta_{ij}$. Le funzioni costanti $g_{ij}(s) = \delta_{ij}$ $\forall s \in I$ risolvono questo sistema e dunque per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy si ha che anche $f_{ij}(s) = \delta_{ij}$ $\forall s \in I$ e dunque $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ è base ortonormale per ogni $s \in I$.
Poichè $\det(\bar{t}(s) \big| \bar{n}(s) \big| \bar{b}(s)) = \pm 1, \forall s$ ed è $+1$ in s_0 allora la base è positiva $\forall s \in I$ per continuità.
Siano ora t, n, b, K, τ triedro di Frenet, curvatura e torsione di

$$\gamma(s) = p_0 + \int_{s_0}^{s} \bar{t}(u) du. \tag{5.9}$$

Ho $\gamma'(s) = \bar{t}(s)$ che ora so essere unitario per cui $t(s) = \bar{t}(s)$ e γ PLA. Dunque $K(s)n(s) = t'(s) = \bar{t}'(s) = \bar{K}(s)\bar{n}(s)$ da cui ora so che $\|\bar{n}(s)\| = 1$ e quindi $K(S) = \bar{K}(s)$ e $n(s) = \bar{n}(s)$.
Poichè $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$ è ortonormale positiva ho che

$$\bar{b}(s) = \bar{t}(s) \wedge \bar{n}(s) = t(s) \wedge n(s) = b(s) \tag{5.10}$$

da cui

$$\tau(s)n(s) = b'(s) = \bar{b}'(s) = \bar{\tau}(s)\bar{n}(s) = \bar{\tau}(s)n(s) \tag{5.11}$$

e quindi $\tau(s) = \bar{\tau}(s)$.
<u>Unicità</u>
Siano $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to \mathbb{R}^3$ PLA con uguali curvatura K e torsione τ.
A meno di congruenza posso supporre $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$.
Quindi $t_1(s_0) = t_2(s_0)$, $n_1(s_0) = n_2(s_0)$ e $b_1(s_0) = b_2(s_0)$. Basta ora prendere $A \in SO(3)$ con $At_1(0) = t_2(0)$, $An_1(0) = n_2(0)$ e $Ab_1(0) = b_2(0)$ ed aggiustare $\gamma_1(s_0)$ e $\gamma_2(s_0)$ con una traslazione. A questo punto i triedri di Frenet di γ_1 e di γ_2 verificano lo stesso sistema di equazioni del primo ordine normalizzato con stesse condizioni iniziali e perciò coincidono per ogni tempo.
Dunque $t_1(s) = t_2(s)$ $\forall s$ e poichè $\gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$ ho

$$\gamma_1(s) = \gamma_1(s_0) + \int_{s_0}^{s} t_1(u)du = \gamma_2(s_0) + \int_{s_0}^{s} t_2(u)du = \gamma_2(s). \tag{5.12}$$

□

Corollario 5.0.21.

$\gamma \colon I \to \mathbb{R}^3$ *biregolare PLA è un'elica retta a meno di congruenza*

$$\Updownarrow$$

γ *ha curvatura e torsione entrambi costanti.*

Capitolo 6

Sesta Lezione

Esercizio 2. Calcolare curvatura e torsione di $\gamma\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(s) = \left[\frac{s}{2}\cos(\log\frac{s}{2}), \frac{s}{2}\sin(\log\frac{s}{2}), \frac{\sqrt{2}}{2}s\right]. \tag{6.1}$$

<u>Svolgimento</u>

Innanzitutto verifico se γ è PLA, ovvero se $\|\gamma'(s)\| = 1$. Per farlo calcolo la derivata prima

$$t(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{2}\left[\cos(\log\frac{s}{2}) - \sin(\log\frac{s}{2}), \cos(\log\frac{s}{2}) + \sin(\log\frac{s}{2}), \sqrt{2}\right] \tag{6.2}$$

ed ho che, se per brevità chiamo $\alpha = \log\frac{s}{2}$, allora

$$\|\gamma'(s)\| = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{1} + \underbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}_{1} \cancel{-2\cos(\alpha)\sin(\alpha)} + \cancel{2\cos(\alpha)\sin(\alpha)} + 2} =$$
$$= 1. \tag{6.3}$$

Dunque γ è PLA e posso utilizzare le definizioni per calcolare curvatura e torsione. Trovo $\gamma''(s)$ derivando

$$\gamma''(s) = \frac{1}{2s}\left[-\cos(\log\frac{s}{2}) - \sin(\log\frac{s}{2}), \cos(\log\frac{s}{2}) - \sin(\log\frac{s}{2}), 0\right] \tag{6.4}$$

da cui

$$K(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{\sqrt{2}}{2s}. \tag{6.5}$$

E dunque il versore normale è

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{K(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-\cos(\log\frac{s}{2}) - \sin(\log\frac{s}{2}), \cos(\log\frac{s}{2}) - \sin(\log\frac{s}{2}), 0\right]. \tag{6.6}$$

Di nuovo per brevità chiamo $\alpha = \log\frac{s}{2}$ e $\alpha' = \frac{1}{s}$ e vado a vedere quanto vale il versore binormale al fine di trovarmi la torsione dalla sua derivata prima.

$$b(s) = t(s) \wedge n(s) = \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha) & \frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha) & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos\alpha - \sin\alpha) & \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha - \sin\alpha) & 0 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

e dunque

$$b(s) = \left[\frac{1}{2}(-\cos\alpha + \sin\alpha), \frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha), \frac{1}{\sqrt{2}}\right]. \tag{6.8}$$

Derivando ottengo

$$b'(s) = \left[\frac{1}{2s}(\cos\alpha + \sin\alpha), \frac{1}{2s}(\cos\alpha - \sin\alpha), 0\right] = -\frac{\sqrt{2}}{2s}n(s) = \tau(s)n(s) \tag{6.9}$$

e dunque $\tau(s) = -\frac{\sqrt{2}}{2s}$.

Osservazione 10. In questo caso si ha che $\dfrac{\tau(s)}{K(s)} = -1$ e dunque il rapporto è costante come per le eliche. Curve come queste hanno un nome particolare, si chiamano eliche generalizzate.

Esercizio 3. Dimostrare la seguente

Proposizione 6.0.22. *Sia γ biregolare e PLA. Allora sono fatti equivalenti*

- $\exists v \neq 0, v \in \mathbb{R}^3$ *unitario tale che* $\langle t(s), v\rangle$ *sia costante.*
- $\dfrac{\tau}{K}$ *è costante.*

Svolgimento

Tengo bene a mente le equazioni di Frenet

$$\begin{cases} t'(s) = K(s)n(s) \\ n'(s) = -K(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s) \end{cases} \tag{6.10}$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

Chiamo la costante α e dunque $\langle t(s), v\rangle = \alpha$ derivando ho che
$0 = \langle t'(s), v\rangle = K(s)\langle n(s), v\rangle$ e dunque $\langle n(s), v\rangle = 0$. Derivando $\langle n(s), v\rangle = 0$ ottengo che

$$0 = \langle n'(s), v\rangle = \langle -K(s)t(s) - \tau(s)b(s), v\rangle = -K(s)\langle t(s), v\rangle - \tau(s)\langle b(s), v\rangle \tag{6.11}$$

e dunque $-K(s)\langle t(s), v\rangle = -K(s)\alpha = \tau(s)\langle b(s), v\rangle$. A questo punto la curvatura è sempre non nulla e voglio dividere per $\langle b(s), v\rangle$. Nel caso in cui $\langle b(s), v\rangle = 0$ ho finito perchè necessariamente deve essere anche $\alpha = 0$ e dunque $\dfrac{\tau}{K} = 0$ che è costante. Vado a vedere il caso in cui $\langle b(s), v\rangle \neq 0$.

Dividendo ho

$$\frac{\tau}{K} = -\frac{\alpha}{\langle b(s), v\rangle} \tag{6.12}$$

e dunque devo solo dimostrare che $\langle b(s), v\rangle$ è costante ma derivando ho che

$$\langle b'(s), v\rangle = \tau\langle n(s), v\rangle = 0. \tag{6.13}$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Come abbiamo visto se un tale v esiste allora deve essere tale che

$$\langle n(s), v\rangle = 0 \tag{6.14}$$

e dunque $\langle b(s), v\rangle$ è costante e se $\dfrac{\tau}{K} = \alpha$ allora da

$$\frac{\tau}{K} = -\frac{\langle t(s), v\rangle}{\langle b(s), v\rangle} \tag{6.15}$$

segue immediatamente la tesi.

Esercizio 4. Sia $\gamma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(u) = \left[u^2, u^3, 0\right]. \tag{6.16}$$

Si calcoli

$$\lim_{u\to 0^+} K(u) \tag{6.17}$$

Svolgimento

Dal momento che

$$\gamma'(u) = \left[2u, 3u^2, 0\right] \tag{6.18}$$

ho che γ non è PLA e dunque non posso usare la definizione per trovare la curvatura. Userò invece il valore che abbiamo trovato per la curvatura nel caso generale ovvero

$$K(u) = \frac{\|\gamma'(u) \wedge \gamma''(u)\|}{\|\gamma'(u)\|^3}. \tag{6.19}$$

Essendo

$$\gamma''(u) = \Big[2, 6u, 0\Big] \tag{6.20}$$

ho che

$$K(u) = \frac{\|\gamma'(u) \wedge \gamma''(u)\|}{\|\gamma'(u)\|^3} = \frac{6}{u(4+9u^2)^{\frac{3}{2}}} \to +\infty. \tag{6.21}$$

Esercizio 5. Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ biregolare e PLA e siano $\tau(s) \neq 0, \forall s \in I$

$$R(s) = \frac{1}{K(s)} \text{ e } T(s) = \frac{1}{\tau(s)}. \tag{6.22}$$

Allora $\gamma(I)$ è contenuta in una superficie sferica se e solo se

$$R^2 + (R')^2 T^2 = \text{costante}. \tag{6.23}$$

Svolgimento

$(\Rightarrow)$

Se $\gamma(I)$ è contenuta in una superficie sferica $\exists p \in \mathbb{R}^3, r > 0$ tali che

$$\langle \gamma(s) - p, \gamma(s) - p \rangle = r^2. \tag{6.24}$$

Dunque derivando ottengo

$$2\langle t(s), \gamma(s) - p \rangle = 0, \forall s \in I \tag{6.25}$$

e derivando di nuovo e utilizzando le formule di Frenet ottengo

$$K(s)\langle n(s), \gamma(s) - p\rangle + \underbrace{\langle t(s), t(s)\rangle}_{1} = 0 \tag{6.26}$$

e dunque

$$\langle n(s), \gamma(s) - p\rangle = -\frac{1}{K(s)} = -R(s). \tag{6.27}$$

Se derivo ulteriormente ottengo che

$$-K(s)\cancel{\langle t(s), \gamma(s) - p\rangle} - \tau(s)\langle b(s), \gamma(s) - p\rangle + \cancel{\langle n(s), t(s)\rangle} = -R'(s) \tag{6.28}$$

e dunque

$$R'(s)T(s) = \langle b(s), \gamma(s) - p\rangle. \tag{6.29}$$

Abbiamo quindi che

$$\gamma(s) - p = 0t(s) - R(s)n(s) + R'(s)T(s)b(s) = -R(s)n(s) + R'(s)T(s)b(s) \tag{6.30}$$

e dunque prendendo la norma al quadrato ottengo che

$$\langle \gamma(s) - p, \gamma(s) - p\rangle = r^2 = R^2(s) + (R')^2(s)T^2(s) \tag{6.31}$$

che è costante.

$(\Leftarrow)$

Per i conti già svolti il candidato centro della circonferenza è

$$\psi(s) = \gamma(s) + R(s)n(s) - R'(s)T(s)b(s). \tag{6.32}$$

Dimostro che $\psi(s)$ è costante ovvero che $\psi'(s) = 0$. Derivando ottengo

$$\psi'(s) = \gamma'(s) + R'(s)n(s) + R(s)n'(s) - [(R'(s)T(s))'b(s) + R'(s)T(s)b'(s)] \tag{6.33}$$

che utilizzando le formule di Frenet e semplificando diventa

$$\psi'(s) = -b(s)[\frac{R(s)}{T(s)} + (R'(s)T(s))']. \tag{6.34}$$

Ora sapendo che

$$R^2(s) + (R')^2(s)T^2(s) = \text{costante}. \tag{6.35}$$

derivo ed ottengo

$$2R(s)R'(s) + 2(R'(s)T(s))'R'(s)T(s) = 0 \tag{6.36}$$

e dividendo per $2R'T$

$$\frac{R(s)}{T(s)} + (R'(s)T(s))' = 0 \tag{6.37}$$

e dunque sostituendo in 6.34 ho che

$$\psi(s) = \gamma(s) + R(s)n(s) - R'(s)T(s)b(s) = p \text{ costante} \tag{6.38}$$

da cui

$$\langle\gamma(s) - p, \gamma(s) - p\rangle = R^2(s) + (R')^2(s)T^2(s) = \text{costante per ipotesi}. \tag{6.39}$$

Esercizio 6. Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ biregolare tale che tutte le rette normali a γ si incontrino in un punto. Mostrare che γ è contenuta in una circonferenza.

Svolgimento

Le ipotesi mi dicono che $\exists p \in \mathbb{R}^3$ tale che $\forall s \in I\ \exists a(s) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\gamma(s) + a(s)n(s) = p. \tag{6.40}$$

Derivo e vedo che accade. Avrò

$$0 = t(s) + a'(s)n(s) + a(s)n'(s) \tag{6.41}$$

e utilizzando le formule di Frenet

$$0 = t+a'(s)n(s)+a(s)(-K(s)t(s)-\tau(s)b(s)) = (1-a(s)K(s))t(s)+a'(s)n(s)-a(s)\tau(s)b(s). \tag{6.42}$$

Dal momento che t, n, b sono ortonormali e dunque linearmente indipendenti, se una loro combinazione lineare è nulla, saranno nulli anche i coefficienti e dunque abbiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 1 - a(s)K(s) = 0 \\ a'(s) = 0 \\ a(s)\tau(s) = 0 \end{cases} \tag{6.43}$$

da cui $a(s) \neq 0$ e costante e quindi $\tau(s) \equiv 0$ e $K(s) = \dfrac{1}{a(s)}$ costante.

Abbiamo visto quindi che $\gamma(s)$ ha curvatura costante e torsione nulla e allora per il Teorema 5.0.20 (Fondamentale delle Curve) $\gamma(s)$ è contenuta in una circonferenza.

Capitolo 7

Settima Lezione

Dopo la trattazione delle curve ci prepariamo a parlare delle varietà differenziabili ma, per fare questo, ci servono alcuni richiami sulle funzioni liscie.

Definizione 7.1.
Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq R^m$ aperti e $f \colon U \to V$ si dice C^∞ se ogni sua componente lo è.

Definizione 7.2. (Diffeomorfismo)
Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq R^m$ aperti, $f \colon U \to V$ è un diffeomorfismo se è di classe C^∞, invertibile e con inversa $g \colon V \to U$ anche essa C^∞.

Definizione 7.3. (Differenziale)
$\forall x \in U$ è definito il differenziale $df_x \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ come l'unica funzione lineare tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - df_x(h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{7.1}$$

Definizione 7.4. (Matrice Jacobiana)
Se $f^1, \dots, f^m$ sono le componenti di f, allora

$$df_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

è la matrice Jacobiana di f in x.

Dalla definizione di differenziale segue che, fissato $h \neq 0, h \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(x+th) - f(x) - df_x(th)\|}{\|th\|} = 0 \tag{7.3}$$

e quindi, dal momento che $\|h\|$ è una costante

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|f(x+th) - f(x) - t df_x(h)\|}{|t|} = 0. \tag{7.4}$$

Posso quindi dare la seguente definizione

Definizione 7.5. (Derivata Direzionale)
Chiamo

$$df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \tag{7.5}$$

derivata direzionale di f lungo la direzione h.

Osservazione 11. Se $\gamma\colon (a,b) \to \mathbb{R}^n$ è una curva dato $x_0 \in (a,b)$ allora $\gamma'(x_0) = d\gamma_{x_0}(1)$. Infatti

$$\gamma'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\gamma(x_0 + t) - \gamma(x_0)}{t} = d\gamma_{x_0}(1). \tag{7.6}$$

Proposizione 7.0.23. *(Funtorialità)*
Se $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq R^m, Z \subseteq R^k$ *sono aperti e* $f\colon U \to V, g\colon V \to Z$ *sono liscie, allora*

$$d(g \circ f)_{x_0} = dg_{f(x_0)} \circ df_{x_0}, \forall x_0 \in U. \tag{7.7}$$

In particolare:

- *Se* f *è un diffeomorfismo*

$$\underbrace{d(f^{-1} \circ f)_{x_0}}_{Id \in \mathbb{R}^n} = df^{-1}_{f(x_0)} \circ df_{x_0}, \forall x_0 \in U \tag{7.8}$$

  e

$$\underbrace{d(f \circ f^{-1})_{f(x_0)}}_{Id \in \mathbb{R}^m} = df_{x_0} \circ df^{-1}_{f(x_0)}, \forall x_0 \in U \tag{7.9}$$

  e dunque $m = n$ *dal momento che* df_{x_0} *è un isomorfismo lineare.*

- *Se* $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to U$ *è tale che* $\gamma(0) = x_0$ *e* $\gamma'(0) = v$*, allora*

$$df_{x_0}(v) = (f \circ \gamma)'(0). \tag{7.10}$$

  Infatti

$$(f \circ \gamma)'(0) = d(f \circ \gamma)_0(1) = df_{\gamma_0}(d\gamma_0(1)) = df_{x_0}(\gamma'(0)) = df_{x_0}(v). \tag{7.11}$$

Definizione 7.6. (Classe C^∞ 2)
Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ sottoinsiemi qualsiasi ed $f\colon X \to Y$, allora $f \in C^\infty$ se $\forall x_0 \in X\ \exists U \in \mathbb{R}^m$ aperto, $x_0 \in U$, e $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^∞ tale che $F\big|_{X \cap U} = f\big|_{X \cap U}$.

Osservazione 12. $f\colon X \to Y$ di classe C^∞ è localmente continua, dunque è continua. Dunque f diffeomorfismo $\Rightarrow$ f omeomorfismo.

Definizione 7.7. (Cono Tangente)
Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sottoinsieme qualsiasi e $p \in X$.
Il cono tangente $C_p(X)$ è l'insieme di tutte le possibili velocità iniziali che partono da p, in simboli

$$C_p(X) = \{v \in \mathbb{R}^m \text{ tali che } \exists \gamma\colon [0,\epsilon) \to X, \gamma \in C^\infty, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = v\}. \tag{7.12}$$

Definizione 7.8. (Spazio Tangente)
Lo spazio tangente a X in p è $T_p(X) = Span(C_p(X))$.

Esempio 7. Se X è un aperto di $\mathbb{R}^n$ allora $C_p(X) = T_p(X) = \mathbb{R}^n$. Infatti $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,\epsilon) &\to \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto p + tv \end{aligned} \tag{7.13}$$

ha supporto in X se ϵ è piccolo.

Esempio 8. Sia

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0\} \tag{7.14}$$

e sia

$$\partial H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n = 0\}, \tag{7.15}$$

allora $\forall p \in \partial H^n$ si ha che $C_p(H^n) = H^n$ e $T_p(H^n) = \mathbb{R}^n$.
Infatti se $a \in C_p(H^n)$, allora $\exists \gamma\colon [0,\epsilon) \to H^n$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = a$. Ma adesso $p \in \partial H^n$ e dunque $x_n(\gamma(0)) = 0$. Ora si ha che, poichè sono in H^n, $x_n(\gamma(t)) \geq 0$ e quindi $x_n(\gamma'(0)) \geq 0$ da cui $C_p(H^n) \subseteq H^n$ se $p \in \partial H^n$.
Viceversa, se $v \in H^n$, $\gamma(t) = p + tv$ ha supporto in H^n e $\gamma'(0) = v$ e quindi

$v \in C_p(H^n)$.

Infine $T_p(H^n) = \mathbb{R}^n$ poichè lo *Span* di tutto un semispazio è tutto lo spazio.

Proposizione 7.0.24. *Sia $f\colon X \to Y$ di classe C^∞ tra sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente e sia $p \in X$. Allora se $\gamma\colon [0, \epsilon) \to X$ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ si ha*

$$\begin{aligned} df_p\colon C_p(X) &\to C_{f(p)}(Y) \\ v &\mapsto (f \circ \gamma)'(0) \end{aligned} \tag{7.16}$$

ovvero $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0)$.

Osservazione 13. Se $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ è un'estensione C^∞ di f intorno a p allora vale $df_p(v) = dF_p(v)$. In particolare $df_p(v)$ non dipende dalla scelta di γ, $dF_p(v)$ non dipende dalla scelta di F e df_p si estende in maniera unica ad una mappa lineare

$$df_p\colon T_p(X) \to T_{f(p)}(Y). \tag{7.17}$$

Fare attenzione al fatto che $dF_p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ può dipendere dalla scelta di F, ciò che è governato da f è la restrizione $dF_p\big|_{C_p(X)}$.

Osservazione 14. (Funtorialità)

Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ allora

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p, \forall p \in X \tag{7.18}$$

e, se $f\colon X \to X$ è l'identità allora $df_p = Id, \forall p \in X$.

Entrambi i fatti seguono banalmente dalla definizione.

Corollario 7.0.25. *Se $f\colon X \to Y$ è un diffeomorfismo allora $\forall p \in X$ il differenziale df_p è una bigezione tra $C_p(X)$ e $C_{f(p)}(Y)$ e un isomorfismo lineare tra $T_p(X)$ e $T_{f(p)}(Y)$.*

Definizione 7.9. (Varietà)

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ è una varietà di dimensione k se è localmente diffeomorfa a $\mathbb{R}^k$, cioè se esistono aperti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ e $U \subseteq X$, tale che $\forall p \in X$ $p \in U$, tali che esista un certo diffeomorfismo $\phi \colon U \to \Omega$.

Chiameremo ϕ carta locale e ϕ^{-1} parametrizzazione locale.

Definizione 7.10. (Atlante)

Un atlante per X è un insieme di carte i cui domini ricoprono X.

Esempio 9.

$S^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tale che } \|v\| = 1\}$ è una n-varietà ($n = \dim(S^n)$).

Sia $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in S^n$, sia almeno un $p_i \neq 0$ con $\epsilon = \pm 1$ il segno di p_i e pongo

$$U = \{x \in S^n \text{ con segno di } x_i = \epsilon\} = S^n \cap \{x_i > 0\} \text{ oppure } S^n \cap \{x_i < 0\}. \tag{7.19}$$

U è aperto per definizione quindi pongo

$$\Omega = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tale che } \|x\| < 1\} \tag{7.20}$$

e

$$\begin{aligned} \phi \colon U &\to \Omega \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \end{aligned} \tag{7.21}$$

dove con $\hat{x}_i$ indico la mancanza di x_i. L'inversa di ϕ è

$$\begin{aligned} \phi^{-1} \colon \Omega &\to U \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, \epsilon\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned} . \tag{7.22}$$

Se $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n$ e $x_i \neq 0$ allora $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$
e quindi $x_1^2 + \dots + \hat{x}_i^2 + \dots + x_n^2 < 1$. Dunque $\phi(U) \subseteq \Omega$.
Devo esprimere ϕ come la restrizione di una mappa C^∞ ma ϕ è proprio la restrizione della proiezione sull'i-esimo piano coordinato che è C^∞ e dunque anche ϕ è C^∞.
Si vede facilmente allo stesso modo che $\phi^{-1}(\Omega) \subseteq U$ e che ϕ^{-1} è C^∞.

Lemma 7.0.26.
Sia X varietà, allora $\forall p \in X$ si ha

$$C_p(X) = T_p(X) = \mathrm{Im}(d\phi_0) \tag{7.23}$$

dove $\phi\colon \Omega \to U$ (con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ e $U \subseteq X$) è una parametrizzazione locale con $\phi(0) = p$. In particolare $\dim(T_p(X)) = \dim(X)$.

Dimostrazione.
Fisso ϕ come sopra. So che $C_0(\Omega) = T_0(\Omega) = \mathbb{R}^k$ con $k = \dim(X)$.
Inoltre ϕ è un diffeomorfismo e dunque $d\phi_0$ stabilisce una bigezione tra $C_0(\Omega)$ e $C_p(U)$ e un isomorfismo lineare tra $T_0(\Omega)$ e $T_p(U)$ per cui $C_p(U) = T_p(U)$ e $\dim(T_p(U)) = k = \dim(X)$.
Si conclude poichè $C_p(U) = C_p(X)$ e $T_p(U) = T_p(X)$. $\square$

Capitolo 8

Ottava Lezione

Teorema 8.0.27. *(Invertibilità Locale)*
Sia $f\colon U \to V$ *di classe* C^∞ *tra aperti di* $\mathbb{R}^n$ *,* $p \in U$ *e sia* df_p *invertibile. Allora* $\exists U' \subseteq U$ *aperto,* $p \in U'$*, tale che* $f(U') = V'$ *è aperto in* $\mathbb{R}^n$ *e* $f\colon U' \to V'$ *è un diffeomorfismo.*

Corollario 8.0.28. *Sia* $f\colon M \to N$ *di classe* C^∞ *tra varietà e sia* $p \in M$*. Se* df_p *è un isomorfismo, allora* $\exists U$ *intorno aperto in* M *di* p *tale che* $f(U)$ *è aperto in* N *e* $f_{|_U}\colon U \to V$ *è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione. Siano $A \ni p$ e $B \ni f(p)$ aperti in M e N rispettivamente su cui siano definite le carte $\phi\colon A \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi\colon B \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$. Si ha infatti che $\dim(M) = \dim(N)$ perchè df_p è un isomorfismo.
A meno di restringere A sostituendolo con $A \cap f^{-1}(B)$, la composizione

$$g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}\colon \Omega_1 \to \Omega_2 \tag{8.1}$$

è ben definita e C^∞.
Dunque $dg_{\phi(p)} = d\psi_{f(p)} \circ df_p \circ d\phi^{-1}_{\phi(p)}$ è composizione di isomorfismi e perciò è un isomorfismo. Sono nelle ipotesi del Teorema 8.0.27 e dunque $\exists \Omega_1' \subseteq \Omega_1$

intorno aperto di $\phi(p)$ tale che $g_{|\Omega_1'}$ è un diffeomorfismo su $\Omega_2' \subseteq \Omega_2$.
Pongo $U = \phi^{-1}(\Omega_1')$ e $V = \psi^{-1}(\Omega_2')$, allora $f_{|U} = \psi^{-1}_{|\Omega_2'} \circ g_{|\Omega_1'} \circ \phi_{|U}$ è composizione di diffeomorfismi e U e V sono aperti di M e N rispettivamente. □

Definizione 8.1. (Immersione)
$f\colon M \to N$ tra varietà è un'immersione se df_p è iniettivo $\forall p$.

