La funzione lineare

Alessio Del Vigna

8 febbraio 2023

Sull'insieme dei numeri reali è possibile definire una relazione dicendo che x è in relazione con y se e solo se

$$p(x, y) = 0,$$

dove p è una qualsiasi espressione in due variabili. Le coppie di numeri reali messi in relazione sono quelle coppie ordinate (x, y) le cui coordinate soddisfano l'equazione $p(x, y) = 0$ e sono un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Il caso più semplice da studiare si ha quando p è un polinomio di grado 1, ossia quando la relazione è della forma

$$ax + by + c = 0,$$

con a e b non entrambi nulli. In questo caso si parla di *relazione lineare*.

1 La relazione lineare

Teorema 1.1. *L'insieme dei punti del piano che soddisfano la relazione*

$$ax + by + c = 0$$

con a e b non entrambi nulli è una retta, e viceversa.

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme dei punti che soddisfano una relazione lineare, ovvero

$$\mathscr{L} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, ax + by + c = 0 \right\},$$

dove a e b sono non entrambi nulli. Distinguiamo in due casi a seconda che b sia nullo o meno.

(i) Se $b = 0$ allora deve essere $a \neq 0$ e la relazione diventa

$$ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}.$$

Per cui $\mathscr{L}$ è l'insieme dei punti del piano che hanno $x = -\frac{c}{a}$, che costituiscono la retta verticale che interseca l'asse delle ascisse nel punto di coordinate $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ (si veda la Figura 1). Dall'arbitrarietà di a e c segue che, viceversa, ogni retta verticale soddisfa una relazione lineare in cui $b = 0$.

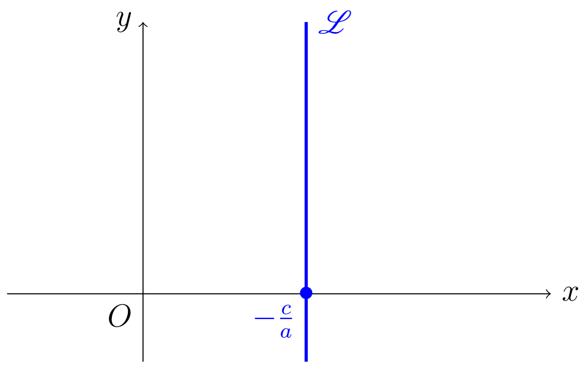

Figura 1. Rappresentazione dell'insieme dei punti che soddisfano una relazione lineare nel caso in cui $b = 0$.

(ii) Se invece $b \neq 0$ allora possiamo ricavare $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e riscrivere $\mathscr{L}$ come

$$\mathscr{L} = \left\{ \left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) \,:\, x \in \mathbb{R} \right\},$$

dato che i punti di $\mathscr{L}$ sono tutti e soli quelli che soddisfano la relazione lineare. Vogliamo capire che sottoinsieme del piano rappresentino questi punti. Grazie alle operazioni di somma tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, osserviamo che

$$\left(x, -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) = x \cdot \left(1, -\frac{a}{b} \right) + \left(0, -\frac{c}{b} \right)$$

I punti di $\mathscr{L}$, dunque, sono dati da un multiplo qualsiasi del vettore $\left(1, -\frac{a}{b}\right)$ a cui viene sommato il vettore $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$, pertanto $\mathscr{L}$ è la retta che ha la direzione del vettore $\left(1, -\frac{a}{b}\right)$ e che passa dal punto $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ (si veda la Figura 2).

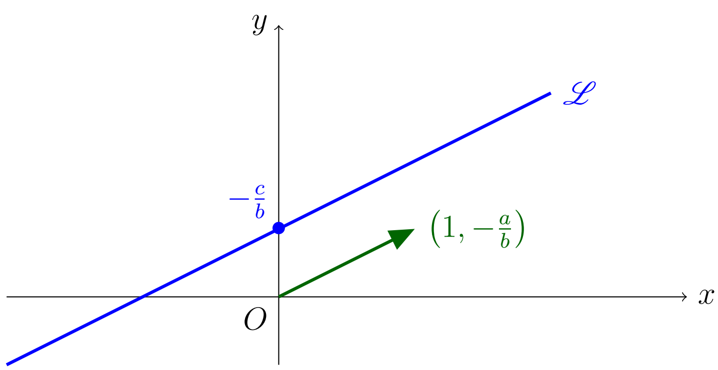

Figura 2. Rappresentazione dell'insieme dei punti che soddisfano una relazione lineare nel caso in cui $b \neq 0$.

