

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"  
Prova scritta di matematica

**Esercizio 1 (20 punti).** Sono dati i punti  $F_1 = (-2, 0)$ ,  $F_2 = (2, 0)$  e  $A = (0, 4)$ .

- Scrivere l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  che ha un vertice in  $A$  e come fuochi  $F_1$  e  $F_2$ . Tracciare poi il grafico di  $\mathcal{E}$ .
- Scrivere l'equazione della parabola  $\mathcal{P}$  con asse verticale e che passa da  $A$ ,  $F_1$  e  $F_2$ . Tracciare poi il grafico di  $\mathcal{P}$ .
- Calcolare l'area del triangolo che ha per vertici i punti di intersezione fra  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{P}$ .
- Determinare l'equazione della circonferenza inscritta nel segmento parabolico limitato dalla parabola  $\mathcal{P}$  e dall'asse  $x$ .

**Esercizio 2 (20 punti).** Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo con i cateti  $AB$  e  $AC$  che misurano rispettivamente  $\ell$  e  $\ell\sqrt{3}$ , con  $\ell > 0$ . Sia  $P$  un punto dell'ipotenusa e siano  $H$  e  $K$  le proiezioni di  $P$  rispettivamente su  $AB$  e  $AC$ .

- Si scelga la distanza di  $P$  da  $B$  come variabile. Esprimere la lunghezza di  $KH$  in funzione di tale variabile.
- Fissato  $\ell = 4$ , tracciare il grafico della funzione ottenuta al punto precedente, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema.
- Determinare la posizione del punto  $P$  che rende minima la lunghezza del segmento  $KH$  e quanto vale tale minima lunghezza.

**Esercizio 3 (10 punti).** Si consideri la famiglia di funzioni definite da

$$y = \frac{(k^2 - 4)x - 2k}{2x + k}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

- Studiare il tipo di curve della famiglia al variare di  $k$ .
- Dare l'equazione cartesiana del luogo dei centri delle iperboli che appartengono alla famiglia e tracciarne il grafico.
- Per  $k = 2$ , determinare centro, asintoti e vertici dell'iperbole e tracciarne il grafico.

**Esercizio 4 (10 punti).** Discutere per via grafica il numero di soluzioni della seguente famiglia di equazioni, dove  $k \in \mathbb{R}$ :

$$-3\sqrt{2x - x^2} = kx - 4.$$

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 |
|-------|-------|-------|-------|
|       |       |       |       |

Voto: \_\_\_\_\_