Osservazione 15.
Attenzione f può anche non essere iniettiva.

Esercizio 7. Dimostrare che $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è un'immersione $\iff$ è una curva regolare.

Teorema 8.0.29. *(Forma Normale delle Immersioni)*
Sia $f\colon M \to N$ tra varietà ed f immersione, allora $\forall p \in M$ esistono $U \ni p$ e $V \ni f(p)$ aperti di M e N rispettivamente ed esistono $\phi\colon U \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\psi\colon V \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ carte tali che $f(U) \subseteq V$ e

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \tag{8.2}$$

$\forall (x_1, \dots, x_k) \in \Omega_1$.

Dimostrazione.
Scelgo una carta $\phi\colon U \to \Omega_1$ intorno a p e una carta $\eta\colon V \to \Omega_2$ intorno a $f(p)$ con $f(U) \subseteq V$. Come prima considero $g\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ con $g = \eta \circ f \circ \phi^{-1}$ ed esattamente come prima ho che

$$dg_{\phi(p)} = d\eta_{f(p)} \circ df_p \circ d\phi^{-1}_{\phi(p)} \tag{8.3}$$

è iniettiva.
Ora faremo una composizione con un opportuno diffeomorfismo tra aperti di

$\mathbb{R}^n$ per ottenere la tesi.

Abbiamo che df_p è iniettivo e quindi $k \leq n$. Se pongo $h = n - k$ e definisco

$$G \colon \Omega_1 \times \mathbb{R}^h \to \mathbb{R}^n \tag{8.4}$$

nel modo seguente:

fisso un complementare H di $dg_{\phi(p)}(\mathbb{R}^k)$ in $\mathbb{R}^n$ e chiamo $v_1, \dots, v_h$ una sua base e pongo

$$G(x, t_1, \dots, t_h) = g(x) + t_1 v_1 + \cdots + t_h v_h. \tag{8.5}$$

Ci si aspetta che sia un diffeomorfismo locale, mostro che

$$dG_{(\phi(p),0)} \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{8.6}$$

è invertibile. Per motivi dimensionali basta vedere che è suriettivo.

Ma se pongo $i \colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ allora $g = G \circ i$ sui domini opportuni e dunque

$$dg_{\phi(p)} = dG_{(\phi(p),0)} \circ di_{\phi(p)} \tag{8.7}$$

che implica

$$dg_{\phi(p)}(\mathbb{R}^h) \subseteq dG_{(\phi(p),0)}(\mathbb{R}^n). \tag{8.8}$$

Inoltre se $\gamma_i(t) = (\phi(p), 0, \dots, \underbrace{t}_{\text{i-esimo su h}}, \dots, 0)$ allora

$$G(\gamma_i(t)) = g(\phi(p)) + tv_i \tag{8.9}$$

la cui derivata in 0 è v_i. Dunque $dG_{(\phi(p),0)}(\mathbb{R}^n)$ contiene v_i per ogni i e quindi contiene H.

Perciò $dG_{(\phi(p),0)}(\mathbb{R}^n)$ è tutto $\mathbb{R}^n$ in quanto $H \oplus dg_{\phi(p)}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^n$.
Dunque a meno di restringere Ω_1 e Ω_2 posso supporre che

$$G_{|\Omega_1 \times Z} \colon \Omega_1 \times Z \to \Omega_2 \tag{8.10}$$

sia un diffeomorfismo dove Z è un intorno aperto di $0 \in \mathbb{R}^h$.
Ottengo la tesi ponendo $\psi = G^{-1} \circ \eta$ e per costruzione ho che

$$G^{-1}(g(x)) = (x, 0, \dots, 0) \tag{8.11}$$

e dunque ho concluso poichè

$$\underbrace{G^{-1} \circ \eta}_{\psi} \circ f \circ \phi^{-1}(x) = (x, 0, \dots, 0). \tag{8.12}$$

□

Osservazione 16.
Sia $H \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio affine di dimensione k, allora H è una k-varietà. Infatti un qualsiasi isomorfismo affine $\mathbb{R}^k \to H$ ne è una parametrizzazione globale.

Osservazione 17.
Se $M \subseteq \mathbb{R}^m$ e $N \subseteq \mathbb{R}^n$ sono varietà, allora $M \times N \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+m}$ è una varietà e $\dim(M \times N) = \dim(M) + \dim(N)$.

Teorema 8.0.30. *(Forma Normale delle Sommersioni)*
Sia $f \colon M \to N$ tra varietà con $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$ rispettivamente e sia $df_p \colon T_p(M) \to T_p(N)$ suriettivo con $p \in M$, allora esistono carte $\phi \colon U \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\psi \colon V \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ con $p \in U$ e $f(p) \in V$ tali che

$f(U) \subseteq V$ e

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}_{|\Omega_1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n) \tag{8.13}$$

con $n \leq m$.

Osservazione 18. Più semplicemente significa che posso scegliere coordinate in cui f intorno a p appaia come una proiezione.

Dimostrazione. Scelgo ϕ e ψ arbitrariamente, e pongo $g \colon \Omega_1 \to \Omega_2$ dove $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Ho che df_p è suriettivo e questo implica che anche $dg_{\phi(p)}$ sia suriettivo. Voglio creare un diffeomorfismo quindi devo aggiungere uno spazio trasverso poichè in arrivo ho una dimensione troppo bassa.
Sia $K = Ker(dg_{\phi(p)})$ allora $\dim(K) = k = m - n$ e sia $\pi \colon \Omega_1 \to K$ la proiezione ortogonale su K. Non è restrittivo supporre che $\phi(p) = 0 \in \Omega_1$.
Pongo

$$\begin{aligned} G \colon \Omega_1 &\to \Omega_2 \times K \\ x &\mapsto (g(x), \pi(x)) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Voglio mostrare che dG_0 è un isomorfismo. Per motivi dimensionali basta vedere che è iniettivo dal momento che per costruzione ho già la suriettività.
Vediamo che $\forall v \in \mathbb{R}^m = T_0(\Omega_1)$ si ha

$$dG_0(v) = (dg_0(v), d\pi_0(v)) = (dg_0(v), \pi_0(v)) \tag{8.15}$$

dal momento che π è lineare e dunque $d\pi_0(v) = \pi_0(v)$. Per cui se $dG_0(v) = 0$ allora $dg_0(v) = 0$ cioè $v \in K$. Ma $v \in K$ implica che $\pi(v) = v$ e dunque da $\pi(v) = 0$ ottengo $v = 0$ e perciò dG_0 è iniettivo.
Quindi a meno di restringere Ω_1 e Ω_2 e di scegliere un intorno Z di 0 in K ho che $G \colon \Omega_1 \to \Omega_2 \times Z$ è un diffeomorfismo.

Sostituendo ϕ con $G \circ \phi$ ho finito, infatti ottengo

$$\psi \circ f \circ (G \circ \phi)^{-1} = \psi \circ f \circ \phi^{-1} \circ G^{-1} = g \circ G^{-1} \tag{8.16}$$

con $G = (g(x), \pi(x))$ da cui $x = G^{-1}(g(x), \pi(x))$ e dunque $g(G^{-1}(y, z)) = y$, $\forall (y, z) \in \Omega_2 \to Z$. $\square$

Definizione 8.2. (Punto Critico e Punto Regolare)
Sia $f \colon M \to N$ tra varietà allora $p \in M$ si dice punto critico se $df(p)$ non è suriettivo e si dice punto regolare altrimenti.

Definizione 8.3. (Valore Critico e Valore Regolare)
Sia $f \colon M \to N$ tra varietà allora $q \in N$ si dice valore critico se è immagine di un punto critico e si dice valore regolare altrimenti.

Capitolo 9

Nona Lezione

Prima di addentrarci in alcuni importanti esercizi dimostriamo un utile risultato per la costruzione delle varietà.

Teorema 9.0.31.
Sia $f\colon M \to N$ tra varietà con $\dim(M) = m$ e $\dim(N) = n$ rispettivamente e sia $q \in N$ un valore regolare per f.
Se $V = f^{-1}(q)$ allora V è una $(m-n)$-varietà e $T_p(V) = Ker(df_p), \forall p \in V$.

Dimostrazione.
Dimostro prima di tutto che V è una $(m-n)$-varietà.
Per ogni $p \in V$ devo trovare una carta intorno a p per V, cioè un intorno di p in V diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$. Per definizione di valore regolare df_p è suriettivo e dunque, per il Teorema 8.0.30 (Forma Normale delle Sommersioni), sappiamo che esistono $U \ni p$ aperto in M e $Z \ni f(p)$ aperto in N tali che $f(U) \subseteq Z$ e carte $\phi\colon U \to \Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ e $\psi\colon V \to \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ diffeomorfismi su aperti tali che

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}|_{\Omega_1}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n). \tag{9.1}$$

A meno di comporre ψ con traslazioni posso supporre $\psi(q) = 0$. Voglio studiare la preimmagine di q, so bene quale è in Ω_1 ma la cerco in U.
Ora $U \cap V = f^{-1}(q) \cap U = (\psi \circ f)^{-1}(0) \cap U$ e quindi ϕ stabilisce un diffeomorfismo tra l'insieme $U \cap V$ e $\phi(U \cap V) = \phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0)$, in particolare ogni restrizione di ϕ è un diffeomorfismo. La forma di $\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}$ mi dice che

$$\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1}(0) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega_1 \text{ tali che } x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\} = \Omega_1 \cap H \tag{9.2}$$

dove H è un sottospazio vettoriale di dimensione $m - n$.
Questo conclude la dimostrazione perchè ho trovato $U \cap V$, che è aperto in V e che contiene p, che è diffeomorfo ad un aperto di un sottospazio vettoriale di dimensione $m - n$ e dunque V è una $(m - n)$-varietà.
Dimostro ora che $T_p(V) = Ker(df_p), \forall p \in V$.
Per motivi dimensionali ho che $Ker(df_p)$ ha dimensione $m - n$ per ogni $p \in V$ dal momento che df_p è una mappa suriettiva.
Basta quindi far vedere che $T_p(V) \subseteq Ker(df_p), \forall p \in V$.
Usando la definizione di spazio tangente ho che, se $v \in T_p(V)$, allora $\exists \gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to V$ tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ e $df_p(v) = (f \circ \gamma)'(0) = 0$ in quanto $f(\gamma(t)) = q, \forall t$. Quindi tutti i vettori tangenti vengono portati in 0 e dunque il tangente è contenuto nel nucleo. $\square$

Esercizio 8.
Dimostrare che $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tali che } \|x\| = 1\}$ è una n-varietà e che $T_p(S^n) = p^\perp, \forall p \in S^n$.
Svolgimento
Si tratta essenzialmente di utilizzare il Teorema 9.0.31. Sia $f \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ quindi $S^n = f^{-1}(1)$. Voglio far vedere che 1 è un

valore regolare per f cioè che $\forall p \in S^n$ df_p è suriettivo o, equivalentemente, non nullo (in quanto $\dim(\mathbb{R}) = 1$).

Semplicemente

$$df_p(v) = (\langle p + tv, p + tv\rangle)'|_{t=0} = 2\langle p, v\rangle \tag{9.3}$$

che è non nullo in quanto $df_p(p) = 2 \neq 0$.

Infine

$$v \in Ker(df_p) \iff \langle p, v\rangle = 0 \iff v \in p^\perp \tag{9.4}$$

e quindi $T_p(S^n) = p^\perp$.

Esercizio 9. Dimostrare che $M = \{x \in \mathbb{R}^5 \text{ tali che } x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_4^2-x_5^2 = 1\}$ è una 4-varietà diffeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times S^2$.

Svolgimento

Sia $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$.

Come prima $M = f^{-1}(1)$. Voglio quindi far vedere che 1 è un valore regolare, cioè che, $\forall p \in M$, df_p è suriettivo o, equivalentemente, non nullo.

Calcolo allora il differenziale notando che f è una forma bilineare non definita positiva e dunque posto $\gamma(t) = p + tv$ ho che

$$f(\gamma(t)) = b(\gamma(t), \gamma(t)) \tag{9.5}$$

dove b è il prodotto scalare standard di segnatura $(3, 2)$. Dunque

$$(f \circ \gamma)'(0) = 2b(\gamma'(0), \gamma(0)) = 2b(v, p). \tag{9.6}$$

Siccome b è non degenere, $\forall p \neq 0$ (va bene poichè $0 \notin M$), $\exists v$ tale che $b(p, v) \neq 0$ e dunque $df_p \neq 0$.

Per quanto si è appena visto M è una 4-varietà.

Dimostro ora che M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times S^2$.
L'equazione di M è anche $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 + x_4^2 + x_5^2$ e scelgo liberamente $(x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2$. Se vedo il raggio della sfera S^2 come $\sqrt{1 + x_4^2 + x_5^2} = r$ posso scegliere sempre (x_4, x_5) per i quali $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ è verificata.
Sia quindi

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 \times S^2 &\to M \\ ((u_1, u_2), p) &\mapsto (p\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}, u_1, u_2) \end{aligned} \tag{9.7}$$

e controllo che sia ben posta, ovvero che $g(\mathbb{R}^2 \times S^2) \subseteq M$. Ciò equivale a verificare che $\|p\sqrt{1 + u_1^2 + u_2^2}\|^2 = 1 + u_1^2 + u_2^2$ e questo è vero perchè se $p \in S^2$ allora $\|p\|^2 = 1$.
Dimostro ora che g è un diffeomorfismo.
Agisco esplicitamente costruendo l'inversa

$$\begin{aligned} &h\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times S^2 \\ &(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_4, x_5, \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}, \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}) \end{aligned} \tag{9.8}$$

che non da problemi dal momento che $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \neq 0$ su M. Vediamo che g è banalmente C^∞ e che anche h è C^∞. Inoltre h è veramente l'inversa di g dal momento che $g \circ h = Id_M$ e $h \circ g = Id_{\mathbb{R}^2 \times S^2}$.

Premettiamo al prossimo esercizio un' importante definizione.

Definizione 9.1. (Gruppo di Lie)
Un gruppo di Lie è una varietà G dotata della struttura di gruppo tale che

la moltiplicazione

$$\begin{aligned} \mu\colon G \times G &\to G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 g_2 \end{aligned} \tag{9.9}$$

e la sua inversa g^{-1} siano entrambe C^∞.

Osservazione 19. $\forall g \in G$ gruppo di Lie, le mappe

$$\begin{aligned} L_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto gh \end{aligned} \tag{9.10}$$

e

$$\begin{aligned} R_g\colon G &\to G \\ h &\mapsto hg \end{aligned} \tag{9.11}$$

dette rispettivamente moltiplicazione sinistra e moltiplicazione destra sono diffeomorfismi.
Verifichiamolo per la moltiplicazione sinistra. Si ha

$$L_g(h) = \mu(g, h) \tag{9.12}$$

perciò $L_g = \mu \circ i_g$ dove

$$\begin{aligned} i_g\colon G &\to G \times G \\ h &\mapsto (g, h) \end{aligned} \tag{9.13}$$

è l'inclusione.
Essendo composizione di funzioni di classe C^∞, L_g è di classe C^∞. Inoltre L_g è invertibile con inversa C^∞ e dunque è un diffeomorfismo.

Esercizio 10.
Dimostrare che $GL(n) = \{A \subset M(n, n, \mathbb{R})$ tali che $\det(A) \neq 0\}$ è un gruppo di Lie di dimensione n^2.

Svolgimento

Notiamo subito che

$$GL(n) = M(n, n, \mathbb{R}) \setminus \{A \subset M(n, n, \mathbb{R}) \text{ tali che } \det(A) = 0\}. \tag{9.14}$$

Dunque dato che il determinante è una funzione polinomiale nelle entrate della matrice allora è una funzione continua e quindi

$$\{A \subset M(n, n, \mathbb{R}) \text{ tali che } \det(A) = 0\} \tag{9.15}$$

è un chiuso.

Ricordando che $M(n, n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ concludiamo che $GL(n)$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$ ed è perciò una n^2-varietà. Per verificare che sia un gruppo di Lie, vediamo inoltre che:

- La moltiplicazione $A \cdot B$ è polinomiale nelle entrate di A e B e dunque è C^∞.
- Tramite la formula di Cramer, $A \mapsto A^{-1}$ è una funzione razionale nelle entrate di A con denominatore mai nullo e dunque è anche essa C^∞.

Esercizio 11. Dimostrare che $\mathcal{O}(n) = \{A \in GL(n)$ tali che $A^{\mathrm{T}}A = Id\}$ è un gruppo di Lie di dimensione $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Svolgimento

Poichè abbiamo già visto che $GL(n)$ è un gruppo di Lie basta verificare che $\mathcal{O}(n)$ sia una $\dfrac{n(n-1)}{2}$-varietà.

Sia

$$\begin{aligned} f\colon M(n,n,\mathbb{R}) &\to S(n) \\ A &\longmapsto A^{\mathrm{T}}A \end{aligned} \tag{9.16}$$

tra le varietà $M(n,n,\mathbb{R})$ e $S(n)$. Infatti, dal momento che i sottospazi vettoriali di dimensione k sono varietà diffeomorfe a $\mathbb{R}^k$, allora anche $S(n)$ è una varietà.

Vogliamo far vedere che $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(Id)$ è una varietà utilizzando il Teorema 9.0.31, basta quindi mostrare che Id è un valore regolare per f. In questo modo avremo che $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(Id)$ sarà una varietà con dimensione data da

$$n^2 - \dim(S(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{9.17}$$

Mostrare che Id è un valore regolare per f per definizione equivale a controllare che

$$df_A\colon T_A(GL(n)) \to T_{Id}(S(n)) \tag{9.18}$$

sia suriettivo $\forall A \in \mathcal{O}(n) = f^{-1}(Id)$.

Dal momento che $T_A(GL(n)) = M(n,n,\mathbb{R})$ e $T_{Id}(S(n)) = S(n)$ posso riscrivere

$$df_A\colon M(n,n,\mathbb{R}) \to S(n). \tag{9.19}$$

Quindi data $M \in M(n,n,\mathbb{R})$ ho

$$f(A+tM) = (A+tM)^{\mathrm{T}}(A+tM) = A^{\mathrm{T}}A + t(A^{\mathrm{T}}M + M^{\mathrm{T}}A) + t^2M^{\mathrm{T}}M. \tag{9.20}$$

Derivando in t e calcolando per $t = 0$, ottengo $df_A(M) = A^{\mathrm{T}}M + M^{\mathrm{T}}A$ che per come è definita df_A deve essere simmetrica. Quindi esisterà una $N \in S(n)$

tale che $A^{\mathrm{T}}M + M^{\mathrm{T}}A = N$. Se pongo $M = \dfrac{AN}{2}$ ho finito poichè si ha

$$df_A(M) = A^{\mathrm{T}}\left(\frac{AN}{2}\right) + \left(\frac{N^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}}{2}\right)A = \frac{N}{2} + \frac{N^{\mathrm{T}}}{2} = N \tag{9.21}$$

e quindi df_A è suriettivo.

Capitolo 10

Decima Lezione

Teorema 10.0.32.

$GL(n)$ si retrae per deformazione forte su $\mathcal{O}(n)$. Inoltre $\mathcal{O}(n)$ ha esattamente due componenti connesse, ovvero $SO(n)$ e $\mathcal{O}(n) \setminus SO(n)$.
Dunque anche $GL(n)$ ha esattamente due componenti connesse, ovvero

$$GL^+(n) = \{A \in GL(n) \text{ tali che } \det(A) > 0\} \tag{10.1}$$

e

$$GL^-(n) = \{A \in GL(n) \text{ tali che } \det(A) < 0\}. \tag{10.2}$$

Dimostrazione.
Dimostriamo che $GL(n)$ si retrae per deformazione forte su $\mathcal{O}(n)$.
Cerco $F\colon [0, m] \times GL(n) \to GL(n)$ tale che

- $F(0, A) = A, \forall A \in GL(n)$
- $F(t, A) = A, \forall A \in \mathcal{O}(n), \forall t \in [0, m]$
- $F(m, A) \in \mathcal{O}(n), \forall A \in GL(n)$.

Costruiamo la nostra F utilizzando Gram-Schmidt.

Data $A = (v_1|\cdots|v_n) \in GL(n)$, normalizzo v_1 tra 0 e 1 con

$$t \mapsto v_1 \left((1-t) + \frac{t}{\|v_1\|}\right) \neq 0 \tag{10.3}$$

e lascio $v_2, \ldots, v_n$ fissi.

Tra 1 e 2 ortogonalizzo $v_2, \ldots, v_n$ rispetto a $v_1(1) = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, dove penso $v_1, \ldots, v_n$ come funzioni di t.

Traslando il parametro tra 0 e 1 ho

$$v_i(t) = v_i - t\frac{\langle v_i, v_1\rangle}{\|v_1\|}v_1. \tag{10.4}$$

Itero il procedimento per il resto dei v_i. Si vede che le funzioni sono tutte continue, infatti la deformazione è continua.

Così facendo, la funzione ottenuta verifica le nostre richieste, dal momento che ad ogni istante i $v_i(t)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$.

Dimostriamo ora che $SO(n)$ è connesso per archi.

Infatti $\forall A \in SO(n), \exists B \in \mathcal{O}(n)$ tale che $BAB^{-1} = N$ forma normale di A come isometria

$$N = BAB^{-1} \begin{bmatrix} Id & & 0 \\ & -Id & \\ 0 & & rot(\theta) \end{bmatrix} \tag{10.5}$$

dove $rot(\theta)$ è la matrice di rotazione.

Dato che $\det(N) = 1$ allora necessariamente il blocco $-Id$ ha dimensione pari. Dal momento che $rot(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ posso pensare N come

$$N = \begin{bmatrix} Id & & & 0 \\ & rot(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & rot(\theta_n) \end{bmatrix}. \tag{10.6}$$

Sia

$$\gamma(t) = B^{-1} \begin{bmatrix} Id & & & 0 \\ & rot(t\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & rot(t\theta_n) \end{bmatrix} B \tag{10.7}$$

con $t \in [0, 1]$. Per costruzione γ è C^∞, $\gamma(0) = Id$, $\gamma(1) = A$ e $\gamma(t) \in \mathcal{O}(n), \forall t$. Poichè $\det \gamma(t)$ è continuo in t ciò assicura che $\gamma(t) \in SO(n)$.
Abbiamo appena fatto vedere che $\forall A \in SO(n)$, A è collegato con un arco a Id, questo vuol dire che $SO(n)$ è connesso per archi.
Rimane da dimostrare che $\mathcal{O}(n)$ e $GL(n)$ hanno ciascuno due componenti connesse.
Per quanto riguarda $\mathcal{O}(n)$, considero $B \in \mathcal{O}(n) \setminus SO(n)$ e $\det(B) = -1$. Se prendo la moltiplicazione sinistra

$$L_B \colon \mathcal{O}(n) \to \mathcal{O}(n) \tag{10.8}$$

allora ho che $L_B(SO(n)) = \mathcal{O}(n) \setminus SO(n)$ è connesso dal momento che $SO(n)$ è connesso e L_B porta connessi in connessi. Dunque $\mathcal{O}(n)$ ha al massimo due componenti connesse, ma ne ha esattamente due poichè $\det(\mathcal{O}(n)) \mapsto \{\pm 1\}$ è continuo e suriettivo.

Infine $GL^+(n)$ è connesso, infatti date $A, B \in GL^+(n)$ uso la retrazione per deformazione

$$F\colon GL(n) \times [0,1] \to GL(n) \tag{10.9}$$

per connettere A e B a $SO(n)$ tramite $\gamma_A(t) = F(A,t)$ e $\gamma_B(t) = F(B,t)$. Infatti $\gamma_A(1), \gamma_B(1) \in \mathcal{O}(n)$ e dunque appartengono a $SO(n)$ perchè $\det(\gamma_A(t))$ e $\det(\gamma_B(t))$ non possono cambiare segno. So che $SO(n)$ è connesso per archi dunque connetto $\gamma_A(1)$ e $\gamma_B(1)$ tramite

$$\gamma\colon [0,1] \to SO(n) \tag{10.10}$$

e $\gamma_A \circ \gamma \circ \gamma_B^{-1}$ connette A e B in $GL^+(n)$ il quale perciò è connesso. □

Osservazione 20. Spazi omotopicamente equivalenti hanno lo stesso numero di componenti connesse per archi.

