

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”
Programma svolto di Matematica
Classe 1B, Liceo Scientifico - A.S. 2021-2022

Prof. Alessio Del Vigna

Insiemi e logica

- (i) Il simbolo di appartenenza. Rappresentazione di un insieme con i diagrammi di Eulero-Venn, per elencazione e per proprietà caratteristica. Insiemi finiti e loro cardinalità.
- (ii) Definizione di proposizione. I connettivi logici: negazione, congiunzione, disgiunzione esclusiva e inclusiva, implicazione.
- (iii) Formule logiche e loro equivalenza. Equivalenze logiche notevoli (con dimostrazione): leggi di De Morgan, doppia negazione, equivalenza tra un'implicazione e la sua contronominale, negazione dell'implicazione, proprietà dei connettivi logici.
- (iv) Tautologie e contraddizioni. Schemi di ragionamento: *modus ponens*, *modus tollens*, sillogismo ipotetico e *reductio ad absurdum*.
- (v) Definizione di predicato. Quantificatore universale e quantificatore esistenziale. Negazione di una proposizione che contiene quantificatori.
- (vi) Definizione di sottoinsieme. Operazioni tra insiemi: intersezione, unione, differenza, complementare. Prodotto cartesiano e sua cardinalità nel caso del prodotto cartesiano di insiemi finiti. Insieme delle parti e sua cardinalità nel caso di un insieme finito (con dimostrazione). Problemi risolvibili con gli insiemi.

Numeri naturali

- (i) Cenni agli assiomi di Peano. Definizione di addizione come applicazione ripetuta del successore. Proprietà dell'addizione. Definizione di moltiplicazione come addizione ripetuta. Proprietà della moltiplicazione: proprietà distributiva (con dimostrazione), esistenza dell'elemento neutro e dell'elemento assorbente (con dimostrazione).
- (ii) Ordinamento su \mathbb{N} e sue proprietà. Definizione di elemento minimo e massimo di un sottoinsieme di \mathbb{N} . Buon ordinamento di \mathbb{N} .
- (iii) Definizione di potenza come moltiplicazione ripetuta. Proprietà delle potenze (con dimostrazione).

- (iv) La relazione di divisibilità e sue proprietà. La divisione euclidea e il teorema di divisione (con dimostrazione).
- (v) Definizione di massimo comune divisore e minimo comune multiplo. Esistenza del MCD e del mcm (con dimostrazione). Algoritmo di Euclide per la determinazione del MCD. Relazione tra MCD e mcm di due numeri naturali non nulli. Problemi risolvibili con il MCD o il mcm.
- (vi) Numeri primi e teorema fondamentale dell'aritmetica. L'insieme dei numeri primi è infinito (con dimostrazione). Il crivello di Eratostene. Congettura dei primi gemelli e congettura di Goldbach. La funzione dei divisori $d(n)$ e sua formula esplicita (con dimostrazione).

Numeri interi, razionali e reali

- (i) Il concetto di estensione di un insieme numerico. L'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi come estensione dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali. Numeri positivi, negativi, concordi, discordi. Definizione di valore assoluto e sue proprietà. Operazioni e ordinamento in \mathbb{Z} .
- (ii) Definizione di frazione, frazioni equivalenti e criterio di equivalenza (con dimostrazione). Il concetto di numero razionale come insieme di frazioni equivalenti. L'insieme \mathbb{Q} dei numeri razionali come estensione dell'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} . Operazioni e ordinamento in \mathbb{Q} . Densità di \mathbb{Q} (con dimostrazione) e non completezza di \mathbb{Q} .
- (iii) Rappresentazione decimale di un numero razionale. Un numero è razionale se e solo se la sua rappresentazione decimale è finita o periodica (con dimostrazione).
- (iv) Numeri irrazionali come numeri decimali illimitati e non periodici. Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale (con dimostrazione). L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali e sua completezza.
- (v) Problemi con le frazioni e con le percentuali.

Monomi e polinomi

- (i) Definizione di monomio, di grado di un monomio e di monomi simili. Operazioni fra monomi. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo tra monomi.
- (ii) Definizione di polinomio, di grado di un polinomio, di polinomio omogeneo. Gli insiemi $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$ dei polinomi univariati a coefficienti in un insieme numerico (anello). Valutazione di un polinomio. Operazioni fra polinomi.
- (iii) Prodotti notevoli: quadrato di binomio, cubo di binomio, quadrato di trinomio, somma per differenza.
- (iv) Fattoriale di un numero naturale e sua applicazione nel calcolo combinatorio. Coefficienti binomiali: definizione, simmetria (con dimostrazione), proprietà della pecora nera (con dimostrazione). Relazione con il numero di sottoinsiemi di un insieme finito.
- (v) Formula del binomio di Newton (con dimostrazione).

