# Vettori

Alessio Del Vigna

17 marzo 2022

**[Sezioni introduttive]**

## 1 Prodotto vettoriale

**Definizione 1.1.** Siano

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

due vettori in $\mathbb{R}^3$. Il *prodotto vettoriale* di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ è il vettore

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}.$$

Non è restrittivo supporre che i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ appartengano al piano $Oxy$ di un riferimento cartesiano tridimensionale, in quanto esiste sempre un piano che contiene entrambi i vettori. Dunque non è restrittivo supporre

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui segue

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}. \tag{1}$$

**Esempio 1.2.** Dalla definizione si verifica facilmente che i prodotti vettoriali tra i versori degli assi cartesiani soddisfano le relazioni cicliche

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}, \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}, \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

e che inoltre $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$.

**Esempio 1.3.** Calcoliamo il prodotto vettoriale dei vettori

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seguendo (1) si ottiene il vettore

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

I due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e il loro prodotto vettoriale $\vec{v} \times \vec{w}$ sono rappresentati nella Figura 1. Nella figura di destra è mostrata una rappresentazione dall'alto, con il vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ che esce dal foglio. Quando un vettore esce dal foglio lo si rappresenta con $\odot$, mentre un vettore che entra nel foglio viene rappresentato con $\otimes$.

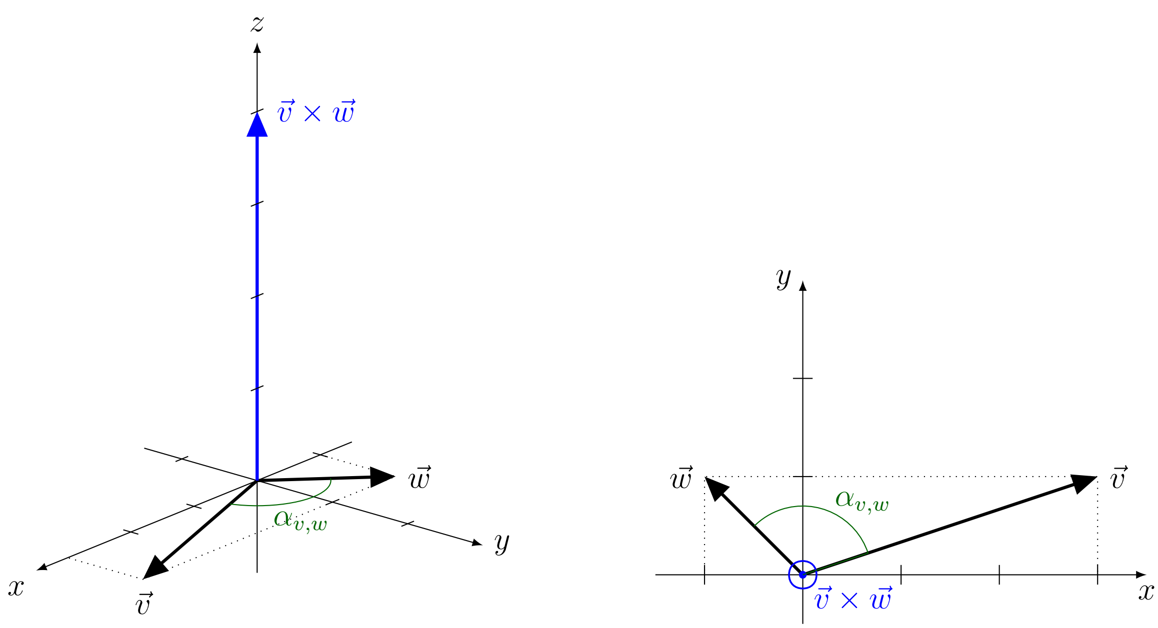


**Figura 1.** Rappresentazione dei vettori dell'Esempio 1.3.

**Definizione 1.4.** Tre vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ non nulli e non complanari formano una *terna levogira* se per un osservatore disposto come $\vec{c}$ il vettore $\vec{a}$ si sovrappone a $\vec{b}$ mediante una rotazione antioraria di un angolo inferiore a 180 gradi (Figura 2).