Osserviamo che, se $b \neq 0$, allora $\mathscr{L}$ rappresenta sempre una retta non verticale, perché il vettore che ne dà la direzione ha la prima componente non nulla. Dall'arbitrarietà di a, b e c segue anche il viceversa, ossia che ogni retta non verticale è rappresentata da una relazione lineare in cui $b \neq 0$.

$\square$

2 La funzione lineare

Ci chiediamo ora in quali casi la relazione lineare definita da

$$ax + by + c = 0,$$

con a e b non entrambi nulli, sia una funzione. Grazie al Teorema 1.1, e all'analisi del grafico fatta nel corso della sua dimostrazione, abbiamo che ciò accade se e solo se $b \neq 0$. In tal caso la relazione assume la forma $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e definisce quindi la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b},$$

detta *funzione lineare*. Poniamo

$$m = -\frac{a}{b} \quad \text{e} \quad q = -\frac{c}{b},$$

così la funzione lineare si scrive più snellamente come

$$f(x) = mx + q.$$

Nel corso della dimostrazione del Teorema 1.1 abbiamo dimostrato che il grafico di questa funzione è la retta r che ha per direzione il vettore $(1, m)$ e che passa dal punto $(0, q)$. Il numero reale m, comparendo nel vettore che individua la direzione della retta, è legato all'inclinazione della retta stessa. Il numero reale q invece individua il punto in cui la retta interseca l'asse y (si veda la Figura 3).

Definizione 2.1. Il numero reale m si chiama *coefficiente angolare* e il numero reale q si chiama *intercetta* (o *ordinata all'origine*).

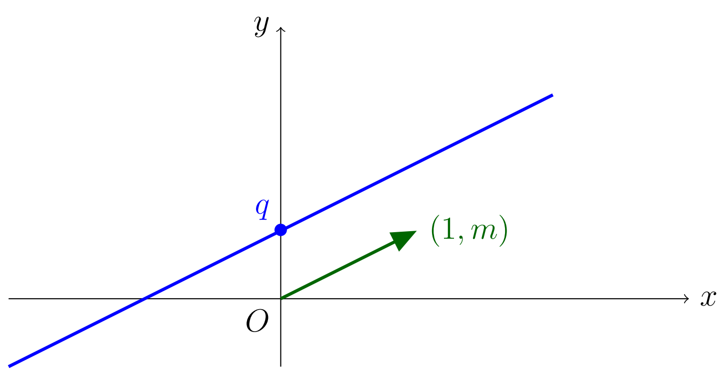

Figura 3. Grafico della funzione lineare $f(x) = mx+q$, con evidenziato il significato del coefficiente angolare e dell'intercetta.

3 Significato geometrico del coefficiente angolare

3.1 Coefficiente angolare e angolo di inclinazione

Abbiamo detto che m è legato all'inclinazione della retta che rappresenta il grafico della funzione $f(x) = mx + q$. Chiamiamo α l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle x, con $0° \leq \alpha < 180°$. Anzitutto un'osservazione banale, che segue semplicemente osservando come cambia il vettore $(1, m)$ al variare di m:

(i) se $m = 0$ allora la direzione della retta è orizzontale e $\alpha = 0°$;

(ii) se $m > 0$ allora si ha che $0° < \alpha < 90°$, ossia α è acuto (si veda la Figura 4, figura a sinistra);

(iii) se $m < 0$ allora si ha che $90° < \alpha < 180°$, ossia α è ottuso (si veda la Figura 4, figura a destra).

Osserviamo che la funzione lineare non ha mai per grafico una retta verticale, per cui $\alpha \neq 90°$.

