

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (20 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti equazioni goniometriche:

(a) $\cos^2 \frac{x}{2} - 3 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 x$

(b) $\cot x = \sin(2x)$

(c) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \cot x = 3$

(d) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2$

Esercizio 2 (30 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti disequazioni goniometriche:

(a) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 > 0$

(b) $3 \sin x + \cos x + 1 \geq 0$

(c) $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 1 \geq 0$

(d) $\cos x \geq 2 - 3 \sin \frac{x}{2}$

(e) $\frac{\sin(2x)}{2 \cos x - \sqrt{3}} \leq 0$

Esercizio 3 (10 punti). Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \frac{\sin(2x) - \sin x}{\sqrt{\tan x - 1}}.$$

(a) Determinare il dominio naturale di f .

(b) Studiare il segno di f .

Esercizio 4 (10 punti). Si consideri la funzione f definita da

$$f(x) = \sin(x^2).$$

L'obiettivo di questo esercizio è di arrivare a dimostrare che f non è una funzione periodica.

- (a) Determinare gli zeri di f .
- (b) Si consideri la successione $(x_k)_{k \geq 0}$ degli zeri non negativi di f . Dimostrare che

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

- (c) Osservato che il denominatore della frazione ottenuta al punto (b) è una successione crescente, dimostrare che f non è periodica.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4

Voto: _____