Osservazione 21. Le varietà sono localmente connesse per archi e dunque per le varietà essere connesse equivale ad essere connesse per archi.

Proposizione 10.0.33. *Sia $f\colon G \to H$ un omomorfismo C^∞ tra gruppi di Lie. Allora $rk(df_p)$ (rango di df_p) è costante $\forall p \in G$. Inoltre se*

$$df_{\mathbb{1}_G}\colon T_{\mathbb{1}_G}(G) \to T_{\mathbb{1}_H}(H) \tag{10.11}$$

è suriettivo allora tutti i punti di H sono valori regolari e, se iniettivo, f è un'immersione.

Dimostrazione. Si ha che $\forall g \in G$

$$f(L_g(x)) = f(gx) = f(g)f(x) = L_{f(g)}(f(x)) \tag{10.12}$$

e dunque

$$f \circ L_g = L_{f(g)} \circ f \tag{10.13}$$

come funzione di g. Quindi

$$df_g \circ (dL_g)_{\mathbb{1}} = (dL_{f(g)})_{\mathbb{1}} \circ df_{\mathbb{1}}. \tag{10.14}$$

Ora L_g e $L_{f(g)}$ sono diffeomorfi per cui i loro differenziali sono isomorfismi e dunque

$$df_g = (dL_{f(g)})_{\mathbb{1}} \circ df_{\mathbb{1}} \circ (dL_g)_{\mathbb{1}}^{-1} \tag{10.15}$$

e $rk(df_g) = rk(df_{\mathbb{1}})$. □

Esercizio 12. Dimostrare che $SL(n) = \{A \in GL(n) \text{ tali che } \det(A) = 1\}$ è un gruppo di Lie di dimensione $n^2 - 1$.

Svolgimento

Basta controllare che $SL(n, \mathbb{R})$ sia una $n^2 - 1$ varietà e, a questo scopo, basta far vedere che 1 è un valore regolare per $\det\colon GL(n) \to \mathbb{R}^*$ gruppo di Lie.

Per la Proposizione 10.0.33 basta che

$$(d\det)_1\colon T_{Id}(GL(n)) = M(n, \mathbb{R}) \to T_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^* \tag{10.16}$$

$\forall M \in M(n, \mathbb{R})$ e questo è verificato in quanto

$$(d\det)_1(M) = \frac{d}{dt}\det(Id + tM)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(1 + t\ tr(M) + o(t^2)\right)|_{t=0} = tr(M). \tag{10.17}$$

Esercizio 13. Dimostrare che $SO(2)$ è diffeomorfo a S^1.

Svolgimento

Basta esibire il diffeomorfismo $f\colon S^1 \to SO(2)$ che associa l'elemento

$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ alla matrice di rotazione $rot(\theta) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Esercizio 14. Dimostrare che $SO(3)$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

<u>Svolgimento</u>

Sia $f\colon D^3 \to SO(3)$ tale che $f(v)$ è la rotazione di asse $Span\langle v \rangle$, di angolo $\pi\|v\|$ e positiva rispetto a v (dove $f(0) = Id$). Questa mappa è continua e suriettiva per la caratterizzazione degli elementi di $SO(3)$.

Inoltre $f(v) = f(w) \iff v = w$ oppure $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v = -w$. Dal momento che D^3 è compatto e $SO(3)$ è uno spazio di Hausdorff allora f è chiusa e dunque lo è anche la mappa indotta dal quoziente

$$\bar{f}\colon D^3/\sim \to SO(3) \tag{10.18}$$

dove $v \sim w \iff f(v) = f(w)$. Dunque $\bar{f}$ è continua, chiusa e biettiva e dunque è un omeomorfismo. Ma $D^3/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e dunque ho finito.

Esercizio 15. Dimostrare che $SO(4)$ è doppiamente rivestito da $S^3 \times S^3$.

<u>Svolgimento</u>

In questo caso usiamo i quaternioni unitari

$$|H| = \{a + bi + cj + dk\} \tag{10.19}$$

dove i, j, k sono tali che $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Sto considerando quindi $\mathbb{R}^4$ pensato con base $(1, i, j, k)$ e dotato di un prodotto non commutativo per cui $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cdot 1$ è nel centro di $|H|$ e $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, cioè da ad $|H|$ una struttura di $\mathbb{R}$-algebra con la somma di $\mathbb{R}^4$ e questa moltiplicazione.

Posto $\overline{a + bi + cj + dk} = a - bi - cj - dk$ e $\|x\| = \sqrt{x \cdot \bar{x}}$ ho che $\|\cdot\|$ è l'usuale norma euclidea. Per cui posso prendere

$$S^3 = \{x \in |H| \text{ tale che } \|x\| = 1\}. \tag{10.20}$$

Poichè $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$, S^3 è in questo modo un gruppo di Lie. Inoltre $x \in S^3$ implica che $x^{-1} = \bar{x}$.
Posso quindi definire

$$\begin{aligned} \psi \colon S^3 \times S^3 &\to SO(4) \\ (p, q) &\mapsto \{|H| = \mathbb{R}^4 \ni x \mapsto px\bar{q} = pxq^{-1} \in \mathbb{R}^4 = |H|\} \end{aligned} \tag{10.21}$$

la quale dati due quaternioni mi restituisce una mappa.
Verifico che è ben definita infatti

- $\psi(p, q)$ è lineare dal momento che i quaternioni sono un'algebra.
- $\forall x$ si ha che $\|\psi(p, q)(x)\| = \|px\bar{q}\| = \|p\| \cdot \|x\| \cdot \|\bar{q}\| = \|x\|$ e dunque $\|\psi(p, q)\| \in \mathcal{O}(n)$. Inoltre $\psi(1, 1) = Id$ e $(S^3 \times S^3)$ è connesso dunque $\psi(S^3 \times S^3) \subseteq SO(4)$. Ovviamente ψ è C^∞.
- ψ è un omomorfismo dal momento che

$$\psi((p, q)\cdot(p', q'))(x) = \psi(pp', qq')(x) = pp'x(qq')^{-1} = pp'x(q')^{-1}q^{-1} = \psi(p, q)(\psi(p', q')(x)). \tag{10.22}$$

Vediamo chi è $Ker(\psi)$. A questo scopo usiamo che il centro $Z(|H|^4) = \mathbb{R}$ da cui si deduce che $Z(S^3) = \pm \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm 1$.

Se $(p, q) \in Ker(\psi)$ allora $\forall x \in |H|$ ha che $pxq^{-1} = x$. Ponendo $x = 1$ ho

$p = q$, da cui $pxp^{-1} = x$ cioè $p \in Z(|H|^4) \cap S^3$ e dunque $p = \pm 1$ da cui $Ker(\psi) = \{(1,1),(-1,-1)\}$.

Capitolo 11

Undicesima Lezione

Proposizione 11.0.34. *Sia $f\colon M \to N$ un'immersione iniettiva tra varietà. Sono fatti equivalenti:*

1. *f è aperta nell'immagine.*

2. *f è un omeomorfismo sull'immagine.*

3. *f è un diffeomorfismo sull'immagine.*

Inoltre se $\dim M = \dim N$ allora automaticamente $f(M)$ è aperto in N.

Prima di procedere con la dimostrazione facciamo un utile

Esercizio 16. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^4} \right). \tag{11.1}$$

Per vedere che è un'immersione verifico che $\gamma'(t)$ non si annulla mai.
Per vedere che è iniettiva basta mostrare che

$$\frac{t}{1+t^2} = \frac{s}{1+s^2} \tag{11.2}$$

e

$$\frac{t^2}{1+t^4} = \frac{s^2}{1+s^4} \tag{11.3}$$

implicano $s = t$ infatti basta dividere membro a membro. La divisione è legittima dal momento che $\gamma^{-1}(0,0) = \{0\}$.

Abbiamo quindi che γ è un'immersione iniettiva ma in un intorno dell'origine $(-\epsilon, \epsilon)$ si ha che γ non è un omeomorfismo sull'immagine e dunque non sono verificate neanche le altre affermazioni.

Osservazione 22. Dunque pur avendo $\phi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^k$, iniettiva e con $d\phi_p$ iniettivo $\forall p \in \Omega$ **non è detto** che $\phi(\Omega)$ sia una varietà e nemmeno che ϕ possa essere una carta di un qualche atlante per qualche varietà. Bisogna sempre controllare che sia un omeomorfismo sull'immagine.

Osservazione 23. Se invece già so che $S \in \mathbb{R}^n$ è una k-varietà e $\phi\colon \Omega \to S$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ aperto, è una immersione iniettiva allora ϕ è una parametrizzazione locale di S per l'ultima affermazione della Proposizione 11.0.34.

Diamo ora la dimostrazione della Proposizione 11.0.34.

Dimostrazione. Sia $f\colon M \to N$ una immersione iniettiva.

($\underline{1 \Rightarrow 2}$)

Ovvio perchè una bigezione continua è un omeomorfismo se e solo se è aperta.

($\underline{2 \Rightarrow 3}$)

Per il Teorema 8.0.29 (Forma Normale delle Immersioni) so che esistono $\forall q \in f(M)$ carte locali (U, ϕ) intorno a $p = f^{-1}(q)$ e (V, ψ) intorno a q tali che $\psi \circ f \circ \phi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$.

Proprio perchè f è aperta sull'immagine so che $f(U)$ è aperto in $f(M)$ cioè $\exists V'$ intorno di q in N tale che $f(U) \cap V' = f(M) \cap V'$.

A meno di sostituire V, V' con $V \cap V'$ e di rimpicciolire U di conseguenza, pongo

$$\begin{aligned} G\colon V = & V' \to U \\ & y \longmapsto \phi^{-1}(\pi_m(\psi(y))) \end{aligned} \tag{11.4}$$

dove $\pi_m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è la proiezione sulle prime m coordinate.

Nei punti di $f(U)$ si ha che G coincide con f^{-1} e dunque G è l'estensione cercata di f^{-1} intorno a ϕ.

($\underline{3 \Rightarrow 1}$)

Ovvio.

($\underline{3 \Rightarrow 2}$)

Ovvio. $\square$

Osservazione 24. Se $\dim(M) = \dim(N)$ allora f è aperta per il Teorema 8.0.27 (di Invertibilità Locale).

Osservazione 25. Per il Teorema 8.0.29 (Forma Normale delle Immersioni) abbiamo che un'immersione è sempre localmente iniettiva.

Diamo ora qualche nuova definizione.

Definizione 11.1. (Campo Tangente)

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di dimensione k. Un campo tangente (o vettoriale) su M è una mappa $V\colon M \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $V(p) \in T_p(M)$ $\forall p \in M$.

Definizione 11.2. (Spazio Normale)

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di dimensione k. Lo spazio normale $N_p(M)$ è $N_p(M) = (T_p(M))^\perp$ $\forall p \in M$.

Definizione 11.3. (Campo Normale)

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di dimensione k. Un campo normale è una mappa $V\colon M \to \mathbb{R}^n$ di classe C^∞ tale che $V(p) \in N_p(M)$ $\forall p \in M$.

Definizione 11.4. (Campo Normale Unitario)
Un campo normale si dice unitario se $\|V(p)\| = 1\ \forall p \in M$.

Definizione 11.5. (Frame Locale)
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà di dimensione k. Un frame locale è un insieme ordinato di k campi vettoriali $v_1, \dots, v_k \colon U \to \mathbb{R}^n$ definiti su un aperto U di M e tali che $(v_1(p), \dots, v_k(p))$ sia una base di $T_p(M)\ \forall p \in U$ (un frame è una base mobile).

Esempio 10. (Fondamentale)
Sia $\phi \colon \Omega \to U \subseteq M$ una parametrizzazione locale, allora $d\phi_p \colon \mathbb{R}^k \to T_{\phi(p)}(M)$ è un isomorfismo $\forall p \in \Omega$ per cui, se e_i è l'$i-$esimo vettore della base canonica,

$$(d\phi_p(e_1), \dots, d\phi_p(e_k)) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) \tag{11.5}$$

è una base di $T_{\phi(p)}(M)\ \forall p \in \Omega$. Inoltre $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ è di classe C^∞ su Ω, dunque se

$$\begin{aligned} v_i \colon U &\to \mathbb{R}^n \\ x_i &\mapsto \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(\phi^{-1}(x_i)) \end{aligned} \tag{11.6}$$

allora $v_1, \dots, v_k$ è un frame su U che si dice frame associato a ϕ.

<u>Attenzione</u>
D'ora in poi in presenza di una carta $\phi \colon U \to \mathbb{R}$ verranno spesso confuse funzioni, campi, frames definiti su U con la loro composizione con ϕ^{-1} cioè

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \text{ “} = \text{ “} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \circ \phi^{-1}. \tag{11.7}$$

Definizione 11.6. (Orientazione su una varietà)
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una $k-$varietà, un'orientazione su M è la scelta di un'orienta-

zione su $T_p(M)$ $\forall p \in M$ tale che $\forall p \in M$ $\exists U \ni p$ intorno aperto ed un frame $v_1, \ldots, v_k \colon U \to \mathbb{R}^n$ tale che $\{v_1(q), \ldots, v_k(q)\}$ sia una base positiva di $T_p(M)$ $\forall q \in U$.

Definizione 11.7. (Atlante orientato)
Un atlante $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ per M si dice orientato se $d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})_p \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ ha determinante $\det(d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})) > 0$ $\forall p \in \phi_i(U_i \cap U_j)$ e $\forall i, j \in I$.

Definizione 11.8. (Varietà Orientabile e Varietà Orientata)
Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una $k-$varietà.
M è orientabile se ammette un'orientazione.
M è orientata se su di essa è fissata un'orientazione.

Teorema 11.0.35. *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$ una $k-$varietà.*
M è orientabile $\iff$ ammette un atlante orientato.

Dimostrazione.
$(\Longrightarrow)$
Sia $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ un atlante qualsiasi per M e $\forall p \in M$ sia U_p un intorno aperto di p su cui esiste un frame positivo in ogni punto. Il frame positivo esiste in quanto M è orientabile e su di essa considero fissata un'orientazione. Posso supporre, a meno di raffinare l'atlante, che ogni U_i sia connesso e contenuto in U_p per qualche $p \in M$. Quindi $\forall i \in I$ ho $U_i \subseteq U_p$ e $\forall q \in U_i$ posso considerare la matrice $A(q) \in GL(k)$ di cambio di base tra il frame definito su U_p e quello associato a ϕ_i. Dal momento che U_i è connesso e $\det(A(q))$ è continuo in q il segno di $\det(A(q))$ è costante. Quindi ho $\det(A(q)) > 0$ quando il frame associato a ϕ_i è sempre positivo e $\det(A(q)) < 0$ quando il frame associato a ϕ_i è sempre negativo. Se $\det(A(q)) > 0$ tengo (U_i, ϕ_i) mentre se $\det(A(q)) < 0$ sostituisco (U_i, ϕ_i) con $(U_i, r \circ \phi_i)$ dove $r(x_1, \ldots, x_k) = (-x_1, \ldots, x_k)$. Così facendo ho costruito un atlante i cui frame associati sono sempre positivi.

Questo atlante è orientato in quanto, per costruzione, $d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})$ porta una base positiva di $\mathbb{R}^k$ in una base positiva di $\mathbb{R}^n$ laddove è definita, cioè ho $\det(d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})) > 0$.

($\Longleftarrow$)

Dato un atlante orientato $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ definisco su M l'orientazione indotta dai frames associati ai ϕ_i. Se ciò da una buona definizione dell'orientazione di $T_p(M)$ $\forall p \in M$ allora questa scelta è localmente coerente.

Ma $\det(d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})) > 0$ $\forall i, j \in I$ (dove ha senso) garantisce proprio la buona definizione. $\square$

Capitolo 12

Dodicesima Lezione

Teorema 12.0.36. *Sia* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *una varietà di dimensione* $n-1$. *Allora sono fatti equivalenti:*

1. M *orientabile.*
2. M *ammette un campo normale mai nullo.*
3. M *ammette un campo normale unitario.*

Dimostrazione.
($\underline{2 \iff 3}$)
Ovvio.
($\underline{1 \implies 2}$)
$\forall p\ \exists U \ni p$ aperto con un frame $v_1, \dots, v_{n-1}$ positivo $\forall q \in U$. Pongo

$$N(q) = \frac{v_1(q) \wedge \cdots \wedge v_{n-1}(q)}{\|v_1(q) \wedge \cdots \wedge v_{n-1}(q)\|} \tag{12.1}$$

a meno di usare Gram-Schmidt (che è di classe C^∞) posso supporre che $v_1(q), \dots, v_{n-1}(q)$ sia una base ortonormale di $T_p(M)$ $\forall q \in U$. Dunque $N(q) \in N_q(M)$ $\forall q \in U$ ed è di classe C^∞ ed unitario. Non ho finito perchè non ho scelto un aperto ma, anche cambiando aperto e dunque frame, ottengo comunque dei frames ortonormali positivi che perciò sono portati l'uno nell'altro da una matrice $A \in SO(n)$.

($\underline{1 \Longrightarrow 3}$)

Sia fissata una orientazione di M e fissiamo un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di M, su ciascun aperto del quale esiste un frame positivo.

Poichè Gramd-Schmidt è di classe C^∞ posso supporre che i frames siano ortonormali. Dato un aperto U_i sia dunque $v_1, \ldots, v_{n-1} \colon U \to \mathbb{R}^n$ il frame fissato su U_i e definiamo

$$\begin{aligned} N_i \colon U_i &\to \mathbb{R}^n \\ p &\longmapsto v_1(p) \wedge \cdots \wedge v_{n-1}(p) \end{aligned}. \tag{12.2}$$

Supponiamo che N_i sia effettivamente normale e unitario (per le proprietà del prodotto vettore) e ovviamente di classe C^∞.

Dobbiamo verificare che $N_i(p) = N_j(p)$ se $p \in U_i \cap U_j$.

Siano $v_1, \ldots, v_{n-1}$ e $w_1, \ldots, w_{n-1}$ i frames su U_i e U_j rispettivamente e sia B la matrice $B \in M(n-1, \mathbb{R})$ che esprime il cambio di base dai v ai w. Poichè i frames sono ortonormali $B \in O(n-1)$ e, poichè sono positivi, allora $B \in SO(n-1)$. Sia ora $A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $Av_h(p) = w_h(p)\ \forall h = 1, \ldots, n-1$ e $AN_i(p) = N_j(p)$. Per costruzione A porta una base ortonormale in una base ortonormale quindi $A \in O(n)$. Dunque

$$\begin{aligned} N_j = AN_i = A(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}) = (\det(A))(Av_1 \wedge \cdots \wedge Av_{n-1}) = \\ = (\det(A))(Aw_1 \wedge \cdots \wedge Aw_{n-1}) = \det(A)N_j \end{aligned} \tag{12.3}$$

e perciò $\det(A) = 1$.

La matrice che rappresenta A nella base $\{v_1, \dots, v_{n-1}, N_i\}$ è

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \tag{12.4}$$

perchè so che A è ortogonale e N_j è un versore nello $Span(N_i)$.
Dal fatto che $A \in SO(n)$ e $B \in SO(n-1)$, l'entrata (n, n) della matrice deve essere necessariamente 1, cioè $N_j = AN_i = N_i$.
$(\underline{3 \implies 1})$
Fissato $N \colon M \to \mathbb{R}^n$, definisco un'orientazione su $T_p(M)$ così:
una base $(v_1, \dots, v_{n-1})$ di $T_p(M)$ è positiva se $(v_1, \dots, v_{n-1}, N(p))$ è una base positiva di $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 26. Mostriamo che questa è una buona definizione. Se $(v_1, \dots, v_{n-1})$ e $(w_1, \dots, w_{n-1})$ sono basi di $T_p(M)$ con matrice di cambio di base B allora la matrice di cambio di base tra $(v_1, \dots, v_{n-1}, N(p))$ e $(w_1, \dots, w_{n-1}, N(p))$ è

$$\begin{bmatrix} & & & 0 \\ & B & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = A. \tag{12.5}$$

Dunque se, con la nostra definizione, $v_1, \dots, v_{n-1}$ è positiva allora $\det(v_1|\dots|v_{n-1}|N(p)) > 0$.
Dunque, poichè $\det(A) = \det(B)$, allora $w_1, \dots, w_{n-1}$ è positiva se e solo se $\det(B) > 0$ e $\det(B) > 0$ se e solo se $(v_1, \dots, v_{n-1}) \sim (w_1, \dots, w_{n-1})$.
Dunque abbiamo ben definito una orientazione su $T_p(M)$.

Dato $q \in M$ posso scegliere una parametrizzazione $\phi\colon \Omega \to U \ni q, U \subseteq M$ aperto, tale che il frame associato a ϕ sia positivo in q.
Ora $\det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}|\cdots|\frac{\partial \phi}{\partial x_{n-1}}|N \circ \phi\right) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$ ed è > 0 in $\phi^{-1}(q)$, per cui è sempre > 0, dal momento che posso supporre che Ω sia connesso. Ciò mostra che le orientazioni definite prima sono localmente coerenti. $\square$

Corollario 12.0.37. *(Importante)*
Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e $a \in R$ un valore regolare per f allora $f^{-1}(a)$ è una $(n-1)-$varietà orientabile.

Dimostrazione.
Sia $M = f^{-1}(a)$, pongo $N(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right) = \nabla f(p)$. Ora $N(p)$ è un campo normale mai nullo poichè $T_p(M) = Ker(df_p)$. $\square$

Corollario 12.0.38. *S^n ed $SL(n)$ sono orientabili $\forall n$.*

Iniziamo ora con il trattare la Teoria delle Superfici.

Definizione 12.1. (Superficie)
Una superficie è una $2-$varietà S in $\mathbb{R}^3$.

Definizione 12.2. (Distanza Intrinseca)
La distanza intrinseca su una superficie S è definita come

$$d(p,q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma\colon [0,1] \to S \text{ curve } C^\infty \text{ (a tratti) con } \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\} \tag{12.6}$$

Osservazione 27. Quella definita è effettivamente una distanza si ha infatti che

1. $d(p,q) \geq 0$ e se $d(p,q) = 0$ allora $p = q$ in quanto si vede facilmente che $d(p,q) \geq \|p - q\|$.

2. $d(p,q) = d(q,p)$ perchè $L(\gamma) = L(\gamma^{-1})$.

3. $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$ perchè $L(\gamma_1 \circ \gamma_2) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

Definizione 12.3. (I Forma Fondamentale)
Sia $\phi\colon \Omega \to S$ una parametrizzazione locale di una superficie. La I forma fondamentale è la restrizione del prodotto scalare (o della forma quadratica) standard di $\mathbb{R}^3$ a S, vista in coordinate tramite ϕ. Concretamente, la prima forma fondamentale è rappresentata dalla matrice

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{12.7}$$

dove

$$\begin{aligned} E &= \langle d\phi(e_1), d\phi(e_1) \rangle = \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \rangle \\ F &= \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \rangle \\ G &= \langle \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \rangle \end{aligned} \tag{12.8}$$

<u>Notazione</u>
D'ora in poi, le variabili definite sugli aperti parametrizzanti di $\mathbb{R}^2$ saranno u, v. Le parametrizzazioni si chiameranno spesso $\phi\colon \Omega \to S$ o $x\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ e $\frac{\partial \phi}{\partial u}, \frac{\partial \phi}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$ saranno denotate con ϕ_u, ϕ_v, x_u, x_v.
Dunque

$$\begin{aligned} E &= \langle \phi_u, \phi_u \rangle \\ F &= \langle \phi_u, \phi_v \rangle \cdot \\ G &= \langle \phi_v, \phi_v \rangle \end{aligned} \tag{12.9}$$

Se $x\colon \Omega \to S$ è una parametrizzazione diremo che x_u, x_v ne è il frame associato <u>confondendo</u> x_u con $x_u \circ x^{-1}$ e x_v con $x_v \circ x^{-1}$.
<u>Assunzione</u>
Ogni superficie sarà assunta orientabile e anzi orientata da un versore N. Ogni varietà è localmente orientabile e gli invarianti che introdurremo rimangono inalterati o cambiano segno invertendo l'orientazione, dunque la scelta non è troppo restrittiva.

Definizione 12.4. (Mappa di Gauss)
Sia S una superficie. La mappa di Gauss è $N\colon S \to \underbrace{S^2}_{\text{Sfera}}$ data dal versore normale.

Proposizione 12.0.39. *$\forall p \in S$, $T_p(S) = T_{N(p)}(S^2)$ e $dN_p\colon T_p(S) \to T_p(S)$ è un endomorfismo autoaggiunto rispetto alla I forma fondamentale.*

Dimostrazione. Si vede che $T_p(S) = N(p)^{\perp} = T_{N(p)}(S^2)$.
Fisso $p \in S$ con parametrizzazione locale $x\colon \Omega \to S$ intorno a p. Devo vedere che

$$\langle dN_p(v), w\rangle = \langle v, dN_p(w)\rangle \tag{12.10}$$

$\forall v, w \in T_p(S)$. Posso restringermi a v, w in una base di $T_p(S)$ e scelgo x_u, x_v come base. L'unica uguaglianza non banale è

$$\langle dN_p(x_u), x_v\rangle = \langle x_u, dN_p(x_v)\rangle \tag{12.11}$$

cioè

$$\langle N_u, x_v\rangle = \langle x_u, N_v\rangle \tag{12.12}$$

in quanto

$$N_u = \frac{\partial N \circ x}{\partial u} = d(N \circ x)(e_1) = dN_{x(\cdot)}(dx(e_1)) = dN(x_u). \tag{12.13}$$

Ora so che $0 \equiv \langle N, x_u \rangle$ e quindi

$$0 = \frac{\partial}{\partial v} \langle N, x_u \rangle = \langle N_v, x_u \rangle + \langle N, x_{vu} \rangle \tag{12.14}$$

ed allo stesso modo $0 \equiv \langle N, x_v \rangle$ e quindi

$$0 = \frac{\partial}{\partial u} \langle N, x_v \rangle = \langle N_u, x_v \rangle + \langle N, x_{uv} \rangle. \tag{12.15}$$

Usando Schwarz concludo che è autoaggiunto. □

Definizione 12.5. Sia $p \in S$. Allora:

1. Gli autospazi di dN_p si chiamano **Direzioni Principali**.

2. Gli opposti degli autovalori di dN_p si dicono **Curvature Principali**.

3. La semisomma delle curvature principali si chiama **Curvatura Media**.

4. $\det(dN_p)$ si chiama **Curvatura Gaussiana**.

