Nome e cognome: ______________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (30 punti). Fattorizzare i polinomi seguenti.

(a) $x^3y^2 - x^2y^3 - x + y$

(b) $x^8 - 2x^6 + x^4$

(c) $x^2 + 4x + 4 - y^2$

(d) $3a^2 - 3a + 2ab - 2b - ac + c$

(e) $2a^2x^2 + 4a^2xy - 4a^2x + 2a^2y^2 - 4a^2y + 2a^2$

(f) $x^6 + x^5 - 2x^4 + 27x^3y^3 + 27x^2y^3 - 54xy^3$

(g) $a^2x^2 - b^2x^2 - 2a^2xy + 2b^2xy$

(h) $x^3 + x^3y^2 - 1 - y^2$

(i) $x^4 - x^3 - 8x + 8$

(j) $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 + a^2b + 2ab + b$

Esercizio 2 (10 punti).

(a) Fattorizzare il polinomio $x^5 - x^4 - x + 1$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[x]$.

(b) Determinare le soluzioni reali dell'equazione $x^5 - x^4 - x + 1 = 0$.

Esercizio 3 (15 punti). Si consideri il polinomio a coefficienti interi

$$p(x) = 2x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

(a) Determinare tutte le radici razionali di $p(x)$.

(b) Fattorizzare $p(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}[x]$.

(c) Determinare le soluzioni reali dell'equazione $2x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

Esercizio 4 (10 punti).

(a) Sia $p(x)$ un polinomio di terzo grado a coefficienti interi. Si provi che se $p(x)$ non ha radici razionali allora $p(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$.

Si consideri adesso il polinomio $p(x) = x^3 + 5$.

(b) Dimostrare che il polinomio $p(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$. Lo è anche in $\mathbb{Z}[x]$?

(c) Dimostrare che il polinomio $p(x)$ è riducibile su $\mathbb{R}[x]$ e scriverne la fattorizzazione in fattori irriducibili.

Esercizio 5 (10 punti). Si consideri il polinomio a coefficienti interi

$$p(x) = x^4 - 5x^2 + 6.$$

(a) Verificare che $p(x)$ non ha radici razionali.

(b) Il fatto che un polinomio di quarto grado non abbia radici implica necessariamente che il polinomio sia irriducibile? Giustificare opportunamente la risposta.

(c) Fattorizzare il polinomio $p(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ e in $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 6 (5 punti). Ricordando che 13 è un numero primo, determinare tutti i numeri naturali n e m tali che

$$n^2 - 4m^2 = 13.$$

Esercizio bonus. Dimostrare che il polinomio $xy + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}[x, y]$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: ________