Equazioni e disequazioni

- (i) Definizione di equazione, di disequazione e di soluzione. Equazioni e disequazioni equivalenti. Proprietà delle uguaglianze e delle disuguaglianze e principi di equivalenza.
- (ii) Equazioni e disequazioni di primo grado. Sistemi di disequazioni di primo grado.
- (iii) Problemi risolvibili con un'equazione o una disequazione di primo grado.
- (iv) Equazioni riconducibili a equazioni di primo grado: utilizzo della legge di annullamento del prodotto, equazioni in cui compare il quadrato di un binomio di primo grado, equazioni con il valore assoluto di un binomio di primo grado.
- (v) Completamento del quadrato per la risoluzione di equazioni di secondo grado.

Relazioni e funzioni

- (i) Definizione di relazione, di immagine e controimmagine di un elemento. Definizione di dominio e di immagine di una relazione.
- (ii) Relazioni di equivalenza. Classi di equivalenza e insieme quoziente. Le classi di equivalenza formano una partizione dell'insieme su cui la relazione è definita (con dimostrazione). Esempi notevoli: equivalenza fra frazioni e definizione di \mathbb{Q} come insieme quoziente; interi modulo n , per $n \geq 1$.
- (iii) Definizione di funzione e del grafico di una funzione.
- (iv) Determinazione del dominio e dell'immagine di una funzione dal grafico cartesiano. Determinazione del dominio di una funzione dalla sua espressione analitica.

Fattorizzazione di polinomi

- (i) La relazione di divisibilità e il teorema di divisione nell'insieme dei polinomi (senza dimostrazione). L'algoritmo di divisione. Teorema di Ruffini (con dimostrazione) e regola di Ruffini. Corollari al teorema di Ruffini: corrispondenza tra radici di un polinomio e fattori di primo grado, numero massimo di radici di un polinomio (con dimostrazione).
- (ii) Riducibilità e irriducibilità di un polinomio e sua dipendenza dall'insieme dei coefficienti. Esempi notevoli: riducibilità in $\mathbb{R}[x]$ di $x^2 - a^2$ per ogni a , irriducibilità in $\mathbb{R}[x]$ di $x^2 + a^2$ per ogni $a \neq 0$.
- (iii) Irriducibilità in $\mathbb{R}[x]$: teorema di caratterizzazione dei polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ (senza dimostrazione). Irriducibilità in $\mathbb{Q}[x]$: lemma di Gauss (senza dimostrazione) e teorema delle radici razionali (senza dimostrazione).
- (iv) Tecniche di fattorizzazione: raccoglimento totale, raccoglimento in due fasi, utilizzo dei prodotti notevoli, trinomio particolare di secondo grado e sua estensione ai polinomi del tipo $x^{2k} + sx^k + p$ (con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Completamento del quadrato per la fattorizzazione di alcuni polinomi, come alcuni tipi di somma di quadrati.

Geometria euclidea

- (i) Introduzione alla geometria euclidea: impostazione assiomatico-deduttiva, enti primitivi e assiomi. Definizione degli enti geometrici fondamentali.
- (ii) Congruenza e assiomi relativi. Cenni al concetto di misura: lunghezza di un segmento e ampiezza di un angolo. Teorema sulla congruenza di angoli complementari o supplementari di angoli congruenti e sulla congruenza di angoli opposti al vertice (con dimostrazione).
- (iii) Triangoli e elementi fondamentali. Congruenza nei triangoli e primo criterio di congruenza. Secondo criterio di congruenza (con dimostrazione). Proprietà del triangolo isoscele (con dimostrazione). Terzo criterio di congruenza (dimostrazione facoltativa). Proprietà dei triangoli isosceli (con dimostrazione). Disuguaglianze nei triangoli: primo teorema dell'angolo esterno (con dimostrazione), relazioni di disuguaglianza tra lati e angoli (con dimostrazione), disuguaglianza triangolare (con dimostrazione).
- (iv) Teorema di esistenza e unicità della perpendicolare (senza dimostrazione). Teorema di esistenza della parallela (con dimostrazione) e necessità di postularne l'unicità. Criterio di parallelismo (con dimostrazione) e corollari: teorema forte dell'angolo esterno e somma degli angoli interi di un triangolo (con dimostrazione). Caratterizzazione dei triangoli rettangoli mediante la proprietà della mediana (con dimostrazione).