Osservazione 28. Per il teorema spettrale, dN_p ammette una base ortonormale di autovettori. Dunque se $dN_p \neq \lambda I$, le direzioni ortogonali sono tra loro ortogonali. Inoltre, la curvatura di Gauss è il prodotto delle curvature principali. Il segno delle curvature principali dipende da N mentre la curvatura Gaussiana è una quantità intrinseca e non dipende dall'orientazione.

Capitolo 13

Tredicesima Lezione

Definizione 13.1. (II Forma Fondamentale)
Pongo

$$II(v, w) = I(v, -dN_p(w)) = \langle v, -dN_p(w)\rangle \tag{13.1}$$

$\forall v, w \in T_p(S)$.

Osservazione 29. La seconda forma fondamentale è ovviamente bilineare ed è simmetrica poichè dN_p è autoaggiunto.

Al momento abbiamo dunque

1. I forma fondamentale definita positiva.
2. Mappa di Gauss che è un differenziale.
3. II forma fondamentale della quale non sappiamo dire nulla sul segno.

Definizione 13.2. (Curvatura Normale)
Sia $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva P.L.A., la **Curvatura Normale** di γ in 0 è

$$K_n(0) = \langle \gamma''(0), N(\gamma(0))\rangle = K(0)\langle n(0), N(\gamma(0))\rangle \tag{13.2}$$

e fornisce la componente dell'accellerazione normale alla superficie.

Proposizione 13.0.40.
Sia $\gamma\colon(-\epsilon,\epsilon)\to S$ *una curva P.L.A., allora* $K_n(0)=II(\gamma'(0),\gamma'(0))$. *In particolare la componente normale di* $\gamma''(0)$ *dipende solo da* $\gamma'(0)$.

Dimostrazione. Sicuramente $0\equiv\langle\gamma'(t),N(\gamma(t))\rangle$ ovvero velocità e normale alla superficie sono ortogonali tra loro. E quindi derivando e usando la proposizione 7.0.24

$$0\equiv\langle\gamma''(0),N(\gamma(0))\rangle+\langle\gamma'(0),dN_{\gamma(0)}(\gamma'(0))\rangle=K_n(0)-II(\gamma'(0),\gamma'(0)) \tag{13.3}$$

□

Proposizione 13.0.41. *Sia* $p\in S$ *e siano* K_1 *e* K_2 *le curvature principali di* S *in* p *con* $K_1\leq K_2$, *allora* K_1 *e* K_2 *sono il minimo e il massimo delle curvature normali delle curve P.L.A. passanti per* p.

Dimostrazione. Siano v_1 e v_2 gli autovettori unitari relativi agli autovalori $-K_1,-K_2$ per dN_p. Siccome dN_p è autoaggiunto per il Teorema Spettrale posso supporre $v_1\perp v_2$ e dunque $\forall v\in T_p(S)$, $\|v\|=1$, $\exists\theta\in[0,2\pi]$ tale che $v=\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2$. Quindi

$$\begin{aligned}II(v,v)=&II(\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2,\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2)=\\=&\langle\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2,-dN_p(\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2)\rangle=\\=&\langle\cos(\theta)v_1+\sin(\theta)v_2,K_1\cos(\theta)v_1+K_2\sin(\theta)v_2\rangle=\\=&\cos^2(\theta)K_1+\sin^2(\theta)K_2\end{aligned} \tag{13.4}$$

che è combinazione convessa di K_1 e K_2. Le direzioni principali realizzano proprio i valori estremali. □

Definizione 13.3. Sia $p \in S$ allora p si dice:

1. **Planare** se $dN_p = 0$.
2. **Parabolico** se $\det dN_p = 0$ ma $dN_p \neq 0$.
3. **Ellittico** se $\det dN_p > 0$.
4. **Iperbolico** se $\det dN_p < 0$.

D'ora in avanti denoteremo con K la curvatura di Gauss $K = \det dN_p > 0$.

Osservazione 30. $K > 0 \iff$ curvature principali sono concordi ovvero tutte le curve stanno girando dalla stessa parte della superficie.

Definizione 13.4. Sia $\gamma \colon I \to S$ una curva P.L.A., essa si dice:

1. **Linea di curvatura** se $\gamma'(t)$ è parallelo ad una direzione principale $\forall t$.
2. **Linea asintotica** se $K_n(t) = 0$ $\forall t$ cioè $II(\gamma'(t), \gamma'(t)) = 0$ $\forall t$.

Esempio 11.

Sia $S = \{(x, y, z) \colon z = 0\}$ e $N \colon S \to S^2$ con $N(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall p \in S$. Il fatto che $N(p)$ sia costante implica che $dN_p = 0$ $\forall p \in S$ e dunque tutti i punti sono planari e tutte le curvature nulle.

Esempio 12. Sia $S = S^2$ sfera e $N \colon S^2 \to S^2$ con $N(p) = p$. Quindi $dN_p = Id$ e dunque tutte le direzioni sono principali (ha senso poichè la sfera è simmetrica). Le curvature principali sono entrambe uguali a -1 e $K = 1$.

Esempio 13. Sia $S = S^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ un cilindro. Se

$$\begin{aligned} \pi \colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, 0) \end{aligned} \tag{13.5}$$

allora $N(p) = \pi(p)$ $\forall p \in S$ ed N manda tutta S sull'equatore di S^1 dunque $dN_p = \pi(p)$ $\forall p \in S$ (il differenziale di una mappa lineare come π è se stesso).

Inoltre si ha che $\forall p \in S$ $T_p(S) = Span\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, q\rangle = Span\langle v_1, v_2\rangle$

con $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$. Le curvature principali sono -1 e 0 e $K = 0$. Le direzioni principali sono quelle orizzontali e verticali. Le direttrici del cilindro sono linee di curvatura e linee asintotiche, le circonferenze orizzontali sono linee di curvatura.

<u>Metodo generale di calcolo di I e II forma</u>

Siano date S superficie, $p \in S$ e $x\colon \Omega \to U \subseteq S$ parametrizzazione intorno a p. Un frame su U è dato da x_u, x_v (o più propriamente $x_u \circ x^{-1}, x_v \circ x^{-1}$).
I coefficienti della I forma

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{13.6}$$

sono

$$\begin{aligned} E &= \langle x_u, x_u\rangle \\ F &= \langle x_u, x_v\rangle \cdot \\ G &= \langle x_v, x_v\rangle \end{aligned} \tag{13.7}$$

Pongo

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} \tag{13.8}$$

e ricordo che

$$e = -\langle x_u, dN(x_u)\rangle = -\langle x_u, N_u\rangle \tag{13.9}$$

ma $0 \equiv \langle x_u, N\rangle$ dunque derivo rispetto a u ed ottengo

$$0 \equiv \langle x_{uu}, N\rangle + \langle x_u, N_u\rangle = \langle x_{uu}, N\rangle - e \tag{13.10}$$

e quindi $e = \langle x_{uu}, N\rangle$. Ciò è utile dal momento che è più semplice derivare x_u piuttosto che N.

Derivando rispetto a v ho

$$0 = \langle x_{uv}, N\rangle + \langle x_u, N_v\rangle \tag{13.11}$$

dunque $f = \langle x_{uv}, N\rangle$. Infine analogamente $g = \langle x_{vv}, N\rangle$.

Siano ora A, B, M matrici 2×2 che rappresentano I, II forma e dN rispetto alla base $\{x_u, x_v\}$ per cui

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{13.12}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix}. \tag{13.13}$$

Per definizione $B = -AM$ e dunque $M = -A^{-1}B$.

Per cui per esempio $K = \det M = \dfrac{\det B}{\det A} = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$.

Esercizio 17. (Sella)

Sia $S = \{(x, y, z) : z = x^2 - y^2\}$ sella. S è una superficie con parametrizzazione globale $x(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ che ha la proiezione con inversa C^∞. Allora

$$x_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{bmatrix}, x_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{bmatrix} \tag{13.14}$$

e dunque

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \begin{bmatrix} -2u \\ 2v \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13.15}$$

e

$$I = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_u, x_v \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2 \end{bmatrix}. \tag{13.16}$$

Osserviamo che $\det I = \|x_u \wedge x_v\|^2$.

Inoltre

$$x_{uu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, x_{uv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_{vv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{13.17}$$

e dunque

$$II = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N \rangle & \langle x_{uv}, N \rangle \\ \langle x_{uv}, N \rangle & \langle x_{vv}, N \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{13.18}$$

Ora dal momento che $dN = -I^{-1}II$ possiamo calcolare le direzioni principali in 0 e la curvatura di Gauss K ovunque.

In 0 la matrice che rappresenta dN_0 rispetto a x_u, x_v è

$$M = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{13.19}$$

dunque le direzioni principali sono gli autospazi dell'endomorfismo rappresentato dalla matrice $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e quindi sono $Span(x_u)$ e $Span(x_v)$

cioè $Span(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix})$ e $Span(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix})$ e le curvature principali sono 2 e -2.

Infine

$$\begin{aligned}K(x(u,v)) = K(u,v,u^2-v^2) = \det(-I^{-1}II) = \frac{\det II}{\det I} = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \\ = -\frac{4}{1+4u^2+4v^2}\frac{1}{1+4u^2+4v^2} = -\frac{4}{(1+4u^2+4v^2)^2}\end{aligned} \tag{13.20}$$

che è negativa in ogni punto.

Finire l'esercizio sui quaternioni.

Capitolo 14

Quattordicesima Lezione

Definizione 14.1. (Superficie di rotazione)
Sia $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva P.L.A. e tale che sia un omeomorfismo sull'immagine

$$\gamma(t) = (\phi(t), 0, \psi(t)) \tag{14.1}$$

con $\phi(t) > 0\ \forall t \in I$. La superficie di rotazione associata a γ è l'immagine di

$$\begin{aligned} x\colon I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\phi(u)\cos(v), \phi(u)\sin(v), \psi(u)) \end{aligned} \tag{14.2}$$

Verifico che $S = x(I \times \mathbb{R})$ sia una superficie, dove sto assumendo che $I \subseteq \mathbb{R}$ sia un intervallo aperto. Verifico che opportune restrizioni di x forniscono un atlante per S. In particolare basta prendere le restrizioni a $I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $I \times (0, \pi)$, $I \times \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$ e $I \times (0, 2\pi)$.
Vediamo che $x\colon I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to U \subseteq S$ è un diffeomorfismo su un aperto di S. Si ha $U = S \cap \{x > 0\}$ che è aperto in S. Basta vedere che $x_{\big|I \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$ è un'immersione e un omeomorfismo con U, oppure basta darne un'inversa di

classe C^∞. Se $(x,y,z) \in S \cap U$ allora ottengo l'inversa ponendo

$$\begin{aligned} v &= \arctan(\frac{y}{x}) \\ \phi(u) &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \psi(u) &= z \end{aligned} \tag{14.3}$$

per cui

$$(u,v) = \left(\gamma^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z), \arctan(\frac{y}{x})\right). \tag{14.4}$$

Quindi la mappa

$$(x,y,z) \mapsto \left(\gamma^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}, 0, z), \arctan(\frac{y}{x})\right) \tag{14.5}$$

è l'inversa richiesta. Le altre parametrizzazioni si trattano analogamente. S è dunque una superficie.

Per studiare le forme fondamentali uso

$$\begin{aligned} x \colon I \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (\phi(u)\cos(v), \phi(u)\sin(v), \psi(u)) \end{aligned} \tag{14.6}$$

e dunque

$$\begin{aligned} x_u &= \begin{bmatrix} \phi'(u)\cos v \\ \phi'(u)\sin v \\ \psi'(u) \end{bmatrix} \\ x_v &= \begin{bmatrix} -\phi(u)\sin v \\ \phi(u)\cos v \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{14.7}$$

e

$$
x_{uu} = \begin{bmatrix} \phi''(u)\cos v \\ \phi''(u)\sin v \\ \psi''(u) \end{bmatrix}
$$
$$
x_{uv} = \begin{bmatrix} -\phi'(u)\sin v \\ \phi'(u)\cos v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{14.8}
$$
$$
x_{vv} = \begin{bmatrix} -\phi(u)\cos v \\ -\phi(u)\sin v \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

La mappa di Gauss è

$$
\begin{aligned}
N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} &= \frac{1}{\sqrt{\phi^2((\phi')^2 + (\psi')^2)}} \begin{bmatrix} -\phi\psi'\cos v \\ -\phi\psi'\sin v \\ \phi\phi' \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \begin{bmatrix} -\psi'\cos v \\ -\psi'\sin v \\ \phi' \end{bmatrix}
\end{aligned}
. \tag{14.9}
$$

Dunque calcolo le I,II forme

$$
I = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_u, x_v \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\phi')^2 + (\psi')^2 & 0 \\ 0 & \phi^2 \end{bmatrix} \tag{14.10}
$$

e

$$II = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N\rangle & \langle x_{uv}, N\rangle \\ \langle x_{uv}, N\rangle & \langle x_{vv}, N\rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \begin{bmatrix} -\phi''\psi' + \psi''\phi' & 0 \\ 0 & \phi\psi'' \end{bmatrix}. \tag{14.11}$$

Definizione 14.2. (Meridiano)
Si dice meridiano una curva della forma

$$\alpha(t) = x(t, v_0) \tag{14.12}$$

con $v_0 \in \mathbb{R}$ fissato.

Definizione 14.3. (Parallelo)
Si dice parallelo una curva della forma

$$\beta(t) = x(u_0, t) \tag{14.13}$$

con $u_0 \in I$ fissato.

Per costruzione la tangente ad un meridiano è parallela a x_u e la tangente ad un parallelo è parallela a x_v.
Il fatto che la I forma sia diagonale implica che i meridiani e i paralleli siano ortogonali. Se M è la matrice che rappresenta dN rispetto a x_u, x_v allora anche $M = -I^{-1}II$ è diagonale per cui x_u, x_v sono le direzioni principali e dunque meridiani e paralleli sono linee di curvatura. Dal momento che le curvature principali sono l'opposto degli autovalori di

$$M = -I^{-1}II = \frac{1}{\sqrt{(\phi')^2 + (\psi')^2}} \begin{bmatrix} \dfrac{\phi''\psi' - \psi''\phi'}{(\phi')^2 + (\psi')^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\psi'}{\phi} \end{bmatrix} \tag{14.14}$$

si ha che le curvature principali sono proprio $k_1 = \dfrac{-\phi''\psi' + \psi''\phi'}{\sqrt{((\phi')^2 + (\psi')^2)^3}}$ e $k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{((\phi')^2 + (\psi')^2)}}\dfrac{\psi'}{\phi}$. Infine la curvatura di Gauss è

$$K(x(u,v)) = \det(-I^{-1}II) = -\frac{(\phi''\psi' - \psi''\phi')}{((\phi')^2 + (\psi')^2)^2}\frac{\psi'}{\phi} = -\frac{\phi''(\psi')^2 - \psi'\psi''\phi'}{((\phi')^2 + (\psi')^2)^2\phi}. \tag{14.15}$$

Osservazione 31. Se γ è P.L.A. si ha che $(\phi')^2 + (\psi')^2 = 1$ e derivando ottengo $\phi'\phi'' + \psi'\psi'' = 0$ e per cui sostituendo $\psi'\psi'' = -\phi'\phi''$ in 14.15 ottengo

$$K(x(u,v)) = -\frac{\phi''}{\phi}. \tag{14.16}$$

Esercizio 18. (Toro)
Sia $a > 1$ e sia

$$\begin{aligned} \gamma\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (a + \cos t, 0, \sin t) \end{aligned}. \tag{14.17}$$

Sia S la superficie di rotazione associata a γ.

Osservazione 32. Nonostante la curva P.L.A. γ non sia un omeomorfismo con l'immagine ha senso considerare la superficie di rotazione associata poichè opportune restrizioni di γ definiscono superfici di rotazione.

Per quanto già visto, dal momento che γ è P.L.A., possiamo calcolare direttamente la curvatura gaussiana che è

$$K(x(u,v)) = -\frac{\phi''}{\phi} = -\frac{(a + \cos t)''}{a + \cos t} = \frac{\cos t}{a + \cos t}. \tag{14.18}$$

Dal momento che $a > 1$ il segno di K dipende unicamente dal segno di $\cos t$ e dunque si ha che

$$\begin{cases} K > 0 \text{ se } -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2} \\ K = 0 \text{ se } t = \dfrac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \\ K < 0 \text{ se } -\dfrac{3}{2}\pi < t < -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} . \tag{14.19}$$

Esercizio 19. (Catenoide)

La catenaria è la curva piana grafico del coseno iperbolico

$$\begin{aligned} \gamma \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (\cosh(at), 0, t) = (\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, 0, t). \end{aligned} \tag{14.20}$$

Presa una corda e scelti due punti, fissando gli estremi della corda ai punti essa si disporrà come il grafico di una catenaria. Il coefficiente a è legato alla lunghezza della corda. Suppoiniamo che $a = 1$.

La superficie di rotazione associata si chiama catenoide ed ha parametrizzazione

$$\begin{aligned} x \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u) \end{aligned} . \tag{14.21}$$

Cerchiamo anzitutto la mappa di Gauss, si ha

$$
\begin{aligned}
x_u &= \begin{bmatrix} \sinh u \cos v \\ \sinh u \sin v \\ 1 \end{bmatrix} \\
x_v &= \begin{bmatrix} -\cosh u \sin v \\ \cosh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14.22}
$$

e dunque

$$
N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \begin{bmatrix} -\frac{\cos v}{\cosh u} \\ -\frac{\sin v}{\cosh u} \\ \frac{\sinh u}{\cosh u} \end{bmatrix}. \tag{14.23}
$$

Infine troviamo le derivate seconde e, successivamente, I e II forma

$$
\begin{aligned}
x_{uu} &= \begin{bmatrix} \cosh u \cos v \\ \cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix} \\
x_{uv} &= \begin{bmatrix} -\sinh u \sin v \\ \sinh u \cos v \\ 0 \end{bmatrix} \\
x_{vv} &= \begin{bmatrix} -\cosh u \cos v \\ -\cosh u \sin v \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{14.24}
$$

e dunque

$$
I = \begin{bmatrix} \langle x_u, x_u \rangle & \langle x_u, x_v \rangle \\ \langle x_u, x_v \rangle & \langle x_v, x_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh^2 u & 0 \\ 0 & \cosh^2 u \end{bmatrix} \tag{14.25}
$$

e

$$II = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N\rangle & \langle x_{uv}, N\rangle \\ \langle x_{uv}, N\rangle & \langle x_{vv}, N\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{14.26}$$

Dunque ho che

$$M = -I^{-1}II = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\cosh^2 u} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\cosh^2 u} \end{bmatrix} \tag{14.27}$$

e dunque le curvature principali sono $-\dfrac{1}{\cosh^2 u}$ e $\dfrac{1}{\cosh^2 u}$ e la curvatura di Gauss è $K(x(u,v)) = -\dfrac{1}{\cosh^4 u}$.

Esercizio 20. (Pseudosfera)

La trattrice è la curva

$$\begin{aligned} \gamma \colon (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin t, \cos t + \log(\tan \frac{t}{2})) \end{aligned} \tag{14.28}$$

la quale è regolare per $t \neq \dfrac{\pi}{2}$ ed è un omeomorfismo sull'immagine.

La pseudosfera è la superficie ottenuta facendo ruotare $\gamma\big|_{(0,\frac{\pi}{2})}$ o $\gamma\big|_{(\frac{\pi}{2},\pi)}$.

Troviamo anzitutto la curvatura della trattrice e per farlo calcoliamo la derivata prima

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}}\frac{1}{\tan \frac{t}{2}}\right) = \\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = \left(\cos t, \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right) \end{aligned} \tag{14.29}$$

e la derivata seconda

$$\gamma''(t) = \left(-\sin t, \frac{-2\cos t \sin^2 t - \cos^3 t}{\sin^2 t} \right) = \left(-\sin t, -\frac{\cos t}{\sin^2 t}(1 + \sin^2 t) \right). \tag{14.30}$$

Notiamo che $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t \neq \frac{\pi}{2}$ e dunque nella nostra restrizione possiamo calcolare la curvatura

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \tag{14.31}$$

dove

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| &= \left| -\cos^2 t + \frac{2\cos^2 t \sin^2 t + \cos^4 t}{\sin^2 t} \right| = \\ &= \left| -1 + \sin^2 t + \frac{2(1 - \sin^2 t) + (1 - \sin^2 t)^2}{\sin^2 t} \right| = \\ &= \left| -1 + \sin^2 t + \frac{-\sin^4 t + 1}{\sin^2 t} \right| = \left| -1 + \frac{1}{\sin^2 t} \right| = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \end{aligned} \tag{14.32}$$

e

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \cos^2 t + \frac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} \tag{14.33}$$

e quindi

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\cancel{\cos^2 t}}{\cancel{\sin^2 t}} \frac{\sin^{\cancel{3}} t}{\cos^{\cancel{3}} t} = \tan t. \tag{14.34}$$

Per quanto riguarda curvature principali e curvatura di Gauss della pseudosfera parametrizzata da

$$x(u, v) = (\phi(u)\cos v, \phi(u)\sin v, \psi(u)) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \log(\tan \frac{u}{2})) \tag{14.35}$$

applichiamo quanto visto per le superfici di rotazione. Le curvature principali sono

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \frac{-\phi''\psi' + \psi''\phi'}{\sqrt{((\phi')^2 + (\psi')^2)^3}} = \frac{\sin^3 u}{\cos^3 u}\left(\cancel{\sin u}\frac{\cos^2 u}{\cancel{\sin u}} - \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}(1 + \sin^2 u)\right) = \\
&= \frac{\sin^3 u}{\cos^{\cancel{3}} u}\cancel{\cos^2 u}(1 - \frac{1 + \sin^2 u}{\sin^2 u}) = \frac{\sin^{\cancel{3}} u}{\cos u}\frac{-1}{\cancel{\sin^2 u}} = -\frac{\sin u}{\cos u} \\
k_2 &= \frac{1}{\sqrt{((\phi')^2 + (\psi')^2)}}\frac{\psi'}{\phi} = \frac{\cancel{\sin u}}{\cancel{\cos u}}\frac{\cos^{\cancel{2}} u}{\sin u}\frac{1}{\cancel{\sin u}} = \frac{\cos u}{\sin u}
\end{aligned}
\tag{14.36}
$$

e dunque la curvatura di Gauss è

$$
K(x(u, v)) = k_1 k_2 = -1. \tag{14.37}
$$

Capitolo 15

Quindicesima Lezione

Definizione 15.1. (Congruenza)
Siano S e $S' \subseteq \mathbb{R}^3$ superfici, allora una congruenza tra S e S' è una bigezione $f\colon S \to S'$ che si estende ad un'isometria di $\mathbb{R}^3$. Se tale f esiste allora S e S' si dicono congruenti.

Osservazione 33. Tutte le grandezze introdotte fino ad ora sono preservate da congruenze, in quanto una congruenza preserva anche il versore normale.

Definizione 15.2. (Isometria tra superfici)
Una funzione $f\colon S \to S'$ fra superfici è un'isometria se è bigettiva e tale che $df_p\colon T_p(S) \to T_{f(p)}(S')$ è un'isometria lineare $\forall p \in S$. In tal caso anche $f^{-1}\colon S' \to S$ è un'isometria e S e S' si dicono isometriche.

Osservazione 34. Ogni congruenza è un'isometria. Il differenziale di una congruenza è infatti restrizione di un elemento di $O(3)$ ed è perciò un'isometria lineare.

Proposizione 15.0.42.

Sia $f\colon S \to S'$ un'isometria, allora f preserva la distanza intrinseca, cioè

$$d(f(p), f(p')) = d(p, p') \tag{15.1}$$

$\forall p, p' \in S$.

Dimostrazione.

Se γ è una curva di classe C^1 a tratti in S, allora:

$$L(f \circ \gamma) = \int_I \|(f \circ \gamma)'(s)\| ds = \int_I \|df_{\gamma(s)}(\gamma'(s))\| ds = \int_I \|\gamma'(s)\| ds = L(\gamma) \tag{15.2}$$

in quanto df è un'isometria. Ciò mostra che $d(f(p), f(q)) \leq d(p, q)$ $\forall p, q$. L'uguaglianza si ottiene usando f^{-1}. $\square$

Proposizione 15.0.43.

Ogni bigezione che preserva la distanza intrinseca è un'isometria.

Definizione 15.3. (Isometria Locale)

$f\colon S \to S'$ si dice isometria locale se df_p è un'isometria lineare $\forall p \in S$. Per invertibilità locale è asintoticamente un diffeomorfismo locale e $\forall p \in S$ $\exists U \ni p$ aperto tale che $f_{|U}\colon U \to f(U)$ sia un'isometria tra aperti di S e S'.