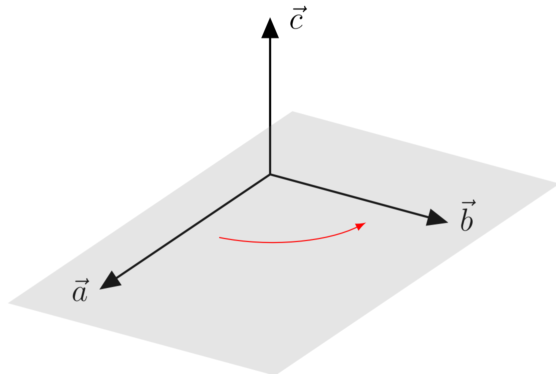


**Figura 2.** I vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ formano una terna levogira, infatti $\vec{a}$ si sovrappone a $\vec{b}$ con una rotazione antioraria se viene "vista" da $\vec{c}$. La rotazione è rappresentata dalla freccia rossa.

**Teorema 1.5.** *Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori.*

(i) *Il vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ è nullo quando almeno uno dei due vettori è nullo oppure se i due vettori hanno la stessa direzione.*

(ii) *Si ha $|\vec{v} \times \vec{w}| = vw \sin \alpha_{v,w}$, dove $\alpha_{v,w}$ è l'angolo compreso tra $\vec{v}$ e $\vec{w}$.*

(iii) *Quando il vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ non è nullo è perpendicolare a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, ed è diretto in modo tale che $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ formino una terna levogira.*

*Dimostrazione.* Dimostreremo il teorema per $v_z = w_z = 0$, caso in cui $\vec{v} \times \vec{w}$ si scrive come mostrato in (1). Osserviamo fin da subito che se $\vec{v}$ è nullo o $\vec{w}$ è nullo allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è nullo. Supponiamo dunque che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ siano entrambi non nulli. Detti $\alpha_v$ e $\alpha_w$ rispettivamente gli angoli che $\vec{v}$ e $\vec{w}$ formano con l'asse $x$ positivo si ha

$$\begin{aligned} v_x w_y - v_y w_x &= v \cos \alpha_v \cdot w \sin \alpha_w - v \sin \alpha_v \cdot w \cos \alpha_w = \\ &= vw(\cos \alpha_v \sin \alpha_w - \sin \alpha_v \cos \alpha_w) = vw \sin(\alpha_w - \alpha_v), \end{aligned}$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula di sottrazione del seno. Possiamo dunque riscrivere la (1) come

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ vw \sin(\alpha_w - \alpha_v) \end{pmatrix}.$$

Analizzando le posizioni reciproche dei vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si ottengono vari casi.

(C1) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione allora $\alpha_w - \alpha_v = 0$ (stesso verso) o $\alpha_w - \alpha_v = \pm\pi$ (verso opposto). In entrambi i casi si ottiene $\sin(\alpha_w - \alpha_v) = 0$ e dunque $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$.

(C2) Se, procedendo in verso antiorario, il vettore $\vec{v}$ si sovrappone al vettore $\vec{w}$ con una rotazione di angolo inferiore a 180 gradi (Figura 3, sinistra), allora $\alpha_w - \alpha_v = \alpha_{w,v}$

e dunque $\sin(\alpha_w - \alpha_v) = \sin\alpha_{v,w}$. Quest'ultima è una quantità positiva, dunque la terza componente di $\vec{v} \times \vec{w}$ è positiva, e dunque $\vec{v} \times \vec{w}$ punta nella direzione dell'asse $z$ positivo.

(C3) Se, procedendo in verso antiorario, il vettore $\vec{w}$ si sovrappone al vettore $\vec{v}$ con una rotazione di angolo inferiore a 180 gradi (Figura 3, destra), allora $\alpha_w - \alpha_v = -\alpha_{w,v}$ e dunque $\sin(\alpha_w - \alpha_v) = \sin(-\alpha_{v,w}) = -\sin\alpha_{v,w}$. Quest'ultima è una quantità negativa, dunque la terza componente di $\vec{v} \times \vec{w}$ è negativa, e dunque $\vec{v} \times \vec{w}$ punta nella direzione dell'asse $z$ negativo.