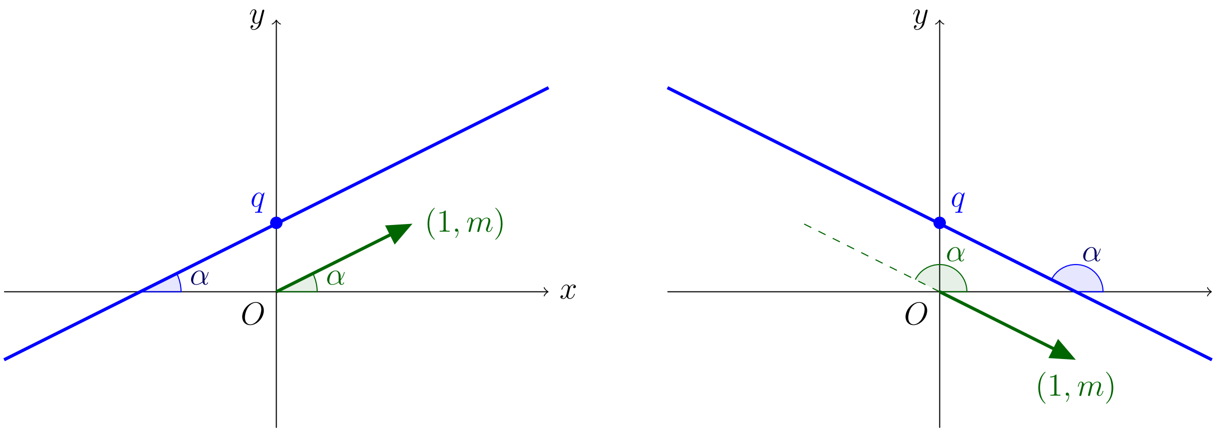

Figura 4. Grafico della funzione lineare $f(x) = mx + q$ nel caso $m > 0$ (figura a sinistra) e nel caso $m < 0$ (figura a destra).

Adesso vediamo qual è il legame quantitativo fra m e α.

Teorema 3.1. *Il grafico della funzione lineare $f(x) = mx + q$ è una retta che forma con il semiasse positivo delle x l'angolo α, con $0° \leq \alpha < 180°$, tale che*

$$m = \tan \alpha.$$

Dimostrazione. Basta osservare che l'angolo α è anche quello che il vettore $(1, m)$ forma con il semiasse positivo delle x, del quale sappiamo

$$\tan \alpha = \frac{m}{1} = m.$$

□

3.2 Coefficiente angolare della retta per due punti

Il teorema che segue permette, note le coordinate di due punti non allineati verticalmente, di determinare il coefficiente angolare della (unica!) retta che passa da entrambi.

Teorema 3.2 (coefficiente angolare della retta per due punti). *Siano $P = (x_p, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ due punti distinti su una retta non verticale. Allora il coefficiente angolare di tale retta è*

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$

Dimostrazione. I punti P e Q appartengono ad un'unica retta, non verticale per ipotesi, pertanto tale retta è il grafico della funzione $f(x) = mx + q$ per opportuni $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$. Dato che P e Q appartengono al grafico della funzione, le loro coordinate sono tali che

$$y_P = mx_P + q \quad \text{e} \quad y_Q = mx_Q + q.$$

Da questo segue

$$y_Q - y_P = (mx_Q + q) - (mx_P + q) = m(x_Q - x_P),$$

e la tesi è provata. □

Osservazione 3.3. Si osservi che il fatto che P e Q non sono allineati verticalmente significa che $x_Q \neq x_P$. Pertanto è possibile dividere per $x_Q - x_P \neq 0$ nell'ultimo passaggio della dimostrazione.

3.3 Parallelismo e perpendicolarità

Teorema 3.4 (condizione di parallelismo). *Siano r e r' due rette non verticali, grafici rispettivamente delle funzioni lineari $f(x) = mx + q$ e $f(x) = m'x + q'$. Allora*

$$r \parallel r' \iff m = m'.$$

Dimostrazione. Le due rette r e r' hanno direzione individuata dai vettori $(1, m)$ e $(1, m')$ rispettivamente. Le due rette sono parallele se e solo se sono paralleli i vettori $(1, m)$ e $(1, m')$. Dato che i due vettori hanno la stessa componente x, sono paralleli se e solo se hanno anche la stessa componente y, ossia $m = m'$. □

Teorema 3.5 (condizione di perpendicolarità). *Siano r e r' due rette non verticali, grafici rispettivamente delle funzioni lineari $f(x) = mx + q$ e $f(x) = m'x + q'$. Allora*

$$r \perp r' \iff mm' = -1.$$

Dimostrazione. Le due rette sono perpendicolari se e solo se lo sono i vettori $(1, m)$ e $(1, m')$ che individuano le loro direzioni. Ciò accade se e solo se il prodotto scalare fra questi due vettori è nullo, ossia

$$0 = (1, m) \cdot (1, m') = 1 + mm',$$

e la tesi è provata. □

4 Fascio di rette per un punto

Teorema 4.1. *Sia* $P = (x_P, y_P)$ *un punto. Una retta non verticale passa da* P *se e solo se la sua equazione è della forma*

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

per qualche $m \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. L'equazione data è una relazione lineare di primo grado in cui $b \neq 0$, per cui ha per grafico una retta non verticale. Dato che le coordinate di P soddisfano la relazione, il grafico passa da P. $\square$