Definizione 15.4. (Superfici Localmente Isometriche)

Due superfici S e S' si dicono localmente isometriche se $\forall p \in S$ $\exists U \ni p$ aperto in S tali che $\exists f\colon U \to f(U)$ isometria tra aperti di S e S' e viceversa.

Osservazione 35. Il fatto che due superfici siano localmente isometriche non implica l'esistenza di isometrie locali globalmente definite. Ad esempio una locale isometria dal quadrato al cerchio non si può esibire globalmente poichè i domini sono diversi.

Proposizione 15.0.44.
Date due superfici S e S', $f\colon S \to S'$ è una locale isometria $\iff \forall p \in S$ e per ogni parametrizzazione locale $\phi\colon \Omega \to U \ni p$ i coefficienti della I forma di S rispetto a ϕ coincidono con i coefficienti di S' rispetto a $f \circ \phi$ (a meno di restringere Ω in modo tale che $f \circ \phi$ sia anch'essa una parametrizzazione).

Dimostrazione.
I_S e $I_{S'}$ sono rispettivamente

$$I_S = \begin{bmatrix} \langle \phi_u, \phi_u \rangle & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \langle \phi_v, \phi_v \rangle \end{bmatrix} \tag{15.3}$$

e

$$\begin{aligned} I_{S'} &= \begin{bmatrix} \langle (f\circ\phi)_u, (f\circ\phi)_u \rangle & \langle (f\circ\phi)_u, (f\circ\phi)_v \rangle \\ \langle (f\circ\phi)_u, (f\circ\phi)_v \rangle & \langle (f\circ\phi)_v, (f\circ\phi)_v \rangle \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \langle df(\phi_u), df(\phi_u) \rangle & \langle df(\phi_u), df(\phi_v) \rangle \\ \langle df(\phi_u), df(\phi_v) \rangle & \langle df(\phi_v), df(\phi_v) \rangle \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{15.4}$$

e dunque $I_S = I_{S'} \iff df$ preserva i prodotti scalari tra i vettori di una base di $T_p(S)$ e la loro immagine $\forall q \in U \iff df_q$ è un'isometria lineare $\forall q \in U$. □

Corollario 15.0.45. *S e S' sono localmente isometriche $\iff \forall p \in S\ \exists$ parametrizzazioni $\phi\colon \Omega \to U \ni p$, $U \subseteq S$, e $\psi\colon \Omega \to V$ aperto di S' con I forme fondamentali associate identiche e viceversa.*

Dimostrazione. Se tali parametrizzazioni esistono allora, prendendo ϕ come parametrizzaizone intorno a p, $\psi \circ \phi^{-1}\colon U \to V$ è un'isometria per il risultato precedente.

Viceversa, se $f\colon U \to V$ è un'isometria posso prendere una carta a caso $\phi\colon \Omega \to U$ e definire $\psi = f \circ \phi$. $\square$

Esercizio 21. Si considerino il piano $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, il cilindro $C = S^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e il cono $Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$. Mostriamo che sono superfici localmente isometriche.
Sia $f\colon H \to C$ tale che $f(x,y,0) = (\cos x, \sin x, y)$. Si ha che f è una locale isometria, infatti se $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono una base ortonormale di $T_p(H)$ $\forall p \in H$ allora $df_p(e_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\sin x \\ \cos x \\ 0 \end{bmatrix}$ e $df_p(e_2) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono una base ortonormale di $T_{f(p)}(C)$ e dunque df_p porta una base ortonormale in una base ortonormale ed è un'isometria lineare. Dunque $\forall p \in H$ $\exists U \ni p$ aperto di S e un aperto V di S' con U isometrico a V (basta prendere U piccolo e $V = f(U)$). D'altronde f è suriettiva e dunque $\forall q \in C$ prendo $p \in f^{-1}(q)$ e con lo stesso argomento si mostra la condizione simmetrica. Pertanto H e C sono localmente isometriche.
Ora verifichiamo anzitutto che il cono Z sia una superficie.
Z è il luogo di zeri di $x^2 + y^2 - z^2$ il cui differenziale è nullo solo in $0 \notin Z$. Considero le mappe

$$\begin{aligned} \phi\colon (0,+\infty) \times \mathbb{R} &\to H \\ (u,v) &\mapsto (u\cos v, u \sin v, 0) \end{aligned} \tag{15.5}$$

e

$$\begin{aligned} \psi\colon (0,+\infty) \times \mathbb{R} &\to Z \\ (u,v) &\mapsto (\frac{u}{\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}u), \frac{u}{\sqrt{2}}\sin(\sqrt{2}u), \frac{u}{\sqrt{2}}) \end{aligned} \tag{15.6}$$

dove u è la distanza dall'origine e v è l'angolo compreso tra l'asse z e il piano. Dal momento che $\phi_u = \begin{bmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{bmatrix}$, $\phi_v = \begin{bmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u \neq 0$ si ha che ϕ_u e ϕ_v sono linearmente indipendenti e dunque opportune restrizioni di ϕ sono parametrizzazioni locali. La I forma fondamentale è

$$I_\phi = \begin{bmatrix} \langle \phi_u, \phi_u \rangle & \langle \phi_u, \phi_v \rangle \\ \langle \phi_u, \phi_v \rangle & \langle \phi_v, \phi_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}. \tag{15.7}$$

Allo stesso modo $\psi_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{2}v) \\ \sin(\sqrt{2}v) \\ 0 \end{bmatrix}$, $\psi_v = \begin{bmatrix} -u(\sqrt{2}v) \\ u\cos(\sqrt{2}v) \\ 0 \end{bmatrix}$ e $u \neq 0$ si ha che ψ_u e ψ_v sono linearmente indipendenti e dunque opportune restrizioni di ψ sono parametrizzazioni locali. La I forma fondamentale è

$$I_\psi = \begin{bmatrix} \langle \psi_u, \psi_u \rangle & \langle \psi_u, \psi_v \rangle \\ \langle \psi_u, \psi_v \rangle & \langle \psi_v, \psi_v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{bmatrix}. \tag{15.8}$$

Poichè $\mathrm{Im}(\phi) = H\backslash\{0\}$ e $\mathrm{Im}(\psi) = Z$ si ha che $H\backslash\{0\}$ è localmente isometrico a Z in quanto ϕ e ψ hanno I forma fondamentale associata identica. Dal momento che H è omogeneo posso sostituire $H \setminus \{0\}$ con H.

Definizione 15.5.

Data una superficie S, allora denotiamo con $Isom(S)$ l'insieme delle isometrie di S in sè.

Proposizione 15.0.46.
L'insieme delle isometrie $Isom(S)$ è un gruppo con la composizione.

Dimostrazione.
Se f e g sono isometrie componibili, allora $f \circ g$ è un'isometria, in quanto $d(f \circ g) = df \circ dg$. Inoltre un'isometria fra spazi euclidei è un isomorfismo, quindi per il Teorema 8.0.27 (di Invertibilità Locale), se f è un'isometria, allora è un diffeomorfismo locale bigettivo, per cui f^{-1} è C^∞. La tesi segue dal fatto che $d(f_p^{-1}) = d(f_p)^{-1}$. $\square$

Definizione 15.6. (Superficie Omogenea)
Una superficie S si dice omogenea se le $Isom(S)$ agiscono transitivamente su S.

Capitolo 16

Sedicesima Lezione

Definizione 16.1. (Grandezza Intrinseca)
Una grandezza (di teoria delle superfici) si dice **intrinseca** se dipende solo dal tipo di (locali) isometrie della superficie. Quando si tratti di grandezza definita in coordinate, essa è intrinseca quando dipende solo dai coefficienti della I forma fondamentale (e dalle loro derivate).

Esempio 14.
La distanza intrinseca è intrinseca.
La restrizione della distanza euclidea di $\mathbb{R}^3$, cioè $d(x,y) = \|x-y\|$ non è intrinseca. Basta infatti prendere una porzione di cilindro e una di piano.
La curvatura media **non** è intrinseca, è 0 nel piano e $\pm\frac{1}{2}$ nel cilindro.

Corollario 16.0.47. *Piano, sella e sfera non sono localmente isometrici.*

Osservazione 36. Ciò da una risposta negativa al problema fondamentale della cartografia.

Definizione 16.2. (Simboli di Christoffel)
Fissata una parametrizzazione $x\colon \Omega \to U \subseteq S$, $\forall q \in \Omega$ si ha che $\{x_u(q), x_v(q), N(x(q))\}$

è una base di $\mathbb{R}^3$ per cui esistono funzioni

$$\Gamma_{ij}^k \colon \Omega \to \mathbb{R} \tag{16.1}$$

con $i, j, k \in \{1, 2\}$ tali che:

$$\begin{cases} x_{uu} = \Gamma_{11}^1 x_u + \Gamma_{11}^2 x_v + eN \\ x_{uv} = \Gamma_{12}^1 x_u + \Gamma_{12}^2 x_v + fN \\ x_{vv} = \Gamma_{22}^1 x_u + \Gamma_{22}^2 x_v + gN \end{cases} . \tag{16.2}$$

I Γ_{ij}^k sono i simboli di Christoffel relativi a x.

Osservazione 37.

Dal momento che $x_{uv} = x_{vu}$ allora $\Gamma_{12}^k = \Gamma_{21}^k$ per $k \in \{1, 2\}$.

Teorema 16.0.48. *I simboli di Christoffel sono intrinseci.*

Dimostrazione. Prendendo la prima uguaglianza si ha

$$\langle x_{uu}, x_u \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_u, x_v \rangle + e \underbrace{\langle N, x_u \rangle}_{=0} = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F \tag{16.3}$$

ma

$$\langle x_{uu}, x_u \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, x_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \tag{16.4}$$

allora

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F. \tag{16.5}$$

Inoltre

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle x_u, x_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle x_v, x_v \rangle + e \underbrace{\langle N, x_v \rangle}_{=0} = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G \tag{16.6}$$

ma

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle x_u, x_v \rangle - \langle x_u, x_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\langle x_u, x_u \rangle = F_u - \frac{1}{2}E_v \quad (16.7)$$

e dunque

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G. \quad (16.8)$$

Si ha dunque un sistema lineare in due incognite, Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2, la cui matrice dei coefficienti è

$$I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \quad (16.9)$$

che è invertibile e i cui termini sono derivate di E, F, G. Questo dimostra che Γ_{11}^1 e Γ_{11}^2 sono intrinseche.

Gli altri casi si dimostrano analogamente utilizzando la seconda e la terza uguaglianza. □

Osservazione 38. Γ_{ij}^k si scrivono esplicitamente nei termini di E, F, G e delle loro derivate.

Possiamo adesso dimostrare il

Teorema 16.0.49. *(Egregium di Gauss)*
Se $f\colon S \to S'$ è una locale isometria allora

$$K(p) = K(f(p)) \quad (16.10)$$

$\forall p \in S$. Ovvero la curvatura di Gauss è intrinseca.

Osservazione 39. Questo fatto è abbastanza inaspettato dal momento che la curvatura di Gauss è prodotto delle curvature principali che non sono quantità instrinseche ma dipendenti dal vettore normale.

Dimostrazione.

<u>Passo fondamentale</u>: scrivere $(x_{uu})_v = (x_{vv})_u$ ed uguagliare i coefficienti di x_v.

Poichè

$$x_{uu} = \Gamma^1_{11} x_u + \Gamma^2_{11} x_v + eN \tag{16.11}$$

allora

$$(x_{uu})_v = (\Gamma^1_{11})_v x_u + \Gamma^1_{11} x_{uv} + (\Gamma^2_{11})_v x_v + \Gamma^2_{11} x_{vv} + e_v N + e N_v. \tag{16.12}$$

Sia

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{16.13}$$

la matrice che rappresenta dN rispetto a x_u, x_v.

Allora

$$N_v = dN(x_v) = a_{12} x_u + a_{22} x_v. \tag{16.14}$$

Dunque sostituendo in $(x_{uu})_v$ le espressioni note per x_{uv}, x_{vv} e quella di N_v appena trovata, troviamo come coefficiente di x_v

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + e a_{22}. \tag{16.15}$$

Facendo la stessa cosa con

$$x_{uv} = \Gamma^1_{12} x_u + \Gamma^2_{12} x_v + fN \tag{16.16}$$

si ottiene che il coefficiente di x_v per $(x_{uv})_u$ è

$$\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + (\Gamma^2_{12})^2 + f a_{21}. \tag{16.17}$$

Uguagliando i coefficienti si ottiene

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} + ea_{22} = \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + (\Gamma^2_{12})_u + (\Gamma^2_{12})^2 + fa_{21} \tag{16.18}$$

da cui si conclude che $ea_{22} - fa_{21}$ è una quantità intrinseca dal momento che lo sono i simboli di Christoffel.

Ora

$$\begin{aligned} A = -\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} -G & F \\ F & -E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} * & * \\ eF - fE & fF - gE \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16.19}$$

e dunque

$$\begin{aligned} ea_{22} - fa_{21} &= \frac{1}{EG - F^2} \left(e(fF - gE) - f(eF - fE)\right) = \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \left(\cancel{efF} - egE - \cancel{efF} - f^2 E\right) = \\ &= E\frac{-eg + f^2}{EG - F^2} = -KE \end{aligned} \tag{16.20}$$

dunque $K = \dfrac{fa_{21} - ea_{22}}{E}$ e quindi è intrinseca. $\square$

Definizione 16.3. (Parametrizzazione ortogonale)
La parametrizzazione x si dice **ortogonale** se $x_u \perp x_v$ in ogni punto, cioè $F \equiv 0$.

Nei casi in cui si abbia una parametrizzazione ortogonale i conti appena fatti si semplificano considerevolmente dal momento che la I forma fondamentale è diagonale. I conti sono più semplici soprattuto nel calcolare $ea_{22} - fa_{21}$ in funzione di $E, F = 0, G$ e derivate.

Si ottiene la seguente formula per K

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right). \tag{16.21}$$

Osservazione 40. Su aperti del piano (o più in generale) è possibile imporre metriche arbitrarie assegnando punto per punto un prodotto scalare definito positivo. Avere un'espressione di E, F, G è un primo passo per definire K in questo contesto esteso.

Esempio 15. Dato $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ aperto impongo su $T_{(x,y)}(H)$ la metrica

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}. \tag{16.22}$$

Questo è un modello del piano iperbolico il quale è completo con la distanza intrinseca. Inoltre l'identità $H \to H$ è una parametrizzazione ortogonale di H (con la metrica iperbolica) con I forma fondamentale

$$I = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{bmatrix} \tag{16.23}$$

e quindi

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right) = -1. \tag{16.24}$$

Capitolo 17

Diciassettesima Lezione

Definizione 17.1. (Campo Lungo Una Curva)
Siano S una superficie e $\gamma\colon I \to S$ una curva. Un campo lungo γ è una mappa $V\colon I \to \mathbb{R}^3$ di classe C^∞ tale che $V(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$ $\forall t \in I$. Denoteremo con $\mathcal{T}_\gamma$ l'insieme dei campi lungo γ.

La derivata di V potrebbe non essere più un campo ma basta fare una proiezione sul piano tangente.

Definizione 17.2. (Derivata Covariante)
Sia $\pi_t\colon \mathbb{R}^3 \to T_{\gamma(t)}(S)$ la proiezione ortogonale $\forall t \in I$. Poniamo

$$\frac{DV}{dt} = \pi_t(V'(t)) \tag{17.1}$$

$\forall t \in I$, questa è la derivata covariante di V.

Definizione 17.3. (Campo Parallelo)
Un campo si dice parallelo se $\dfrac{DV}{dt} = 0$, cioè se $V'(t) \perp T_{\gamma(t)}(S)$ $\forall t \in I$.

Vorremmo dire quali sono i campi costanti.

Proposizione 17.0.50.
Siano $V, W \in \mathcal{T}_\gamma$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ *allora* $\dfrac{D}{dt}\colon \mathcal{T}_\gamma \to \mathcal{T}_\gamma$ *è lineare e verifica:*

1. $\dfrac{D}{dt}(fV) = f'V + f\dfrac{DV}{dt}$;
2. $\dfrac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle = \langle \dfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \dfrac{DW}{dt}\rangle$;

In particolare, V *parallelo* $\Rightarrow \|V\|$ *costante.*

Dimostrazione. La linearità di $\dfrac{D}{dt}$ è ovvia.

1. Vale Leibiniz componente per componente $(fV)' = f'V + fV'$.

   Dunque $\forall t \in I$

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(fV)(t) &= \pi_t((fV)'(t)) = \pi_t(f'(t)V(t) + f(t)V'(t)) = \\ &= f'(t)\pi_t(V(t)) + f(t)\pi_t(V'(t)) = f'(t)V(t) + f(t)\frac{DV}{dt}(t).\end{aligned} \tag{17.2}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle V(t), W(t)\rangle &= \langle V'(t), W(t)\rangle + \langle V(t), W'(t)\rangle = \\ &= \langle \frac{DV}{dt}(t), W(t)\rangle + \langle V(t), \frac{DW}{dt}(t)\rangle\end{aligned} \tag{17.3}$$

   in quanto, essendo campi, $V, W \in T_{\gamma(t)}(S)$ e vale $\langle a, b\rangle = \langle \pi_t(a), b\rangle$ $\forall b \in T_{\gamma(t)}(S)$.

Infine V parallelo $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\|V\|^2 = \dfrac{d}{dt}\langle V, V\rangle = 2\langle \dfrac{DV}{dt}, V\rangle = 0 \Rightarrow \|V\|$ costante.

□

Supponiamo che $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq U$ aperto e $x\colon \Omega \to U$ parametrizzazione, studiamo la derivata covariante in coordinate. Sia $V \in \mathcal{T}_\gamma$ tale che

$$V(t) = a(t)x_u(\gamma(t)) + b(t)x_v(\gamma(t)) \tag{17.4}$$

con $a, b\colon I \to \mathbb{R}$ e sia $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$. Allora

$$\begin{aligned} V'(t) =& a'x_u + b'x_v + a(x_{uu}u' + x_{uv}v') + b(x_{vu}u' + x_{vv}v') = \\ =& a(u'\Gamma^1_{11}x_u + u'\Gamma^2_{11}x_v + v'\Gamma^1_{12}x_u + v'\Gamma^2_{12}x_v) \\ &+ b(u'\Gamma^1_{12}x_u + u'\Gamma^2_{12}x_v + v'\Gamma^1_{22}x_u + v'\Gamma^2_{22}x_v) + \\ &+ a'x_u + b'x_v + \text{componenti normali} \end{aligned} \tag{17.5}$$

dunque

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt}(t) =& x_u(a' + au'\Gamma^1_{11} + av'\Gamma^1_{12} + bu'\Gamma^1_{21} + bv'\Gamma^1_{22}) + \\ &+ x_v(b' + au'\Gamma^2_{11} + av'\Gamma^2_{12} + bu'\Gamma^2_{21} + bv'\Gamma^2_{22}) \end{aligned} . \tag{17.6}$$

Osservazione 41. Un modo per ricordare questa espressione è, considerando Γ^k_{ij}, ricordarsi che

1. Ho a' con x_u e b' con x_v;
2. $k = 1$ se davanti ho x_u mentre $k = 2$ se davanti ho x_u;
3. $i = 1$ se ho a mentre $i = 2$ se ho b;
4. $j = 1$ se ho u' mentre $j = 2$ se ho v';

e, a questo punto, esaurire tutti i casi possibili.

Proposizione 17.0.51.

La derivata covariante è intrinseca, cioè se $f\colon S_1 \to S_2$ *è un'isometria locale,* $\gamma_1\colon I \to S_1$, $\gamma_2 = f \circ \gamma_1$,$V_1 \in \mathcal{T}_{\gamma_1}$ *e* $V_2(t) = df_{\gamma_1(t)}(V_1(t))$ *allora*

$$\frac{DV_2}{dt}(t) = df_{\gamma_1(t)}(\frac{DV_1}{dt}(t)). \tag{17.7}$$

In particolare V_1 *è parallelo* $\iff$ *lo è* V_2.

Dimostrazione. Segue dal fatto che $\dfrac{DV}{dt}(t)$ dipende solo da $V|_{(t-\epsilon,t+\epsilon)}$ e dall'intrinsecità dei simboli di Christoffel. □

Corollario 17.0.52.

Sia $\gamma\colon I \to S$ *una curva, fissato* $t_0 \in I$ *allora* $\forall v_0 \in T_{\gamma(t_0)}(S)$ $\exists!$ *campo parallelo* $V \in \mathcal{T}_\gamma$ *tale che* $V(t_0) = v_0$.

Dimostrazione. Dimostriamo esistenza e unicità locale.
In coordinate se $v_0 = a_0 x_u + b_0 x_v$ e $V = a x_u + b x_v$ allora V è parallelo e $V(t_0) = v_0$ se e solo se

$$\begin{cases} a' = -(au'\Gamma^1_{11} + av'\Gamma^1_{12} + bu'\Gamma^1_{21} + bv'\Gamma^1_{22}) \\ b' = -(au'\Gamma^2_{11} + av'\Gamma^2_{12} + bu'\Gamma^2_{21} + bv'\Gamma^2_{22}) \\ a(t_0) = a_0 \\ b(t_0) = b_0 \end{cases} . \tag{17.8}$$

Questo è un problema di Cauchy del primo ordine con soluzione unica, la quale è globalmente definita dal momento che l'equazione è lineare. Usando ciò si dimostra che il campo parallelo con $V(t_0) = v_0$ esiste ed è unico su tutto I. □

Definizione 17.4. (Geodetica)
$\gamma\colon I \to S$ si dice geodetica se $\dfrac{D\gamma'}{dt} = 0 \ \forall t \in I$, cioè se γ' è un campo parallelo, ovvero se $\gamma'' \perp T_{\gamma(t)}(S)$.

Teorema 17.0.53.
Valgono le seguenti:

1. *Se γ è geodetica allora $\|\gamma'(t)\|$ è costante.*
2. *Dati $p \in S$ e $v_0 \in T_p(S)$ allora $\exists!$ geodetica massimale $\gamma\colon (-a, b) \to S$ con $a, b > 0$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v_0$.*
3. *Le isometrie locali portano geodetiche in geodetiche.*

Dimostrazione.

1. Segue direttamente dal fatto che γ' è parallelo.
2. Come fatto in precedenza scelgo coordinate intorno a p. Ora le incognite sono $u(t)$ e $v(t)$ quindi se $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ allora $\gamma' = u'x_u + v'x_v$ e devo imporre $\dfrac{D\gamma'}{dt} = 0$. Sostituendo $a = u'$ e $b = v'$ in (17.8) ottengo quindi

$$\begin{cases} u'' = -((u')^2\Gamma^1_{11} + 2u'v'\Gamma^1_{12} + (v')^2\Gamma^1_{22}) \\ v'' = -((u')^2\Gamma^2_{11} + 2u'v'\Gamma^2_{12} + (v')^2\Gamma^2_{22}) \end{cases} . \tag{17.9}$$

   Per Cauchy questo sistema ha un'unica soluzione locale una volta fissati p (cioè $u(0), v(0)$) e v_0 (cioè $u'(0), v'(0)$ e dunque $V(0)$) da cui la tesi.
3. Segue dall'intrinsecità del parallelismo.

□

Esercizio 22. (Geodetiche del piano)

Siano $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, γ curva, $V \in \mathcal{T}_\gamma$. Poichè $T_S = S \; \forall p \in S$ si ha che $V(t) \in S \; \forall t \in I$ e, poichè S è un piano,

$$V'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \in S = T_{\gamma(t)}(S). \tag{17.10}$$

Dunque $\frac{DV}{dt} = V'$ e quindi V è parallelo $\iff$ $V' = 0$, cioè V è costante. Inoltre γ è geodetica $\iff$ γ' è costante $\iff$ $\gamma(t) = p + tv$.

Esercizio 23. (Geodetiche del cilindro)

Sia $S^1 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, poichè

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to S \\ (x, y) &\to (\cos x, \sin x, y) \end{aligned} \tag{17.11}$$

è una locale isometria allora tutte le curve della forma

$$t \to f(p+tv) = f((p_1+tv_1), (p_2+tv_2)) = (\cos(p_1+tv_1), \sin(p_1+tv_1), (p_2+tv_2)) \tag{17.12}$$

sono geodetiche, in particolare:

- rette verticali se $v_1 = 0$;
- circonferenza ad altezza costante se $v_2 = 0$;
- eliche circolari rette altrimenti.

Dal momento che le rette sono tutte e sole le geodetiche del piano, f è suriettiva e df_p è suriettiva $\forall p$ sul piano allora quelle appena elencate sono tutte e sole le geodetiche del cilindro.

Esercizio 24. (Geodetiche della sfera)
Sia $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ allora $\gamma\colon I \to S^2$ è geodetica $\iff$ è una porzione di cerchio massimo parametrizzata a velocità costante $\iff$ γ ha velocità di modulo costante e $\gamma(I) \subseteq S^2 \cap H$ con H piano vettoriale. Infatti è immediato verificare che tali curve hanno accellerazione diretta verso l'origine e dunque sono geodetiche. Inoltre $\forall p \in S^2$, $v \in T_p(S^2) = p^\perp$, esiste una tale curva γ con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$ e perciò queste sono tutte le geodetiche di S^2.

Capitolo 18

Diciottesima Lezione

Sia $\gamma(t) = (\phi(t), 0, \psi(t))$ con $\phi(t) > 0$ con una curva P.L.A. embedded (vuol dire che è un'immersione iniettiva) che genera la superficie di rotazione S parametrizzata da

$$x(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v)). \tag{18.1}$$

Cerchiamo le equazioni che devono rispettare $u(t)$ e $v(t)$ affinchè
$\alpha(t) = x(u(t), v(t))$ sia geodetica.