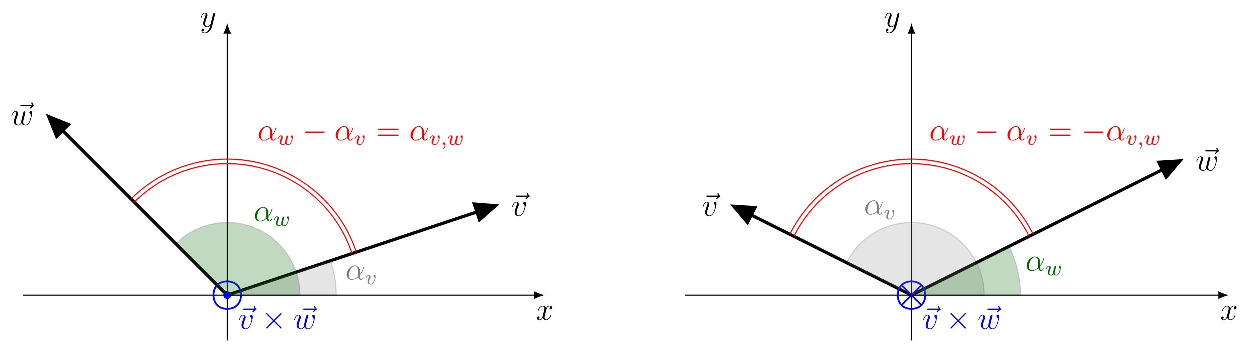


**Figura 3.** *Figura a sinistra.* Procedendo in verso antiorario, il vettore $\vec{v}$ si sovrappone al vettore $\vec{w}$ con una rotazione di angolo inferiore a 180 gradi. *Figura a destra.* Procedendo in verso antiorario, il vettore $\vec{w}$ si sovrappone al vettore $\vec{v}$ con una rotazione di angolo inferiore a 180 gradi.

(i) Dalla precedente analisi risulta che se $\vec{v}$ è nullo o se $\vec{w}$ è nullo o se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione (caso (C1)) allora $\vec{v} \times \vec{w}$ è nullo. Viceversa, se i due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ non sono nulli e non hanno la stessa direzione (casi (C2) e (C3)) allora $v \times w$ non è nullo.

(ii) Sempre dalla precedente analisi segue

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |vw\sin(\alpha_w - \alpha_v)| = vw\,|\sin(\alpha_w - \alpha_v)| = vw\sin\alpha_{v,w},$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo usato che $v \geq 0$ e $w \geq 0$.

(iii) Nei casi in cui $\vec{v} \times \vec{w}$ non è nullo (casi (C2) e (C3)), il vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ è diretto lungo l'asse $z$ e dunque è perpendicolare sia a $\vec{v}$ sia a $\vec{w}$. Inoltre l'analisi del segno della terza componente di $\vec{v} \times \vec{w}$ fatta nei casi (C2) e (C3) prova che la terna $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ è levogira. $\square$

Un modo pratico molto utile per individuare il verso del vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ è la *regola della mano destra*, rappresentata in Figura 4. Con la mano destra nella posizione raffigurata si dispongono l'indice lungo il vettore $\vec{v}$ e il medio lungo $\vec{w}$, e quel punto il pollice indica il verso del vettore $\vec{v} \times \vec{w}$.

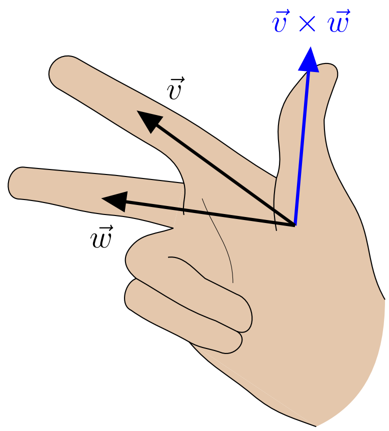


**Figura 4.** Rappresentazione della regola della mano destra, per la determinazione del verso del prodotto vettoriale.