

Nome e cognome: \_\_\_\_\_

Classe: \_\_\_\_\_

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"  
Prova scritta di matematica

**Esercizio 1 (15 punti).** Calcolare le seguenti espressioni in  $\mathbb{C}$ :

(a)  $(3 + 2i)(1 - i) + \frac{(2 + i)^2}{3 - i} - (4 - 3i)(1 + 2i) + \frac{(1 - i)(3 + 4i)}{2 + i} + (2 + i)^3$

(b)  $\sqrt[3]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{11} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{11} \right) \right) \cdot \sqrt[3]{4} \left( \cos \left( \frac{10}{11} \pi \right) + i \sin \left( \frac{10}{11} \pi \right) \right)$

**Esercizio 2 (20 punti).** Scomporre in fattori irriducibili in  $\mathbb{R}[x]$  i seguenti polinomi:

(a)  $p(x) = x^4 + 2x^2 + 4$

(b)  $p(x) = x^{10} + 1$

Sono dati i seguenti valori di seno e coseno:

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Esercizio 3 (20 punti).** Risolvere le seguenti equazioni in  $\mathbb{C}$ :

(a)  $z^5 - 2iz^3 + 3z = 0$

(b)  $z^2 + 2\bar{z} - 1 = 0$

(c)  $z^4 = -|z|$

**Esercizio 4 (15 punti).** Rappresentare i seguenti insiemi sul piano di Argand-Gauss, giustificando opportunamente la risposta.

(a)  $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}|z|^2 \right\}$

(b)  $B = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2 \wedge 0 \leq \arg z \leq \frac{2}{3}\pi \right\}$

(c)  $C = \{ \sqrt[4]{z} : z \in B \}$

**Esercizio 5 (10 punti + 🏆).** Sia  $n \geq 2$  intero. Si chiamano *radici  $n$ -esime dell'unità* i numeri complessi  $z$  tali che  $z^n = 1$ .

- (a) Calcolare le radici terze e quarte dell'unità.
- (b) Dimostrare che se  $z$  è una radice  $n$ -esima dell'unità allora anche  $\bar{z}$  lo è.
- (c) Osserviamo che 1 è ovviamente una radice  $n$ -esima dell'unità per ogni  $n$ . Per quali  $n$  si ha che  $-1$  è una radice  $n$ -esima dell'unità?

Poniamo  $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ .

- (d) Dimostrare che  $\omega$  è una radice  $n$ -esima dell'unità.
- (e) Dimostrare che le radici  $n$ -esime dell'unità sono i numeri  $\omega^k$  con  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .
- (🏆) Utilizzando (b), (c) ed (e), e distinguendo in base alla parità di  $n$ , scrivere la fattorizzazione in  $\mathbb{R}[x]$  del polinomio  $x^n - 1$ .

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

Voto: \_\_\_\_\_