Osservazione 42. Una qualsiasi curva a valori in S si solleva ad una curva globale in $\mathbb{R} \times I$.

Quindi α è geodetica $\iff$ $\alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)}(S)$ $\forall t$ ovvero se e solo se $\langle \alpha''(t), x_u \rangle = \langle \alpha''(t), x_v \rangle = 0$. Abbiamo $\alpha' = u'x_u + v'x_v$ quindi

$$\alpha'' = u''x_u + v''x_v + (u')^2 x_{uu} + 2u'v'x_{uv} + (v')^2 x_{vv} \tag{18.2}$$

inoltre

$$x_u = \begin{bmatrix} -\phi(v)\sin u \\ \phi(v)\cos u \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$x_v = \begin{bmatrix} \phi'(v)\cos u \\ \phi'(v)\sin u \\ \psi'(v) \end{bmatrix} \tag{18.3}$$

e

$$x_{vv} = \begin{bmatrix} \phi''(v)\cos u \\ \phi''(v)\sin u \\ \psi''(v) \end{bmatrix}$$
$$x_{uv} = \begin{bmatrix} -\phi'(v)\sin u \\ \phi'(v)\cos u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18.4}$$
$$x_{uu} = \begin{bmatrix} -\phi(v)\cos u \\ -\phi(v)\sin u \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi
$\langle x_u, x_u\rangle = \phi^2(v)$, $\langle x_u, x_v\rangle = 0$,$\langle x_v, x_v\rangle = 1$,$\langle x_u, x_{uu}\rangle = 0$,
$\langle x_u, x_{uv}\rangle = \phi\phi'$,$\langle x_u, x_{vv}\rangle = 0$,$\langle x_v, x_{uu}\rangle = -\phi\phi'$,$\langle x_v, x_{uv}\rangle = 0$ e
$\langle x_v, x_{vv}\rangle = \phi'\phi'' + \psi'\psi'' = \frac{1}{2}((\phi')^2 + (\psi')^2) = 0$. Dunque α è geodetica se e solo se

$$\begin{cases} 0 = \langle \alpha'', x_u\rangle = u''\phi^2 + 2u'v'\phi\phi' \\ 0 = \langle \alpha'', x_v\rangle = v'' - (u')^2\phi\phi' \end{cases} \tag{18.5}$$

e quindi se e solo se

$$\begin{cases} u''(t) = \dfrac{[-2u'(t)v'(t)\phi'(v(t))]}{\phi(v(t))} \\ v''(t) = u'(t)^2\phi(v(t))\phi'(v(t)) \end{cases} . \tag{18.6}$$

Proposizione 18.0.54. *Tutti i meridiani parametrizzati a velocità costante sono geodetiche, mentre il parallelo corrispondente al punto* $(\phi(t_0), 0, \psi(t_0))$ *è una geodetica se e solo se* $\phi'(t_0) = 0$.

Dimostrazione. Un meridiano è una curva del tipo $t \to x(u_0, v(t))$ cioè $u(t) \equiv u_0$ per cui $u'(t) = u''(t) = 0$ $\forall t$. Dunque la prima equazione è soddisfatta e $v''(t) = 0$ $\forall t$ cioè $v(t) = t_0 + at$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. Tutti i meridiani sono quindi geodetiche, basta parametrizzarli a velocità costante.
Un parallelo è una curva del tipo $t \to x(u(t), v_0)$ cioè $v(t) \equiv u_0$ per cui $v'(t) = v''(t) = 0$ $\forall t$. Le equazioni diventano

$$\begin{cases} u''(t) = 0 \\ v''(t) = u'(t)^2 \underbrace{\phi(v_0)}_{>0} \phi'(v_0) \end{cases} . \tag{18.7}$$

Ora se α è geodetica ha velocità di norma costante per cui se $u'(t) = 0$ per qualche t allora $u'(t) = v'(t) = 0$ per qualche t. Ne deduco che o α è costante oppure $\phi(v_0) = 0$. □

Corollario 18.0.55. *Una geodetica su una superficie di rotazione o è costante o è un meridiano o ha velocità angolare mai nulla (in particolare non cambia mai il verso del suo spiraleggiare intorno all'asse z).*

Dimostrazione. Se così non fosse la geodetica α che vuole la tesi avrebbe in un punto la stessa velocità di un meridiano passante per quel punto e dovrebbe coincidere con esso per unicità delle geodetiche. $\square$

Teorema 18.0.56. *(Clairaut)*
Sia $\alpha\colon I \to S$ una geodetica su una superficie di rotazione, allora le quantità $R^2\dot{\theta}$ e $R\cos\beta$ sono costanti lungo α dove R è la distanza dall'asse z, $\dot{\theta}$ è la velocità angolare e β è l'angolo tra la geodetica e il parallelo passante per il punto considerato. In altri termini $R^2\dot{\theta}$ e $R\cos\beta$ sono integrali primi.

Dimostrazione. Posso supporre α P.L.A., mostro intanto che $R^2\dot{\theta} = R\cos\beta$. Infatti, essendo $\alpha(t) = x(u(t), v(t))$, per definizione si ha $R(t) = \phi(v(t))$ e $\theta(t) = u(t)$. Dal momento che

$$\cos\beta = \frac{\langle \alpha, x\rangle}{\|\alpha\|\|x\|} = \frac{\langle \alpha', x_u\rangle}{\underbrace{\|\alpha'\|}_{=1}\|x_u\|} \tag{18.8}$$

si ha dunque

$$\cos\beta = \frac{\langle \alpha', x_u\rangle}{\|x_u\|} = \frac{\langle u'x_u + v'x_v, x_u\rangle}{\|x_u\|} = u'\|x_u\| = u'(t)\phi(v(t)) = \dot{\theta}R. \tag{18.9}$$

Dunque puntualmente $R^2\dot{\theta} = R\cos\beta$. Rimane da far vedere che $R^2\dot{\theta}$ è costante. Si ha

$$\frac{d}{dt}(R^2\dot{\theta}) = ((\phi\circ v)^2 u')' = 2\phi\phi' v' u' + \phi^2 u'' = 0 \tag{18.10}$$

a causa di (18.6). $\square$

Teorema 18.0.57. *Sia S una superficie con distanza intrinseca d e sia $\alpha\colon [0,1] \to S$ una curva, allora:*

1. *Se $L(\alpha) = d(\alpha(0), \alpha(1))$ (cioè α è minimizzante) allora α è una geodetica a meno di riparametrizzazione;*

2. *Se* α *è geodetica* $\forall t \in [0,1]$ $\exists \epsilon$ *tale che* $d(\alpha(t_1), \alpha(t_2)) = L(\alpha|_{[t_1,t_2})$ $\forall t_1, t_2 \in (t-\epsilon, t+\epsilon)$*, cioè* α *è localmente minimizzante.*

Teorema 18.0.58. *(Hopf-Rinow)*
Sia S *una superficie con distanza intrinseca* d*, allora se lo spazio metrico* (S, d) *è completo vale che:*

1. *Tutte le geodetiche di* S *sono definite su* $\mathbb{R}$*;*

2. $\forall p, q \in S$ $\exists$ *geodetica minimizzante* α *con* $\alpha(0) = p$ *e* $\alpha(1) = q$*.*

Osservazione 43. $S \subseteq \mathbb{R}^3$ implica che (S, d) sia completo. Dunque Hopf-Rinow vale se S è chiusa. Ciò segue dal fatto che $d(p, q) \geq \|p - q\|$ dunque una successione di Cauchy in (S, d) lo è in $\mathbb{R}^3$.

Capitolo 19

Diciannovesima Lezione

Esercizio 25. Si calcoli la curvatura dell'elicoide $S = x(\mathbb{R}^2)$ parametrizzato da

$$x(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u) \tag{19.1}$$

dopo aver dimostrato che S è effettivamente una superficie con parametrizzazione globale x. Si dica se S è localmente isometrico alla catenoide.

Svolgimento

Mostriamo che x è un diffeomorfismo sull'immagine, il che è equivalente a dire che S è una superficie con parametrizzazione x. Ovviamente x è di classe C^∞ ed è anche iniettiva in quanto $x(u, v) = x(u', v')$ implica $u = u'$ (dalla terza coordinata) e $v = v'$ (dalla prima e dalla seconda coordinata in quanto $\sin u$ e $\cos u$ non si annullano simultaneamente). Esiste dunque l'inversa insiemistica x^{-1} ed è facile verificare che è localmente C^∞ infatti

$$x^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(x_3, \frac{x_1}{\cos x_3}\right) \text{ se } \cos x_3 \neq 0. \tag{19.2}$$

In alternativa, si può verificare che x è un'immersione (che andrà comunque fatto) iniettiva e che è un omeomorfismo sull'immagine.

Troviamo ora la curvatura di Gauss, calcoliamo anzitutto le derivate prime

$$x_u = \begin{bmatrix} -v \sin u \\ v \cos u \\ 1 \end{bmatrix}, x_v = \begin{bmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{bmatrix} \tag{19.3}$$

e seconde

$$x_{uu} = \begin{bmatrix} -v \cos u \\ -v \sin u \\ 0 \end{bmatrix}, x_{uv} = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{bmatrix}, x_{vv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{19.4}$$

Possiamo quindi trovare la mappa di Gauss

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{\|x_u \wedge x_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{bmatrix} \tag{19.5}$$

la I forma fondamentale

$$I = \begin{bmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19.6}$$

e la II forma fondamentale

$$II = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19.7}$$

Quindi in queste coordinate

$$dN = -I^{-1} II = -\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{1+v^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19.8}$$

Il polinomio caratteristico di dN è $\lambda^2 - \frac{1}{(1+v^2)^2} = 0$ dunque le curvature principali sono $k_1 = \frac{1}{1+v^2}$ e $k_2 = -\frac{1}{1+v^2}$ e quindi la curvatura di Gauss è $K(x(u,v)) = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$.

Osservazione 44. x_u, x_v non sono mai direzioni principali. Calcoliamo le direttrici principali in $(0,0,0)$. Cerco gli autovettori di dN le cui coordinate rispetto a $\{x_u, x_v\}$ sono gli autovettori di

$$dN(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19.9}$$

e quindi $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Dunque le direzioni principali sono generate da $x_u + x_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x_u - x_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ricordiamo che la catenoide è la superficie di rotazione parametrizzata da

$$y(a,b) = (\cosh b \cos a, \cosh b \sin a, b) \tag{19.10}$$

con curvatura di Gauss $K = -\frac{1}{\cosh^4 b}$.

Per il Teorema 16.0.49 (Egregium di Gauss) una locale isometria f tra due superfici deve verificare $K(f(p)) = K(p)$. Se f va dall'elicoide al catenoide

$$\begin{cases} K(x(u,v)) = -\frac{1}{(1+v^2)^2} \\ K(y(a,b)) = -\frac{1}{\cosh^4 b} \end{cases} \tag{19.11}$$

da cui $1+v^2 = \cosh^2 b$ cioè $v^2 = \sinh^2 b$ e dunque posso provare con $v = \sinh b$.

Questo suggerisce di cambiare la parametrizzazione x con

$$\begin{aligned} z\colon \mathbb{R}^2 &\to S \\ (u,v) &\mapsto (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, u) \end{aligned} \tag{19.12}$$

la cui I forma fondamentale è

$$I = \begin{bmatrix} 1+\sinh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{bmatrix} \tag{19.13}$$

che è proprio la I forma fondamentale della catenoide e dunque abbiamo dimostrato che le due superfici sono isometriche. In realtà abbiamo dimostrato di più ovvero che $y \circ z^-1\colon$ elicoide $\to$ catenoide è un'isometria locale.

Esercizio 26. Sia S una superficie e $p \in S$ dimostrare:

1. Se $K(p) > 0$ allora S è localmente da una sola parte di $p + T_p(S)$;
2. Se $K(p) < 0$ allora S interseca entrambi i semispazi aperti delimitati da $p + T_p(S)$.

Svolgimento

Sia N_p un versore normale in p. I due semispazi in questione sono

$$H_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, N_p\rangle > \langle N_p, p\rangle\} = f^{-1}((\langle x, N_p\rangle, +\infty)) \tag{19.14}$$

e

$$H_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, N_p\rangle < \langle N_p, p\rangle\} = f^{-1}((-\infty, \langle x, N_p\rangle)) \tag{19.15}$$

dove $f(x) = \langle x, N_p\rangle$. Quindi f sta localmente da una parte del tangente affine se e solo se ha un massimo o minimo locale in p (penso $f\colon S \to \mathbb{R}$) e sta da ambo le parti se p è un punto di sella. Fissata una parametrizzazione $x\colon \Omega \to$

$U \subseteq S$ intorno a p, voglio capire se $f \circ x$ ha massimi/minimi locali o selle. Allora $f \circ x \colon \Omega \to \mathbb{R}$ dunque $f(x(q)) = \langle x(q), N_p \rangle$ e $df = (\langle x_u, N_p \rangle, \langle x_v, N_p \rangle)$. Quindi l'hessiana di f è

$$H_f = \begin{bmatrix} \langle x_{uu}, N_p \rangle & \langle x_{uv}, N_p \rangle \\ \langle x_{uv}, N_p \rangle & \langle x_{vv}, N_p \rangle \end{bmatrix}. \tag{19.16}$$

In $x^{-1}(p)$ si ha che $df = 0$ e poichè $N_p \perp x_u$ e $N_p \perp x_v$ in p per costruzione l'hessiana è proprio la II forma fondamentale. La tesi segue dal fatto che il segno di K è uguale al segno di $\det II$.

Esercizio 27.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie compatta, allora $\exists p \in S$ con $K(p) \geq 0$.

Svolgimento

Sia

$$\begin{aligned} f \colon S &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto \|p\|^2 \end{aligned} \tag{19.17}$$

allora f è C^∞ e per compattezza ha massimo. Sia ora p_0 un punto di massimo, voglio far vedere che $K(p_0) \leq 0$.

Sia $\gamma \colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una qualsiasi curva P.L.A. con $\gamma(0) = p_0$ allora $f \circ \gamma$ ha massimo in 0. Perciò $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ e $(f \circ \gamma)''(0) \leq 0$. Esplicitamente ho $f(\gamma(t)) = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle$ la cui derivata prima è $(f \circ \gamma)'(t)) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle$ che valutata in 0 mi da $(f \circ \gamma)'(0) = 2\langle \gamma'(0), p_0 \rangle = 0$. Poichè questo vale $\forall \gamma$ con $\gamma(0) = p_0$ ne deduco che $N(p_0) = \dfrac{p_0}{\|p_0\|}$. Derivando ancora ottengo $(f \circ \gamma)''(t) = 2\langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle + 2\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2\langle \gamma''(t), \gamma(t) \rangle$.

Valutando in 0 ottengo

$$0 \geq (f \circ \gamma)''(0) = 2\langle \gamma''(0), p_0 \rangle = 2\langle \gamma''(0), \|p_0\| N(p_0) \rangle = 2\|p_0\| \langle \gamma''(0), N(p_0) \rangle \tag{19.18}$$

dunque $\langle \gamma''(0), N(p_0) \rangle \leq 0$ cioè $K_n(\gamma) \leq 0$. In particolare se k_1 e k_2 sono le curvature principali in p_0, allora $k_1 \leq 0$ e $k_2 \leq 0$ per cui $K = k_1 k_2 \geq 0$.

Capitolo 20

Ventesima Lezione

Definizione 20.1. (Linea Integrale)
Dati una superficie S, un aperto $U \subseteq S$ e un campo tangente $X \in \mathcal{T}(U)$, una linea integrale per X è una curva $\gamma\colon I \to S$ tale che $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ $\forall t \in I$.

Definizione 20.2. (Integrale Primo)
Un integrale primo per X è una funzione $f\colon S \to \mathbb{R}$ tale che $f \circ \gamma$ sia costante per ogni curva integrale γ. Un integrale primo si dice non banale se $df \neq 0$ (cioè df suriettivo) in ogni punto.

Proposizione 20.0.59. *Se $p \in U \subseteq S$ aperto, $X \in \mathcal{T}(U)$ e $X(p) \neq 0$ allora a meno di restringere U esiste un integrale primo non banale $f\colon U \to \mathbb{R}$.*

Dimostrazione.
A meno di restringere U, considero $x\colon \Omega \to U$, allora $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$ è integrale se e solo se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ cioè $u'x_u + v'x_v = ax_u + bx_v$ dove a e b sono le coordinate di X rispetto al frame locale x_u, x_v. Dunque questa

equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} u'(t) = a(\gamma(t)) \\ v'(t) = b(\gamma(t)) \end{cases} . \tag{20.1}$$

Quindi per il teorema di Cauchy, a meno di restringere ancora U, posso supporre che $\exists F \colon U \times (-\epsilon, \epsilon) \to S$ di classe C^∞ tale che $F(q, \cdot)$ è una linea integrale γ_q tale che $\gamma_q(0) = \phi$.
Scelgo $\alpha \colon (-\delta, \delta) \to U$ con $\alpha(0) = p$ e tale che $\alpha'(0)$ e $X(p)$ siano linearmente indipendenti (e quindi base di $T_p(S)$) e considero

$$H \colon (-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) \to S \tag{20.2}$$

con $H(s,t) = \gamma_{\alpha(s)}(t) = F(\alpha(s), t)$. Si ha che H è di classe C^∞ e si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial s}(0,0) = [\frac{d}{ds} F(\alpha(s), 0)]|_{s=0} = \alpha'(0) \\ \frac{\partial H}{\partial t}(0,0) = [\frac{d}{dt} F(\alpha(0), t)]|_{t=0} = [\frac{d}{dt} \gamma_{\alpha(0)}(t)]|_{t=0} = X(\alpha(0)) = X(p) \end{cases} . \tag{20.3}$$

Ora per costruzione $\alpha'(0)$ e $X(p)$ sono base di $T_p(S)$ e pertanto, essendo $X(p), \alpha'(0) \subseteq \mathrm{Im}(dH(0,0))$, ho che $dH_{(0,0)} \colon \mathbb{R}^2 \to T_p(S)$ è un isomorfismo e dunque, a meno di restringere ϵ, δ e U si ha che H è un diffeormorfismo tra $(-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon)$ e U. Se $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è la proiezione sulla prima coordinata, l'integrale primo è $\pi \circ H^{-1} \colon U \to \mathbb{R}$. □

Teorema 20.0.60. *Sia S superficie e $p \in S$, allora esistono coordinate ortogonali $x \colon \Omega \to U \ni p$ intorno a p, ovvero tali che $x_u \perp x_v$ nell'intorno.*

Dimostrazione. Ortonormalizzando un frame intorno a p ottengo un frame ortonormale (X, Y) su un intorno U di p. Per la proposizione appena fatta, a meno di restringere U esistono integrali primi non banali $f, g \colon U \to \mathbb{R}$ per

X e Y rispettivamente. Considero

$$\begin{aligned} F\colon U &\to \mathbb{R}^2 \\ q &\mapsto (f(q), g(q)) \end{aligned}. \tag{20.4}$$

Si ha che $dF_p\colon T_p(S) \to \mathbb{R}^2$ è un isomorfismo infatti $Ker(df_p)$ contiene $X(p)$ (f è costante sulle linee integrali di X) ed è 1-dimensionale in quanto f è non banale, dunque $Ker(df_p) = Span\langle X(p)\rangle$. Anche $Ker(dg_p) = Span\langle Y(p)\rangle$ e dunque $Ker(dF_p) = Ker(df_p) \cap Ker(dg_p) = \{0\}$ implica che dF_p è un isomorfismo.

Ora per il teorema di invertibilità locale a meno di restringere U ho una parametrizzazione $F^{-1}\colon \Omega \to U$. Ora $\forall q \in U$ $Ker(df_p) = Span\langle X(p)\rangle$ e $Ker(dg_p) = Span\langle Y(p)\rangle$ perciò

$$dF_q(X(q)) = (df_q(X(q)), dg_q(X(q))) = (0, \lambda_q) \tag{20.5}$$

con $\lambda_q \neq 0$ e

$$dF_q(Y(q)) = (df_q(Y(q)), dg_q(Y(q))) = (\mu_q, 0) \tag{20.6}$$

con $\mu_q \neq 0$. Invertendo dF_q otteniamo $F_u^{-1} = dF^{-1}(e_1)$ multiplo di $Y(q)$ e $F_v^{-1} = dF^{-1}(e_2)$ multiplo di $X(q)$. Dunque F^{-1} è una parametrizzazione ortogonale. $\square$

Sia S una superficie orientata e $\gamma\colon I \to S$ una curva PLA. Sia $v \in \mathcal{T}_\gamma$ tale che $\|v\| = 1$ $\forall t \in I$ e osserviamo che, poichè $v(t) \perp N(\gamma(t))$, una base ortonormale positiva di $T_{\gamma(t)}(S)$ è data da $v, \bar{v}$ dove $\bar{v} = (N \circ \gamma) \wedge v$.

Definizione 20.3. (Valore algebrico della derivata covariante)
Il valore algebrico della derivata covariante di v è il numero

$$\left[\frac{Dv(t)}{dt}\right] = \langle \frac{Dv(t)}{dt}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}. \tag{20.7}$$

Osservazione 45. Poichè $\|v\| = 1$ si ha che

$$0 = \frac{d}{dt}\langle v, v \rangle = 2\langle \frac{Dv}{dt}, v \rangle \tag{20.8}$$

dunque $\dfrac{Dv}{dt} \perp v$ e $\dfrac{Dv}{dt} \perp N$ e quindi

$$\frac{Dv(t)}{dt} = \left[\frac{Dv(t)}{dt}\right] \bar{v}. \tag{20.9}$$

Definizione 20.4. (Curvatura Geodetica)
Sia $\gamma\colon I \to S$ P.L.A. allora la curvatura geodetica di γ è data da

$$K_g(t) = \left[\frac{D\gamma'}{dt}\right] = \langle \gamma'', N \circ \gamma \rangle. \tag{20.10}$$

Osservazione 46. Si ha che $K_g \equiv 0 \iff \gamma$ è una geodetica P.L.A. . Infatti γ è una geodetica $\iff \dfrac{D\gamma'}{dt} = 0$ da cui la tesi.

Osservazione 47. Per ogni γ P.L.A. si ha $K^2 = K_n^2 + K_g^2$.

Infatti per definizione

$$
\begin{aligned}
K^2 &= \|\gamma''\| = \|\langle\gamma'', N\circ\gamma\rangle N\circ\gamma + \frac{D\gamma'}{dt}\|^2 = \\
&= \|K_n(N\circ\gamma) + \left[\frac{D\gamma'}{dt}\right]\bar{\gamma}'\|^2 = \|K_n(N\circ\gamma) + K_g\bar{\gamma}'\|^2 = \\
&= K_n^2 + K_g^2.
\end{aligned}
\tag{20.11}
$$

Siano ora $v, w \in \mathcal{T}_\gamma$, $\|v\| = \|w\| = 1$, $\bar{v} = N \wedge v$ e $\bar{w} = N \wedge w$. Poichè $v, \bar{v}$ è una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}(S)$, $\forall t$ si ha

$$w(t) = \langle w(t), v(t)\rangle v(t) + \langle w(t), \bar{v}(t)\rangle\bar{v}(t) \tag{20.12}$$

e poichè $\|w\| = 1$ ho $t \mapsto (\langle w(t), v(t)\rangle, \langle w(t), \bar{v}(t)\rangle)$ ha valori in S^1.
Poichè

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{R} \to S^1 \\
&\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)
\end{aligned}
\tag{20.13}
$$

è un rivestimento, questa funzione $I \to S^1$ si solleva ad una $\phi\colon I \to \mathbb{R}$ tale che

$$w(t) = \cos(\phi(t))v(t) + \sin(\phi(t))\bar{v}(t). \tag{20.14}$$

La funzione ϕ si chiama determinazione dell'angolo da v a w ed è continua e localmente C^∞, dunque C^∞.
Due determinazioni diverse differiscono per una costante $2k\pi$ per cui
$\phi(t_1) - \phi(t_0)$ è ben definito $\forall t_0, t_1 \in I$.

Lemma 20.0.61. *Siano v, w, ϕ come sopra allora*

$$\left[\frac{Dw}{dt}\right] = \left[\frac{Dv}{dt}\right] + \phi'. \tag{20.15}$$

Dimostrazione. Per definizione

$$\left[\frac{Dw(t)}{dt}\right] = \langle \frac{Dw(t)}{dt}, \bar{w}\rangle \tag{20.16}$$

e, come abbiamo visto, $w(t) = \cos(\phi(t))v(t) + \sin(\phi(t))\bar{v}(t)$. Quindi

$$\bar{w} = N \wedge w = \bar{v}\cos\phi - v\sin\phi \tag{20.17}$$

e dunque

$$\frac{Dw}{dt} = \frac{Dv}{dt}\cos\phi - \phi'\sin(\phi)v + \frac{D\bar{v}}{dt}\sin\phi - \phi'\cos(\phi)\bar{v}. \tag{20.18}$$

Ora

$$\begin{aligned}\langle \frac{Dw}{dt}, \bar{w}\rangle =& \langle \frac{Dv}{dt}, \bar{v}\rangle \cos^2\phi - \underbrace{\cancel{\phi'\sin(\phi)\langle v, \bar{v}\rangle}}_{v\perp\bar{v}} + \underbrace{\cancel{\langle \frac{D\bar{v}}{dt}, \bar{v}\rangle \cos\phi\sin\phi}}_{\|\bar{v}\|=1} + \\ &+ \underbrace{\langle \bar{v}, \bar{v}\rangle}_{=1} \phi'\cos^2\phi + 0 + \phi'\sin^2\phi - \langle \frac{D\bar{v}}{dt}, v\rangle \sin^2\phi + 0 = \\ =& \phi' + \langle \frac{Dv}{dt}, \bar{v}\rangle \cos^2\phi - \langle \frac{D\bar{v}}{dt}, v\rangle \sin^2\phi.\end{aligned} \tag{20.19}$$

Adesso $0 = \langle v, \bar{v}\rangle$ quindi

$$0 = \langle \frac{Dv}{dt}, \bar{v}\rangle + \langle \frac{D\bar{v}}{dt}, v\rangle \tag{20.20}$$

e dunque

$$\langle\frac{Dw}{dt}, \bar{w}\rangle = \phi' + \left[\frac{Dv}{dt}\right](\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \phi' + \left[\frac{Dv}{dt}\right] \tag{20.21}$$

$\square$

Capitolo 21

Ventunesima Lezione

Per tutta la lezione S sarà una superficie orientata con normale N.

