Potenza di un binomio

Alessio Del Vigna

6 febbraio 2022

1 Fattoriali e coefficienti binomiali

Definizione 1.1. Sia $n \in \mathbb{N}$. Il *fattoriale* di n, che si indica con $n!$, è definito come segue:

$$0! = 1 \quad \text{e} \quad n! = \prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \qquad \forall n \geq 1.$$

Esempio 1.2. Dalla definizione segue subito che

$$1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24, \quad 5! = 120.$$

Definizione 1.3. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$. Il *coefficiente binomiale di n su k* è definito come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Teorema 1.4. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ con $0 \leq k \leq n$. Il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme con n elementi è $\binom{n}{k}$.*

Cerchiamo di capire perché il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ è collegato al numero di sottoinsiemi di un insieme.

Esempio 1.5. Consideriamo l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e ci proponiamo di capire quanti sono i suoi sottoinsiemi costituiti precisamente da 3 elementi. Possiamo scegliere il primo elemento in 7 modi, il secondo in 6 modi e il terzo in 5 modi, per un totale di $7 \cdot 6 \cdot 5$ possibilità. Tuttavia così facendo abbiamo conteggiato ogni sottoinsieme $3 \cdot 2 \cdot 1$ volte. Infatti il sottoinsieme $\{2, 3, 5\}$ è stato conteggiato sia come $(2, 3, 5)$, sia come $(2, 5, 3)$, sia come $(3, 2, 5)$, sia come $(3, 5, 2)$, sia come $(5, 2, 3)$, sia come $(5, 3, 2)$. Abbiamo perciò che i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 sono

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \binom{7}{3},$$

per un totale di 35 sottoinsiemi. Questo stesso ragionamento è generalizzabile al caso dei sottoinsiemi di k elementi di un insieme con n elementi, il ché costituisce la dimostrazione del Teorema 1.4.

Vediamo adesso due proprietà dei coefficienti binomiali che ci saranno utili in seguito.

Teorema 1.6. *Se* $0 \leq k \leq n$ *allora*

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dimostrazione. Possiamo scegliere k oggetti tra n in tanti modi quanti ne abbiamo di non scegliere $n-k$ oggetti tra n. $\square$

Teorema 1.7. *Se* $n \geq 1$ *e* $1 \leq k \leq n$ *allora*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dimostrazione. Presentiamo la dimostrazione con l'argomento della pecora nera. Supponiamo di avere n pecore, di cui una nera, e di doverne scegliere k. Ci sono due casi: o scegliamo la pecora nera oppure no. Nel primo caso dobbiamo scegliere $k-1$ pecore tra $n-1$, che si può fare in $\binom{n-1}{k-1}$ modi; nel secondo caso dobbiamo scegliere k pecore tra $n-1$, che si può fare in $\binom{n-1}{k}$ modi. $\square$

Osservazione 1.8. Le due precedenti proprietà possono essere anche dimostrate in maniera diretta, calcolando i coefficienti binomiali in esse presenti e verificando che sussiste l'uguaglianza. Il Teorema 1.6 segue da

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k},$$

e il Teorema 1.7 da

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-k-1)!} = \\
&= (n-1)! \cdot \left(\frac{1}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{1}{k! \cdot (n-k-1)!} \right) = \\
&= (n-1)! \cdot \frac{k+(n-k)}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Abbiamo tuttavia preferito dare delle dimostrazioni basate sul fatto che i coefficienti binomiali sono legati al numero di sottoinsiemi di un insieme perché più istruttive.

