Nome e cognome: ________________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (10 punti). Determinare il campo di esistenza delle seguenti espressioni.

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2-2}\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-2}}$ (b) $\sqrt[6]{\dfrac{3x}{1-4x^2}}-\sqrt[4]{\dfrac{x^2+4}{x+2}}$

Esercizio 2 (15 punti).

(a) Semplificare la seguente espressione:

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})-2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}).$$

(b) Semplificare la seguente espressione, presupponendo che i fattori sotto radice siano tutti positivi e che i denominatori siano non nulli:

$$\frac{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}}{\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{3\sqrt{a}-1}{a-1}}-\frac{2}{a+2\sqrt{a}}.$$

(c) Dare la definizione di *potenza con esponente razionale*. Assumendo $a>0$, semplificare l'espressione seguente e scrivere il risultato sotto forma di radice:

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot a^2\right)^5}{a^{\frac{1}{3}}\cdot a\cdot a^{\frac{5}{2}}}.$$

Esercizio 3 (10 punti). Trasportare dentro il segno di radice i fattori esterni, discutendo il risultato a seconda del loro segno. Si dia adeguata motivazione dei passaggi svolti.

(a) $\dfrac{x^2+1}{x}\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$ (b) $\dfrac{a+1}{a-1}\sqrt{\dfrac{a+3}{a^2+2a+1}}$

Esercizio 4 (15 punti). Trasportare fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili e/o semplificare.

(a) $\sqrt{x^3 + 4x^2}$

(b) $\sqrt{\dfrac{a^3 + a}{4a^4 + 4a^2 + 1}}$

(c) $\sqrt[20]{16b^4(a^2 - a)^4}$

(d) $\sqrt{\dfrac{x^5 y^3}{9z^4}}$

Esercizio 5 (15 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni o disequazioni:

(a) $\dfrac{x + \sqrt{3}}{x - \sqrt{3}} - \dfrac{x - \sqrt{3}}{x + \sqrt{3}} = \dfrac{12}{3 - x^2}$

(b) $(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} - 1) \geq 3$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}x - 4}{2\sqrt{3}x - \sqrt{2}x^2} \geq 0$

Esercizio 6 (15 punti).

(a) Dimostrare che $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, per ogni $n \geq 2$ e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ tali che tutti i radicali scritti esistano.

(b) Dimostrare che $\sqrt{3} + \sqrt{\frac{5}{2}}$ è un numero irrazionale.

(c) Dimostrare che, a dispetto delle apparenze, il numero

$$\alpha = \sqrt{\frac{4}{3} + \sqrt{\frac{4}{3}}} + \sqrt{\frac{4}{3} - \sqrt{\frac{4}{3}}}$$

è razionale. Determinare anche il valore di α.

Esercizio 7 (5 punti).

(a) Per $n \geq 1$ intero, si razionalizzi il denominatore dell'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

(b) Usando quanto dimostrato al punto precedente, calcolare la somma

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2021} + \sqrt{2020}} + \frac{1}{\sqrt{2022} + \sqrt{2021}}.$$

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Es. 6**	**Es. 7**

Voto: ________