Definizione 21.1. Sia $\gamma\colon I \to S$ una curva si dice curva semplice, chiusa, regolare a tratti e senza cuspidi se vale

1. $I = [t_0, t_k]$, $t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k$ tali che $\gamma|_{t_i,t_{i+1}}$ è una curva regolare P.L.A. ;

2. $\gamma(t_0) = \gamma(t_k)$ e $\gamma|_{[t_0,t_k)}$ è iniettiva;

3. $\lim_{t\to t_i^+} \gamma'(t) \neq -\lim_{t\to t_i^-} \gamma'(t)$.

Definizione 21.2. (Angolo Esterno)
$\forall i = 0, \ldots, k-1$ si definisce l'angolo esterno $\theta_i \in (-\pi, \pi)$ come l'angolo con segno tra $\lim_{t\to t_i^-} \gamma'(t)$ e $\lim_{t\to t_i^+} \gamma'(t)$.

Osservazione 48. Posso definire un angolo proprio perchè non ho cuspidi, inoltre posso attribuire il segno poichè $T_{\gamma(t_i)}(S)$ è orientato.

Definizione 21.3. (Regione)
$R \subseteq S$ è una regione se è compatta e ∂R è unione di un numero finito di supporti disgiunti di curve semplici, chiuse, regolari a tratti e senza cuspidi.

Esempio 16.

Se S è compatta allora $R = S$ è una regione.

Un emisfero di S^2 è una regione.

Definizione 21.4. (Regione Semplice)

Una regione R è semplice se $R \underbrace{\cong}_{\text{omeo}} D^2$ e $R \subseteq U$ con U dominio di una carta ortogonale.

Osservazione 49. Se R è una regione allora ∂R ammette un'orientazione canonica.

Useremo solo parametrizzazioni positive di ∂R cioè mappe $\gamma \colon I \to \partial R$ tali che $v, \gamma'(t)$ sia una base positiva di $T_{\gamma(t)}(S)$ $\forall v \in T_{\gamma(t)}(S) \setminus C_{\gamma(t)}(S)$ $\forall t \neq t_i$ di singolarità per γ'.

Definizione 21.5. (Triangolo)

Un triangolo è una regione omeomorfa a D^2 con tre soli punti di singolarità per il suo bordo, questi tre punti si chiamano vertici.

Definizione 21.6. (Triangolazione)

Sia R una regione, una triangolazione $\mathfrak{T}$ di R è una collezione di triangoli $T_1, \dots, T_j$ tali che $\overset{\circ}{T_i} \cap \overset{\circ}{T'_i} = \emptyset$ $\forall i \neq i'$, $\cup_{i=1}^{j} T_i = R$ e $T_i \cap T'_i$ sia o vuoto o un vertice o un lato di entrambi.

Definizione 21.7. (Caratteristica di Eulero-Poincarè)

La caratteristica Eulero-Poincarè di una regione triangolata $(R, \mathfrak{T})$ è $\chi(R, \mathfrak{T}) = F - E + V$ con $F = |\text{triangoli}|$, $E = |\text{lati}|$ e $V = |\text{vertici}|$.

Teorema 21.0.62. *Ogni regione ammette una triangolazione fatta di triangoli semplici, cioè contenuti in una carta ortogonale.*

Definizione 21.8. (Area)
Sia R una regione, l'area $A(R)$ di R è $\sum_{i=1}^{j} A(T_i)$ dove $T_1, \ldots, T_j$ è una triangolazione semplice (cioè con triangoli semplici) di R e

$$A(T_i) = \int_{x^{-1}(T_i)} \sqrt{EG - F^2} dudv \tag{21.1}$$

dove $x \colon \Omega \to U \supseteq T_i$ è una parametrizzazione locale e $\sqrt{EG - F^2} = \|x_u \wedge x_v\|$ è l'elemento d'area associato a x_u, x_v .

Osservazione 50. $A(R)$ è ben definita e non dipende dalle parametrizzazioni.

Osservazione 51. Se $f \colon R \to \mathbb{R}$ è continua si pone $\int_R f = \sum_i \int_{T_i} f$ dove

$$\int_{T_i} f = \int_{x^{-1}(T_i)} (f \circ x)(\sqrt{EG - F^2}) dudv. \tag{21.2}$$

Teorema 21.0.63. *(Gauss-Bonnet globale)*
Sia R una regione con bordo ∂R parametrizzata come sopra e con angoli esterni $\theta_1, \ldots, \theta_k$ allora

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g(s) ds + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi \chi(R, \mathfrak{T}) \tag{21.3}$$

dove $\mathfrak{T}$ è una qualsiasi triangolazione di R.

Corollario 21.0.64. *Si ha che $\chi(R, \mathfrak{T}) = \chi(R)$.*

Corollario 21.0.65. *Sia S compatta allora $\int_S K = 2\pi\chi(S)$. La caratteristica di Eulero-Poincarè è un invariante puramente topologico.*

Osservazione 52. Se S è diffeomorfa a S' allora $\chi(S) = \chi(S')$, infatti un diffeomorfismo porta una triangolazione di S su una di S'.

Corollario 21.0.66. *S diffeomorfa a S' $\Rightarrow \int_S K = \int_{S'} K$.*

Corollario 21.0.67. *S diffeomorfa a S^2 $\Rightarrow \int_S K = 4\pi$.*

Dimostrazione. Tenendo presente che nella sfera $K = 1$ si ha

$$\int_S K = \int_{S^2} K = Area(S^2) = 4\pi. \tag{21.4}$$

Da Gauss-Bonnet deduciamo anche che $\chi(S^2) = 2$ essendo $\int_{S^2} K = 2\pi\chi(S^2)$.

□

Teorema 21.0.68. *(Tangenti Rotanti)*
Siano $R \subseteq S$ una regione semplice, $x\colon \Omega \to U \supseteq R$,$e_1 = \dfrac{x_u}{\|x_u\|}$ campo su Ω e $\gamma\colon [a,b] \to \partial R$ parametrizzazione con tutte le proprietàè richieste, ovvero $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]} = \gamma_i$ P.L.A. e di classe C^∞ per $i = 0, \ldots, k-1$.
Sia $e_1 \in \mathcal{T}(\gamma)$ e $e_1 = e_1 \circ \gamma$ e $\forall i = 0, \ldots, k-1$ sia ϕ_i una determinazione dell'angolo da e_1 a γ_i'. Infine siano $\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}$ gli angoli esterni di R.

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(\phi_i(t_{i+1}) - \phi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^{k-1}\theta_i = 2\pi. \tag{21.5}$$

Dimostrazione.

- Supponiamo dapprima $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $x = Id$ (cioè S porzione del piano), posso allisciare la curva senza alterare il primo membro, infatti il contributo di θ_i è assorbito da ϕ_i o ϕ_{i+1}.

- Usando il fatto che R è omeomorfo a D^2 possiamo deformare R con una famiglia continua R_t tale che $R_0 = R$ e $R_1 = D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

- $\forall t$ abbiamo una parametrizzazione $\gamma_t\colon [a,b] \to \partial R_t$.
  Se ϕ_t è la corrispondente determinazione dell'angolo tra e_1 e γ_t', allora

devo calcolare $\phi_0(b) - \phi_0(a)$, ma $\forall t$ ho $\phi_t(b) - \phi_t(a) \in 2\pi\mathbb{Z}$ in quanto $\gamma'(b) = \gamma'(a)$. Ora $\phi_t(b) - \phi_t(a)$ è continua in t e $2\pi\mathbb{Z}$ discreto quindi $\phi_t(b) - \phi_t(a)$ è costante $\forall t$. Quindi

$$\phi_0(b) - \phi_0(a) = \phi_1(b) - \phi_1(a) = 2\pi. \tag{21.6}$$

Con questo ho finito la dimostrazione nel piano.

- Se $R \subseteq S$ con S non piana dovrei rifare lo stesso conto, tenendo conto del fatto che tutti gli angoli che vedo nel punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ sono calcolati rispetto a $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ allora $\forall s \in [0, 1]$ pongo su $T_{(u,v)}(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2$ la matrice

$$g_s = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (1 - s) \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}. \tag{21.7}$$

Se calcolo il primo membro dell'equazione dell'enunciato rispetto a g_s, tale quantità come prima è un multiplo di 2π e dipende in maniera continua da s. Dunque è costante rispetto a s da cui la tesi.

$\square$

Capitolo 22

Ventiduesima Lezione

Sia $R \subseteq S$ una regione semplice, $x\colon \Omega \to U \supseteq R$ una parametrizzazione ortogonale positiva, $e_1 = \dfrac{x_u}{\|x_u\|}$ un campo unitario su U e $\gamma\colon [a,b] \to \partial R$ una parametrizzazione P.L.A. a tratti positiva.

Osservazione 53. Confonderò e_1 con $e_1 \circ \gamma \in \mathcal{T}(\gamma)$.

Proposizione 22.0.69. *Vale*

$$\int_a^b \left[\frac{De_1}{dt}(s)\right] ds = -\int_R K. \tag{22.1}$$

Dimostrazione. Andiamo anzitutto a verificare quanto vale il valore algebrico $\left[\dfrac{De_1}{dt}(s)\right]$, si ha

$$\begin{aligned}
\left[\frac{De_1}{dt}(s)\right] &= \langle \frac{De_1}{dt}, N \wedge e_1 \rangle = \langle e_1', N \wedge e_1 \rangle = \langle e_1', \frac{x_v}{\|x_v\|} \rangle = \frac{1}{\|x_v\|} \langle \left(\frac{x_u}{\|x_u\|}\right)', x_v \rangle = \\
&= \frac{1}{\|x_v\|}\left(\langle \frac{x_u'}{\|x_u\|}, x_v \rangle + \underbrace{\langle \left(\frac{1}{\|x_u\|}\right)' x_u, x_v \rangle}_{=0} \right) = \frac{1}{\|x_u\|\|x_v\|} \langle x_u', x_v \rangle = \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \langle u' x_{uu} + v' x_{uv}, x_v \rangle
\end{aligned} \tag{22.2}$$

dove $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$. Ora si ha che rispettivamente

$$\langle x_{uu}, x_v \rangle = \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial u} \langle x_u, x_v \rangle}_{=0} \right) - \langle x_u, x_{uv} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle x_u, x_u \rangle = -\frac{1}{2} E_v \tag{22.3}$$

e

$$\langle x_{uv}, x_v \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle x_v, x_v \rangle = \frac{1}{2} G_u. \tag{22.4}$$

Dunque

$$\left[\frac{De_1}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} (-u' E_v + v' G_u) \tag{22.5}$$

e quindi

$$\int_a^b \left[\frac{De_1}{dt} \right] ds = \int_a^b \frac{-u' E_v + v' G_u}{2\sqrt{EG}} ds \tag{22.6}$$

ma, per il Teorema della Divergenza, si ha

$$\int_a^b \frac{-u' E_v + v' G_u}{2\sqrt{EG}} ds = \int_{x^{-1}(R)} \left(\left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v \right) dudv =$$
$$= -\int_{x^{-1}(R)} \left[-\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u + \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v \right) \right] \sqrt{EG} dudv = -\int_R K. \tag{22.7}$$

Osservazione 54. Abbiamo utilizzato il teorema della divergenza

$$\int_a^b \langle (v', -u'), x \rangle ds = \int_{x^{-1}(R)} div(x) dudv \tag{22.8}$$

con

$$x = \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}}, \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right). \tag{22.9}$$

□

Dato $p \in S$, se R è una regione semplice intorno a p con ∂R liscio, prendo $x_0 \in \partial R$, $v \in T_{x_0}(S)$ con $\|v\| = 1$ e $\gamma \colon [a, b] \to \partial R$ parametrizzazione e

definisco $v(t)$ come l'unica estensione parallela di $v = v(a)$.
Dal momento che v è un campo parallelo si ha che $\dfrac{Dv}{dt} = 0$ e quindi considerando il Lemma 20.0.61 si ha

$$0 = \int_a^b \left[\frac{Dv}{dt}\right] dt = \int_a^b \left[\frac{De_1}{dt}\right] dt + \int_a^b \phi' dt = -\int_R K + \phi(b) - \phi(a). \quad (22.10)$$

Dal momento $e_1(a) = e_1(b)$ si ha che $\phi(b) - \phi(a)$ rappresenta esattamente l'angolo di cui è ruotato v lungo γ.
Ponendo $\phi(b) - \phi(a) = \theta_{\partial R}$ si ha dunque

$$\theta_{\partial R} = \int_R K \quad (22.11)$$

ed in particolare sarà

$$K(p) = \lim_{R \to \{p\}} \frac{\theta_{\partial R}}{Area(R)} \quad (22.12)$$

Teorema 22.0.70. *(Gauss-Bonnet locale)*
Sia R una regione semplice con bordo ∂R parametrizzato da $\gamma \colon [a, b] \to \partial R$ parametrizzazione P.L.A. a tratti positiva con angoli esterni $\theta_1, \dots, \theta_k$, allora

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g(s) ds + \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 2\pi\chi(R, \mathfrak{T}) \quad (22.13)$$

dove $\mathfrak{T}$ è una qualsiasi triangolazione di R.

Dimostrazione.
Siano $e_1 = \dfrac{x_u}{\|x_u\|}$ e ϕ la determinazione dell'angolo tra e_1 e γ', allora

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} K_g(s)ds &= \int_{\partial R}\left[\frac{D\gamma'(s)}{dt}\right]ds = \int_{\partial R}\left[\frac{De_1}{dt}\right] + \phi' dt = \\ &= -\int_R K + \phi(b) - \phi(a) = -\int_R K + 2\pi + \sum_{i=1}^{k}\theta_i\end{aligned} \tag{22.14}$$

e questa è la tesi in quanto $\chi(R, \mathfrak{T}) = 1$. Infatti per un poligono di k lati si ha sempre $V = k$,$E = k + (k-3)$ ed $F = k-2$ da cui $\chi(R) = 1$. $\square$

Teorema 22.0.71. *(Gauss-Bonnet globale)*

Sia R una regione con bordo ∂R parametrizzato da $\gamma\colon [a,b] \to \partial R$ parametrizzazione P.L.A. a tratti positiva con angoli esterni $\theta_1, \dots, \theta_k$, allora

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g(s)ds + \sum_{i=1}^{k}\theta_i = 2\pi\chi(R, \mathfrak{T}) \tag{22.15}$$

dove $\mathfrak{T}$ è una qualsiasi triangolazione di R.

Dimostrazione. Suddividendo baricentricamente i valori ai due membri non cambiano, posso supporre dunque che la triangolazione $\mathfrak{T}$ sia composta da tutte regioni semplici.

Applico Gauss-Bonnet locale ad ognuna di queste regioni. Se $T_1, \dots, T_F$ sono i triangoli di $\mathfrak{T}$, θ_i^j gli angoli esterni di T_i e $\phi_i^j = \pi - \theta_i^j$ quelli interni, allora

$$\int_{T_i} K + \int_{\partial T_i} K_g + \sum_{j=1}^{3}\theta_i^j = 2\pi. \tag{22.16}$$

e sommando per ogni triangolo si ottiene

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g + \sum_{i=1}^{F}\sum_{j=1}^{3}(\pi - \phi_i^j) = 2\pi F \tag{22.17}$$

dove F è in numero dei triangoli. Vediamo ora quanto vale $\sum_{i=1}^{F}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\phi_i^j)$ denotando con V_e i vertici esterni e suddividendoli in vertici esterni reali V_{er} (dove compaiono i θ_i) e vertici esterni introdotti dalla triangolazione V_{et}. Ovviamente $V_e = V - V_i$, dove V_i sono i vertici interni, e $V_e = V_{er} + V_{et}$. In analogia definiamo lati esterni E_e. Si ha dunque che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{F}\sum_{j=1}^{3}(\pi-\phi_i^j) = 3\pi F - \sum_{i=1}^{F}\sum_{j=1}^{3}\phi_i^j = 3\pi F - \left(2\pi V_i + \pi V_{et} + \sum_{h=1}^{k}(\pi-\theta_h)\right) = \\ = 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_{et} - \pi V_{er} + \sum_{h=1}^{k}\theta_h = \\ = 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{h=1}^{k}\theta_h.\end{aligned} \tag{22.18}$$

Abbiamo dunque ottenuto

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g + 3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_e + \sum_{h=1}^{k}\theta_h = 2\pi F \tag{22.19}$$

ed utilizzando che $3F = 2E_i + E_e$ e $E_e = V_e$ si ottiene che

$$3\pi F - 2\pi V_i - \pi V_e = \pi(2E_i + E_e) - 2\pi V_i - \pi E_e = 2\pi(E - V). \tag{22.20}$$

Sostituendo ciò che abbiamo appena trovato si ottiene

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g + 2\pi(E - V) + \sum_{h=1}^{k}\theta_h = 2\pi F \tag{22.21}$$

e dunque

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g + \sum_{h=1}^{k} \theta_h = 2\pi(F - V + E) = 2\pi\chi(R, \mathfrak{T}). \tag{22.22}$$

□

Teorema 22.0.72. *(Classificazione delle Superfici)*

1. *S superficie compatta in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow S$ orientabile*
2. *S orientabile $\Rightarrow S$ diffeomorfa a un g-toro Σ_g. Lo 0-toro è la sfera ed il genere g rappresenta il numero di buchi.*

Teorema 22.0.73.
Sia S una superficie compatta con $K \geq 0$ in ogni punto, allora S è diffeomorfa a S^2.

Dimostrazione. Sappiamo che $\exists p \in S$ tale che $K(p) > 0$. Allora in un intorno di p si ha $K > \epsilon$, per cui $\chi(S) = \int_S K > 0$ ma $\chi(S) = 2 - 2g$ e dunque $g < 1$. Questo implica che S è diffeomorfa a S^2. □

Corollario 22.0.74.
Sia T un triangolo sferico geodetico, allora

$$A(T) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi \tag{22.23}$$

con α_i angoli interni. In particolare $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$.

Dimostrazione. Per il Teorema 22.0.71 (Gauss-Bonnet) e poichè la curvatura gaussiana sulla sfera è $K = 1$, si ha che

$$\int_T K + \cancel{\int_{\partial T} K_g ds} + 3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi\chi(T) = 2\pi \tag{22.24}$$

e dunque

$$\int_T K = A(T) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi. \tag{22.25}$$

$\square$

Capitolo 23

Ventitreesima Lezione

Definizione 23.1. Un punto $p \in S$ si dice ombelicale se dN_p è un multiplo dell'identità o, equivalentemente, se le due curvature principali coincidono in p. In particolare si ha $K \geq 0$.

Esercizio 28. Sia S connessa costituita da punti ombelicali, allora S è una porzione di piano oppure una porzione di sfera.

Svolgimento

Per ipotesi si ha che $dN_p = \lambda(p)Id$ con $\lambda \colon S \to \mathbb{R}$. Procediamo per passi

- Mostro che λ è costante.

  Notiamo che, dal momento che S è connessa, basta dimostrare che λ è localmente costante. Allora $\forall p \in S$ prendo un intorno coordinato U di p con $x \colon \Omega \to U$. Per ipotesi si ha che $dN(x_u) = N_u = \lambda x_u$ e $dN(x_v) = N_v = \lambda x_v$. Derivando N_u rispetto a v e N_v rispetto a u si ottiene

  $$\lambda_v x_u + \cancel{\lambda x_{uv}} = N_{uv} = N_{vu} = \lambda_u x_v + \cancel{\lambda x_{vu}} \tag{23.1}$$

  e dunque

  $$\lambda_v x_u - \lambda_u x_v = 0. \tag{23.2}$$

Essendo x_u ed x_v linearmente indipendenti questo implica che $\lambda_u = \lambda_v = 0$ e dunque $\lambda \circ x$ è costante su Ω. Abbiamo mostrato così che λ è localmente costante.

- Si hanno ora due casi:

  1. Se $\lambda \equiv 0$, allora $dN \equiv 0$ e quindi $N = N_0$ costante perchè S è connessa e dunque

  $$\begin{aligned} \phi \colon S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle N_0, x \rangle \end{aligned}. \tag{23.3}$$

  Si ha inoltre che

  $$d\phi(v) = \langle N_0, v \rangle = \langle N(q), v \rangle = 0 \tag{23.4}$$

  $\forall v \in T_q(S)$, $q \in S$ e dunque ϕ è costante.
  Pertanto
  $$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \langle x, N_0 \rangle = a\} \tag{23.5}$$

  con $a = \phi(q)$ e q è il punto scelto su S.

  2. Se $\lambda \neq 0$ considero

  $$\begin{aligned} \phi \colon S &\to \mathbb{R}^3 \\ p &\mapsto q - \frac{N(p)}{\lambda} \end{aligned} \tag{23.6}$$

  voglio mostrare che ϕ è costante su S.
  Si ha
  $$d\phi = Id - \frac{dN}{\lambda} \equiv 0. \tag{23.7}$$

Si ha dunque che ϕ è costante, cioè $\phi(p) = c \; \forall p \in S$.

Quindi

$$\|p - c\| = \|p - \phi(p)\| = \frac{\|N(p)\|}{\|\lambda\|} = \frac{1}{|\lambda|}. \tag{23.8}$$

Perciò S è contenuta nella sfera di centro c e raggio $\dfrac{1}{|\lambda|}$.

Esercizio 29.

Sia T il toro parametrizzato da

$$x(u, v) = ((a + R\cos u)\cos v, (a + R\cos u)\sin v, R\sin u) \tag{23.9}$$

con $1 < R < a$ allora

1. Si calcoli $A(T)$.

2. Siano $a = 1$, $R = 1$, $p = (2, 0, 1)$ e $v = (0, 1, 0)$. Si mostri che, se γ è la geodetica con $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, allora la distanza di $\gamma(t)$ dall'asse z è sempre ≥ 2.

3. Siano $h \in \mathbb{R}$ e γ la geodetica con $\gamma(0) = p = (3, 0, 0)$ e $\gamma'(0) = (0, 1, h)$. Per quali valori di h l'immagine di γ passa per il parallelo più stretto, ovvero la distanza tra $\gamma(t)$ e l'asse z ha valore 1?

Svolgimento

1. L'area è data da

$$A(T) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x_u \wedge x_v\| dudv \tag{23.10}$$

dunque calcoliamo le derivate prime

$$x_u = \begin{bmatrix} -R\sin u \cos v \\ -R\sin u \sin v \\ -R\cos u \end{bmatrix} \tag{23.11}$$

e

$$x_v = \begin{bmatrix} -(a+R\cos u)\sin v \\ (a+R\cos u)\cos v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23.12}$$

dunque si ha

$$x_u \wedge x_v = \begin{bmatrix} -R(a+R\cos u)\cos u \cos v \\ -R(a+R\cos u)\cos u \sin v \\ -R(a+R\cos u)\sin u \end{bmatrix} \tag{23.13}$$

da cui

$$\|x_u \wedge x_v\| = \sqrt{R^2(a+R\cos u)^2} = R(a+R\cos u) \tag{23.14}$$

e quindi

$$A(T) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(a+R\cos u)dudv = 4\pi^2 aR + \cancel{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2\cos u dudv} = 4\pi^2 aR \tag{23.15}$$

2. Sia $r(t)$ la distanza di $\gamma(t)$ dall'asse z e sia $\phi(t)$ l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il parallelo passante per $\gamma(t)$. Per il Teorema 18.0.56 (di Clairaut) allora $r(t)\cos\phi(t)$ è un integrale primo e dunque

$$r(t)\cos\phi(t) = r(0)\cos\phi(0) = 2\cos 0 = 2 \quad \forall t. \tag{23.16}$$

Dunque poichè $|\cos\phi(t)| \leq 1\ \forall t$, ho che $r(t) = |r(t)| \geq 2\ \forall t$.

3. Con le stesse notazioni per il Teorema 18.0.56 (di Clairaut) si ha che

$$r(t)\cos\phi(t) = r(0)\cos\phi(0) = 3\frac{\langle(0,1,h),(0,1,0)\rangle}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{3}{\sqrt{1+h^2}}. \tag{23.17}$$

Dunque

$$r(t) = \left|\frac{3}{\sqrt{1+h^2}\cos\phi(t)}\right| \geq \frac{3}{\sqrt{1+h^2}} \tag{23.18}$$

ma, dal momento che stiamo cercando una geodetica tale che $1 = r(t_0)$, allora si deve avere

$$1 = r(t_0) = \left|\frac{3}{\sqrt{1+h^2}\cos\phi(t_0)}\right| \geq \frac{3}{\sqrt{1+h^2}} \tag{23.19}$$

e dunque $h \geq 2\sqrt{2}$.