2 Potenza di un binomio

L'obiettivo è determinare lo sviluppo di $(a+b)^n$ per n numero naturale. Tale sviluppo si ottiene sviluppando il prodotto

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ volte}} \tag{1}$$

avvalendosi della proprietà distributiva. Gli sviluppi che si ottengono per i primi valori di n sono i seguenti (verificarli!):

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.
\end{aligned}$$

Da questi primi esempi si può osservare che le espansioni ottenute sono polinomi bivariati e omogenei di grado pari all'esponente. In effetti è semplice verificare che ciò è vero in generale. Se infatti si sviluppa $(a+b)^n$ con la proprietà distributiva, ciascun addendo dello sviluppo è un monomio di grado n perché si ottiene come prodotto di n fattori di grado 1. Ciò comporta che lo sviluppo di $(a+b)^n$ conterrà i monomi

$$a^n, \quad a^{n-1}b, \quad a^{n-2}b^2, \quad \dots, \quad a^2b^{n-2}, \quad ab^{n-1}, \quad b^n,$$

ossia i monomi della forma $a^{n-k}b^k$ per $k = 0, 1, \dots, n$. Il coefficiente del monomio $a^{n-k}b^k$ è dato dal numero di volte in cui questo monomio compare nello sviluppo di $(a+b)^n$. Ricordando la (1) e la proprietà distributiva, il monomio $a^{n-k}b^k$ viene ottenuto tante volte quanti i modi di scegliere k oggetti su n (ovvero i k fattori da cui si prende la b tra gli n fattori che compaiono nella (1)). In altre parole, il coefficiente di $a^{n-k}b^k$ è il numero di sottoinsieme di k elementi in un insieme di n elementi, ossia $\binom{n}{k}$ in virtu del Teorema 1.4. Tutto ciò costituisce la dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 2.1 (binomio di Newton)**.** *Per ogni $n \geq 0$ si ha*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Esempio 2.2. Sviluppiamo $(a+b)^5$. Grazie al teorema del binomio di Newton si ha

$$\begin{aligned}
(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 = \\
&= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.
\end{aligned}$$

L'albero dei coefficienti binomiali è l'albero di numeri seguente:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
n=1 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
n=2 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
n=3 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
n=4 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
n=5 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
n=6 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
\end{array}$$

Il teorema del binomio di Newton comporta che i coefficienti binomiali che si trovano sulla riga corrispondente ad un certo valore di n sono i coefficienti binomiali dello sviluppo di $(a+b)^n$. Questi possono essere calcolati direttamente, seguendo la definizione di coefficiente binomiale. Tuttavia il Teorema 1.7 getta nuova luce sull'albero. Infatti, a partire dalle prime due righe (cioè $n = 0$ e $n = 1$), ogni coefficiente binomiale è la somma dei due coefficienti binomiali che si trovano nella riga precedente, immediatamente a destra e immediatamente a sinistra. Se una delle due posizioni è vuota, la si considera come occupata da uno zero. Ad esempio

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3}, \qquad \binom{6}{5} = \binom{5}{4} + \binom{5}{5},$$

e così via. Allora, a partire dalle prime due righe (i cui coefficienti binomiali sono tutti uguali a 1), l'albero dei coefficienti binomiali si può generare riga per riga seguendo la proprietà data dal Teorema 1.7. Si ottiene così

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Questo albero è conosciuto come *triangolo di Tartaglia* e, per il ragionamento esposto, coincide con l'albero dei coefficienti binomiali. Si può osservare, per esempio, che la riga $n = 5$ dà i coefficienti dello sviluppo di $(a + b)^5$ calcolati nell'Esempio 2.2.

Ci sono due conseguenze immediate del teorema del binomio di Newton che intendiamo evidenziare.

Corollario 2.3. *Per $n \geq 0$ si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Dimostrazione. Basta sostituire $a = b = 1$ nella formula del binomio di Newton o osservare che entrambi i membri contano il numero di sottoinsieme di un insieme con n elementi. □

Corollario 2.4. *Per $n \geq 1$ si ha*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0,$$

ovvero in un insieme di n elementi vi sono tanti sottoinsiemi di cardinalità pari quanti sottoinsiemi di cardinalità dispari.

Dimostrazione. Basta sostituire $a = 1$ e $b = -1$ nella formula del binomio di Newton. □