Notiamo che non si può avere $h = 2\sqrt{2}$ poichè in quel caso avremmo che $\cos\phi(t_0) = 1$ e dunque, poichè il parallelo è una geodetica, per unicità γ dovrebbe coincidere proprio con il parallelo. Si deve dunque avere $h > 2\sqrt{2}$. Rimane quindi da mostrare che per $h > 2\sqrt{2}$ la geodetica γ interseca il parallelo più stretto.

Abbiamo che $h^2 > 8$ e $r(t) \geq 1$ implicano che

$$\cos\phi(t) = \frac{3}{\sqrt{1+h^2}r(t)} \leq \frac{3}{\sqrt{1+h^2}} = c_0 < 1 \tag{23.20}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$. In particolare se $\cos\phi(t) \leq c_0$ si ha che $\sin\phi(t) \geq \sqrt{1-c_0^2}$ e se γ è parametrizzato da $x(u(t), v(t))$ si ha

$$\sin\phi(t) = \frac{\langle\gamma'(t), x_u\rangle}{\|\gamma'(t)\|\|x_u\|} \tag{23.21}$$

e dunque

$$\langle \gamma'(t), x_u \rangle = \sin \phi(t) \|\gamma'(t)\| \|x_u\| \geq c_1 > 0 \tag{23.22}$$

ma $\gamma' = u'x_u + v'x_v$ e dunque

$$\langle \gamma'(t), x_u \rangle = u' \|x_u\|^2 = u' \geq c_1 > 0. \tag{23.23}$$

Da ciò abbiamo che

$$u(t) \geq u(0) + c_1 t \tag{23.24}$$

con $t \geq 0$ e dunque ci deve essere un tempo t_0 tale che $u(t_0) = \pi$.

Osservazione 55. Abbiamo utilizzato il fatto che il toro è chiuso e dunque γ è globalmente definita.

Capitolo 24

Ventiquattresima Lezione

Esercizio 30. Sia

$$C = \{x^2 + y^2 = z^2, z > 0\} \tag{24.1}$$

e sia γ la geodetica tale che $\gamma(0) = (1, 0, 1)$ e $\gamma'(0) = (0, 1, 0)$. Dando per scontato che γ sia definita su $\mathbb{R}$, si mostri che, se $h(t) = z(\gamma(t))$, allora

1. h è strettamente crescente su $(0, +\infty)$
2. h è pari
3. h è tale che

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = +\infty. \tag{24.2}$$

<u>Svolgimento</u>

1. Notiamo che $h(t)$ è anche la distanza di $\gamma(t)$ dall'asse z.

   Sia $\phi(t)$ l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il parallelo passante per $\gamma(t)$, per il Teorema 18.0.56 (di Clairaut) allora

$$h(t) \cos \phi(t) = h(0) \cos \phi(0) = 1 \tag{24.3}$$

e dunque, dal momento che $z > 0$, si deve avere che $\cos\phi(t) > 0\ \forall t$. Quindi

$$h(t) = \frac{1}{\cos\phi(t)} \geq 1 \tag{24.4}$$

$\forall t$ da cui $h(t)$ ha un minimo assoluto in 0. Dimostriamo ora che 0 è l'unico punto stazionario di h perchè voglio far vedere che è monotona. Se $h'(t_0) = 0$ con $t_0 \neq 0$ allora la geodetica ha un punto stazionario dell'altezza e dunque $\gamma'(t_0)$ è orizzontale cioè $\phi(t_0) = 0$ e dunque per il Teorema 18.0.56 (di Clairaut) si ha

$$1 = h(0)\cos\phi(t_0) = h(t_0) \tag{24.5}$$

e dunque $h(0) = h(t_0) = 1$ che è il minimo assoluto di $h(t)$. Allo stesso modo se ho t_1 punto di massimo di $h_{|_{[0,t_0]}}$ si deve avere $h(t_1) = 1$ e dunque $h(t)$ è costante su $[0, t_0]$, cioè $\gamma_{|_{[0,t_0]}}$ è un parallelo ma questo è assurdo. Infatti nessuna porzione di parallelo del cono è geodetico.
Pertanto si ha $h'(t) \neq 0\ \forall t \neq 0$ e, poichè 0 è un minimo assoluto, si ha che $h(t)$ è strettamente crescente su $(0, +\infty)$.

2. Per far vedere che h è pari basta osservare che

$$\begin{aligned} f\colon C &\to C \\ (x, y, z) &\mapsto (x, -y, z) \end{aligned} \tag{24.6}$$

è un'isometria del cono che manda $\gamma(0)$ in $\gamma(0)$ e $\gamma'(0)$ in $-\gamma'(0)$ tramite df. Dunque $f \circ \gamma$ è la geodetica avente stesso punto iniziale e velocità opposta a γ, ma anche $t \mapsto \gamma(-t)$ ha la stessa proprietà e dunque per unicità si ha

$$f(\gamma(t)) = \gamma(-t). \tag{24.7}$$

3. Prendo $t_0 > 0$ a caso e $\forall t \geq t_0$ si ha

$$h(t) \geq h(t_0) > h(0) = 1 \tag{24.8}$$

quindi per il Teorema 18.0.56 (di Clairaut) si ha

$$h(t) \cos \phi(t) = 1 \tag{24.9}$$

da cui

$$\cos \phi(t) = \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(t_0)} < 1. \tag{24.10}$$

Perciò essendo $\phi(t) > \phi(t_0) > 0$ si ha

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = +\infty. \tag{24.11}$$

Esercizio 31. Sia

$$S = \{x^2 + y^2 = z\} \subseteq \mathbb{R}^3 \tag{24.12}$$

con

$$R = \{p \in S \colon z(p) \leq 1\} \tag{24.13}$$

e sia $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \partial R$ una parametrizzazione di ∂R, allora

1. si mostri che S è una superficie di cui R è una regione
2. si calcoli K_g di γ
3. si calcoli $\int_R K$.

Svolgimento

1. Per provare che S è una superficie basta far vedere che la mappa

$$\begin{aligned} \phi \colon \mathbb{R}^2 &\to S \\ (x, y) &\mapsto (x, y, x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{24.14}$$

è un diffeomorfismo. Verificarlo è semplice dal momento che ϕ è sicuramente di classe C^1. Inoltre è suriettiva ed iniettiva e dunque invertibile con inversa

$$\begin{aligned} \phi \colon S &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y, x^2 + y^2) &\mapsto (x, y) \end{aligned} \tag{24.15}$$

anche essa C^1.

Per far vedere che R è una regione basta mostrare che R è compatto e che il bordo ∂R è supporto di una curva regolare. Notiamo subito che $R = \phi(D^2)$ per cui ϕ induce un diffeomorfismo tra D^2 ed R, pertanto R è compatto, ed il bordo è $\partial R = \phi(S^1)$ che è supporto di una curva regolare.

2. Ricordando che, se γ è P.L.A., allora

$$K_g = \left[\frac{D\gamma'}{dt}\right] = \langle \gamma'', N \wedge \gamma' \rangle \tag{24.16}$$

troviamo anzitutto la mappa di Gauss $N = \dfrac{\phi_x \wedge \phi_y}{\|\phi_x \wedge \phi_y\|}$ quindi

$$\phi_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix} \tag{24.17}$$

e

$$\phi_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2y \end{bmatrix} \tag{24.18}$$

e dunque

$$N = \frac{\phi_x \wedge \phi_y}{\|\phi_x \wedge \phi_y\|} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}. \tag{24.19}$$

Una parametrizzazione di ∂R è

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0, 2\pi] &\to \partial R \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t, 1) \end{aligned} \tag{24.20}$$

dunque γ è P.L.A. . Si ha $\gamma' = (-\sin t, \cos t, 0)$ e $\gamma'' = (-\cos t, -\sin t, 0)$ e dunque

$$N \wedge \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t}} \left(\begin{bmatrix} -2\cos t \\ -2\sin t \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ -2 \end{bmatrix} \tag{24.21}$$

da cui

$$K_g = \langle \gamma'', N \wedge \gamma' \rangle = \frac{1}{5}. \tag{24.22}$$

3. Vogliamo utilizzare il Teorema 22.0.71 (di Gauss-Bonnet) e dunque

$$\int_R K + \int_{\partial R} K_g + \sum_i \theta_i = 2\pi\chi(R). \tag{24.23}$$

Dal momento che il bordo è liscio si ha $\sum_i \theta_i = 0$, inoltre, dal momento che la regione R è diffeomorfa a D^2 tramite ϕ e D^2 è omeomorfo al triangolo, allora la caratteristica di Eulero della regione R è

$$\chi(R) = \chi(D^2) = \chi(T) = V - E + F = 3 - 3 + 1 = 1. \tag{24.24}$$

Dunque

$$\int_R K = 2\pi - \int_{\partial R} K_g = 2\pi - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{5}} = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right). \tag{24.25}$$

Capitolo 25

Venticinquesima Lezione

Iniziamo ora con il trattare l'ultima parte del corso, ovvero la Topologia Differenziale.
Ricordiamo che

Definizione 25.1. (Punto Critico e Punto Regolare)
Sia $f\colon M \to N$ tra varietà allora $p \in M$ si dice punto critico se $df(p)$ non è suriettivo e si dice punto regolare altrimenti.

Definizione 25.2. (Valore Critico e Valore Regolare)
Sia $f\colon M \to N$ tra varietà allora $q \in N$ si dice valore critico se è immagine di un punto critico e si dice valore regolare altrimenti.

Osservazione 56. Se $q \in N \setminus \operatorname{Im} f$ allora q è regolare.

Proposizione 25.0.75.
I punti critici sono un chiuso di M. Se M è compatta, allora i valori critici sono un chiuso di N.

Dimostrazione. Dimostriamo il caso in cui $\dim M = \dim N$.
Basta vedere che i punti regolari sono un aperto. Se $p \in M$ è regolare, allora

$df_p\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ è suriettivo e dunque $\exists U \ni p$ intorno di p tale che $f_{|_U}\colon U \to f(U)$ è un diffeomorfismo. Abbiamo quindi che ogni $p \in U$ è regolare e dunque i punti regolari sono un aperto.
Se M è compatta, allora i punti critici, essendo chiusi in un compatto, sono compatti e perciò la loro immagine è compatta e dunque chiusa in N. $\square$

Esempio 17.
Siano $M = \left\{ \left(x, \dfrac{\sin x}{x} \right), x > 0 \right\}$, $N = \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} f\colon M &\to N \\ (x,y) &\mapsto y \end{aligned}. \tag{25.1}$$

Si ha che 0 non è un valore critico poichè preimmagine di punti con pendenza non nulla ma 0 è nella chiusura dei valori critici.

Teorema 25.0.76.
Sia $f\colon M \to N$ tra varietà della stessa dimensione,M compatta ed $R \subseteq N$ insieme dei valori regolari, allora $f_{|_{f^{-1}(R)}}\colon f^{-1}(R) \to R$ è un rivestimento.

Dimostrazione. Devo mostrare che $\forall q \in R$ $\exists U \ni q$ aperto in R tale che $f^{-1}(U) = \sqcup_{i \in I} V_i$ (dove $\sqcup$ indica l'unione disgiunta) con V_i aperto in $f^{-1}(R)$ e che $f_{|_{V_i}}\colon V_i \to U$ è un omeomorfismo (e dunque un diffeomorfismo dal momento che sappiamo già che è un diffeomorfismo locale).
Sia $q \in R$ e sia $f^{-1}(q) = \{p_i, i \in I\}$, allora $\forall i \in I$ df_{p_i} è un isomorfismo. Dunque $\forall i$ $\exists W_i$ intorno di p_i in $f^{-1}(R)$ tale che $f\colon W_i \to U_i$ sia un diffeomorfismo con U_i aperto che contiene q.
Si ha dunque che la topologia di $\{p_i, i \in I\}$ è discreta in quanto ogni W_i contiene una sola preimmagine di q. Inoltre $f^{-1}(q)$ è un chiuso e dunque è compatto poichè anche M lo è. Poichè un compatto con topologia discreta

è finito, allora anche $f^{-1}(q)$ è un insieme finito, cioè $|I| < +\infty$. A questo punto basta porre

$$U = \left(\bigcap_{i \in I} f(W_i) \right) \setminus f \left(M \setminus \bigcap_{i \in I} W_i \right). \tag{25.2}$$

Per costruzione $q \in U$ e U è aperto perchè, essendo I finito, U è intersezione finita di aperti meno $f(M \setminus \bigcap_{i \in I} W_i)$ che è un chiuso poichè $M \setminus \bigcap_{i \in I} W_i$ è compatto. Per concludere basta porre $V_i = f^{-1}(U) \cap W_i$. □

Teorema 25.0.77. *(Fondamentale dell'algebra)*
Sia $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio non costante, allora p è suriettivo.

Dimostrazione. Si può identificare S^2 con $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tramite la proiezione stereografica $\pi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$, la quale è un diffeomorfismo. Se p è un polinomio non costante, allora $\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = \infty$ e dunque posso estendere p ad una mappa $\bar{p}\colon S^2 \to S^2$ ponendo $\bar{p}(\infty) = \infty$. In realtà p è di classe C^∞ anche in $\infty =$ polo nord.
Come funzione da $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}^2$ p ha in z_0 differenziale $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ dove $p'(z_0) = a + ib$. Dunque i punti critici di p sono gli z_0 in cui $p'(z_0) = 0$ che sono in numero finito. Pertanto i punti critici di $\bar{p}\colon S^2 \to S^2$ sono in numero finito, poichè sono quelli di p più il polo nord. Se chiamo C l'insieme dei punti critici ed R quello dei punti regolari ho che $\bar{p}_{|_{p^{-1}(R)}}\colon p^{-1}(R) \to R$ è un rivestimento. Quindi se C è finito allora $\bar{p}(C)$ è finito e dunque R è connesso. Poichè $\bar{p}$ proviene da un polinomio, $\bar{p}^{-1}(f(C))$ è il complementare in S^2 di un insieme finito e dunque è connesso. Inoltre un rivestimento tra spazi connessi è suriettivo e dunque $R \subseteq \operatorname{Im} \bar{p}$, ma $S^2 = R \cap \bar{p}(C)$ e quindi $\bar{p}$ è surgettivo. □

Definizione 25.3. (Varietà con bordo)
Sia $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tali che $x_n \geq 0\}$, allora un sottoinsieme $M \subseteq \mathbb{R}^N$ è una varietà con bordo se ammette un atlante $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ dove $\cap_{i \in I} U_i = M$ con U_i aperto in M e $\phi_i \colon U_i \to \Omega_i$ è un diffeomorfismo detto carta dove Ω_i è un aperto di H.

Definizione 25.4. (Punto di Bordo)
Data una varietà con bordo M, allora $p \in M$ si dice punto di bordo se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $\exists$ carta $\phi \colon U \to \Omega$ intorno a p tale che $\phi(p) \in \partial H$;

2. $T_p(M) \neq C_p(M)$.

L'insieme dei punti di bordo si chiama bordo ∂M ed è una $(n-1)$-varietà senza bordo.

Teorema 25.0.78. *Sia $f \colon N \to \mathbb{R}$ tra varietà senza bordo e siano $a, b \in \mathbb{R}$ valori regolari per f, allora $f^{-1}((-\infty, a])$, $f^{-1}([a, b])$ e $f^{-1}([b, +\infty))$ sono varietà con bordo della stessa dimensione di N e $\partial(f^{-1}((-\infty, a])) = f^{-1}(a)$, $\partial(f^{-1}([a, b])) = f^{-1}(a) \cup f^{-1}(b)$ e $\partial(f^{-1}([b, +\infty)) = f^{-1}(b)$.*

Dimostrazione.
Sia $N_a = f^{-1}((-\infty, a])$ e sia $p \in N_a$, se $f(p) < a$ per continuità $\exists U \subseteq N$, U aperto, con $p \in U \subseteq N_a$. Dunque p ha un intorno diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ dove $n = \dim N$. Supponiamo $f(p) = a$, poichè a è un valore regolare, allora df_p è suriettivo e, per la forma normale delle mappe a differenziale suriettivo, $\exists \phi \colon \Omega \to U$ dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $U \ni p$ aperto in N tale che

$$f(\phi(x_1, \ldots, x_n)) = x_n. \tag{25.3}$$

Dunque $q \in N_a \cap U$ se e solo se $f(\phi(\phi^{-1}(q))) = f(x_n(\phi^{-1}(q))) \leq a$, cioè ϕ si restringe ad un diffeomorfismo tra $\Omega \cap \{x_n \leq a\}$ e $U \cup N_a$. A meno di traslazione di $-a$ e di ribaltamento, ciò da un diffeomorfismo tra $U \cup N_a$ ed un aperto di H. $\square$

Esempio 18.

Sia $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq 1\}$, allora D^n è una n-varietà con bordo $\partial D = S^{n-1}$ in quanto $D^n = f^{-1}((-\infty, 1])$ dove $f(x) = \|x\|^2$ e df_p non si annulla in $f^{-1}(1)$.

Teorema 25.0.79. *(Classificazione delle* 1*-varietà)*

Sia N una 1*-varietà connessa, allora N è diffeomorfa a una delle seguenti:*

1. S^1
2. $[0, 1]$
3. $[0, 1)$
4. $(0, 1)$.

Capitolo 26

Ventiseiesima Lezione

Teorema 26.0.80.

Siano M e N varietà di cui M varietà con bordo e N varietà senza bordo di dimensioni $m = \dim M$ e $n = \dim N$. Sia $f\colon M \to N$ e sia $y \in N$ un valore regolare sia per f sia per $f_{|\partial M}$, allora $X = f^{-1}(y) \subseteq M$ è una varietà con bordo di dimensione $m - n$ e $\partial X = X \cap \partial M$.

Dimostrazione.

Basta vedere che $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto di x in X diffeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^{m-n}$ o H^{m-n}.

Se $x \notin \partial M$ allora basta applicare il Teorema 9.0.31 a $f\colon M \setminus \partial M \to N$ per ottenere la tesi.

Se invece $x \in \partial M \cap X$, a meno di passare in carta, posso supporre che $M = \Omega \cap H^m \subseteq H^m$, dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^m$, e $x \in \partial H^m$. Per ipotesi $f\colon \Omega \to N$ è tale che $df_x\colon T_x(H^n) = \mathbb{R}^m \to T_y(N)$ sia suriettivo e, detta $g = f_{|\Omega\cap\partial H^m} = f_{|\partial M}$, anche $dg_x\colon T_x(\partial H^m) = \partial H^m \to T_y(N)$ sia suriettiva. Per definizione di mappa C^∞, a meno di restringere Ω, la f si estende a $F\colon \Omega \to N$. Il differenziale $dF_x = df_x$ e dunque è suriettivo e perciò $F^{-1}(y)$, a meno di restringere ulteriormente Ω, è una $(m - n)$-varietà senza bordo.

Se $H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ tali che $x_m \geq 0\}$ allora

$$X = F^{-1}(y) \cap \{x_m \geq 0\} = F^{-1}(y) \cap x_m^{-1}([0, +\infty)) \tag{26.1}$$

per concludere basta far vedere che 0 è un valore regolare per

$$x_m \colon F^{-1}(y) \to \mathbb{R}. \tag{26.2}$$

A meno di restringere basta che $d(x_m)_x \colon T_x(F^{-1}(y)) \to \mathbb{R}$ sia suriettivo o, equivalentemente, $d(x_m)_x \neq 0$.
Se fosse $d(x_m)_x \equiv 0$, essendo x_m lineare e dunque

$$\ker(d(x_m)) = \ker x_m = \partial H^m, \tag{26.3}$$

avrei che

$$\ker(d(x_m)_x) \colon T_x(F^{-1}(y)) \to \mathbb{R} \tag{26.4}$$

è uguale a $T_x(F^{-1}(y)) \cap \{x_m = 0\} = T_x(g^{-1}(y)) = \ker(dg_x)$, in quanto $T_x(F^{-1}(y)) = \ker(dF_x)$. Poichè y è regolare per g, allora $\dim(\ker(dg_x)) = \dim(\partial H^m) - n = m - n - 1$ e dunque, essendo

$$d(x_m)_x \colon \underbrace{T_x(F^{-1}(y))}_{m-n} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{1}, \tag{26.5}$$

la mappa deve essere per forza suriettiva dal momento che il nucleo ha dimensione $m - n - 1$. $\square$

Definizione 26.1.
Sia M una varietà, allora $Z \subseteq M$ è un sottoinsieme di misura nulla se per ogni carta $\phi \colon \Omega \to U \subseteq M$ l'insieme $\phi^{-1}(Z \cap U)$ è misurabile secondo Lebesgue e di misura nulla in Ω.

Osservazione 57. Poichè i diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ sono lipschitziani mandano insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla, per cui è equivalente chiedere che $\forall p \in M$ $\exists (U, \phi)$ carta di misura nulla, dove $U \ni p$.

Osservazione 58. Non sto definendo una misura su M.

Osservazione 59. Daremo per scontato che

1. Z ha misura nulla $\Rightarrow M \setminus Z$ è denso.
2. L'unione numerabile di insiemi di misura nulla ha misura nulla.

Lemma 26.0.81. *(di Sard)*
Sia $f\colon M \to N$ una funzione di classe C^∞ tra varietà, allora l'insieme dei valori critici di f ha misura nulla in N.

Teorema 26.0.82. *(di non retrazione)*
Sia M una varietà compatta, allora non esiste una retrazione $r\colon M \to \partial M$, cioè una mappa $r\colon M \to \partial M$ di classe C^∞ tale che $r(x) = x$ $\forall x \in \partial M$.

Dimostrazione. Sia per assurdo $r\colon M \to \partial M$ una retrazione, allora per il Lemma 26.0.81 (di Sard) $\exists y \in \partial M$ valore regolare per r.
Poichè $r_{|\partial M} = Id_{\partial M}$ allora y è un valore regolare anche per $r_{|\partial M}$.
Ora per il Teorema 26.0.80 si ha che $r^{-1}(y)$ è una varietà X di dimensione $\dim M - \dim(\partial M) = 1$ e, essendo preimmagine di un punto, X è chiusa e dunque compatta. Per il Teorema 25.0.79 (Classificazione delle 1-varietà) allora $X = \bigcup_{i=1}^k X_i$ dove $X_i \cong S^1$ oppure $X_i \cong [0,1]$. In particolare $\#(A)$ è pari e dunque, visto che

$$\partial X = X \cap \partial M = r^{-1}(y) \cap \partial M = \{x \in \partial M \text{ tali che } \underbrace{r(x)}_{r_{|\partial M} = Id} = y\} = y \quad (26.6)$$

si ottiene un assurdo. □

Teorema 26.0.83. *(di punto fisso di Brouwer)*
Sia $f\colon D^n \to D^n$ una funzione continua, allora f ha un punto fisso.

Dimostrazione. Sia f di classe C^∞, allora se per assurdo $f(x) \neq x \ \forall x \in D^n$ poniamo

$$\begin{aligned} r\colon D^n &\to \partial D^n \\ x &\mapsto \{tx + (1-t)f(x), t \geq 1\} \cap \partial D^n \end{aligned} \tag{26.7}$$

e dunque, dal momento che è sul bordo,

$$\|r(x)\| = \|tx + (1-t)f(x)\| = 1 \tag{26.8}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)f(x)\|^2 &= \langle tx + (1-t)f(x), tx + (1-t)f(x)\rangle = \\ &= t^2\|x\|^2 + 2t(1+t)\langle f(x), x\rangle + (1-t)^2\|f(x)\|^2 = 1 \end{aligned} \tag{26.9}$$

da cui

$$t^2(\|x\|^2 - 2\langle x, f(x)\rangle + \|f(x)\|^2) + t(2\langle x, f(x)\rangle - 2\|f(x)\|^2) + \|f(x)\|^2 - 1 = 0. \tag{26.10}$$

Il coefficente di t^2 deve essere necessariamente non nullo poichè $x \neq f(x)$, risolvendo in t e esiste un'unica soluzione ≥ 1. Osservo che essa dipende in maniera C^∞ da x e la chiamo $t(x)$ ed ottengo

$$r(x) = t(x)x + (1 - t(x))f(x). \tag{26.11}$$

Abbiamo così costruito una retrazione $r\colon D^n \to \partial D^n$ ma questo è assurdo poichè contraddice il Teorema 26.0.82 (di non retrazione).

Nel caso in cui la funzione f sia di classe C^0 per il Teorema di Stone-Weierstrass si ha che $\forall\epsilon > 0\ \exists q\colon D^n \to D^n$ polinomio tale che

$$\|f(x) - g(x)\| < \frac{\epsilon}{2} \tag{26.12}$$

da cui

$$\|q(x)\| \leq \|f(x)\| + \|q(x) - f(x)\| \leq 1 + \frac{\epsilon}{2}. \tag{26.13}$$

Posto allora $p(x) = \dfrac{q(x)}{1+\frac{\epsilon}{2}}$ si ha che $p\colon D^n \to D^n$ è di classe C^∞ ed inoltre

$$\|p(x) - f(x)\| \leq \|p(x) - q(x)\| + \|q(x) - f(x)\| \leq \|q(x)\|\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \tag{26.14}$$

Supponiamo che $f(x) \neq x\ \forall x \in D^n$, poichè D^n è compatto allora $x \mapsto d(x, f(x))$ ha un minimo $m > 0$. Prendo $\epsilon = \dfrac{m}{2}$ e dunque

$$2\epsilon = m \leq \|f(x) - x\| \leq \|f(x) - p(x)\| + \|p(x) - x\| \leq \epsilon + \|p(x) - x\| \tag{26.15}$$

e dunque ho finito perchè $\|p(x) - x\| \geq \epsilon > 0$ è assurdo poichè p deve avere punto fisso. $\square$