Foglio di esercizi

Alessio Del Vigna

14 maggio 2021

Quando non specificato, il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è sempre quello standard, ossia quello definito da

$$\langle v, w\rangle = v^\top w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, su $\mathbb{C}^n$ considereremo il prodotto hermitiano standard, ossia

$$\langle v, w\rangle = v^\top \bar{w} \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n.$$

Esercizio 1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1-t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} t \\ 2+t \\ t \end{pmatrix},$$

dove $t \in \mathbb{R}$.

(i) Si determinino i valori di t per cui v e w sono ortogonali.

(ii) Si mostri che per ogni t i vettori v e w sono linearmente indipendenti, e per i valori di t determinati al punto precedente si completi l'insieme dei due vettori a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. In $\mathbb{C}^3$ si consideri il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Si completi v a una base ortogonale di $\mathbb{C}^3$.

Esercizio 3. Si consideri il sottospazio vettoriale

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x = 0,\ y + z = 0 \right\}.$$

(i) Si scrivano equazioni cartesiane per $U^\perp$.

(ii) Determinare la proiezione del vettore $w = (1, 1, 1, 1)^\top$ su U e su $U^\perp$.

(iii) Determinare la matrice della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica.

Esercizio 4. Si considerino i due vettori di $\mathbb{R}^4$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Si calcoli l'angolo formato dai due vettori.

(ii) Si determini la proiezione ortogonale di v lungo la direzione individuata da w.

(iii) Si determini la proiezione ortogonale di w lungo la direzione individuata da v.

(iv) Verificare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per i vettori v e w.

(v) Si determini una base ortogonale di Span (u, v) e la si estenda a una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Si consideri l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle = 4x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5y_1y_2.$$

(i) Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ e si determini la matrice che rappresenta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto alla base canonica.

(ii) Considerata la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

di $\mathbb{R}^2$, si determini la matrice che rappresenta $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rispetto a $\mathcal{B}$. Provare a svolgere questo punto in due modi: facendo il calcolo diretto sfruttando l'espressione del prodotto scalare oppure utilizzando la formula di cambiamento di base.

(iii) Ortogonalizzare la base $\mathcal{B}$ rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(iv) Determinare il sottospazio ortogonale al vettore $(1, 0)^\top$.

Esercizio 6*. Si consideri la matrice diagonale $n \times n$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ e l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle_D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ associata a D, ossia quella definita da

$$\langle v, w \rangle_D = v^\top D w.$$

(i) Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ è un'applicazione bilineare e simmetrica.

(ii) Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$ è definito positivo se e solo se $\lambda_i > 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.

(iii) Sia $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica $n \times n$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ l'applicazione bilineare e simmetrica associata ad A. Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi.

Suggerimento: utilizzare il teorema spettrale per diagonalizzare A tramite una matrice ortogonale e poi sfruttare il punto (ii).

Esercizio 7* (Un assaggio di serie di Fourier). Si consideri lo spazio $\mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue dall'intervallo $[-\pi,\pi]$ a valori reali, dotato del prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(i) Si dimostri che le funzioni

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \cos nx,\ \dots$$

sono a due a due ortogonali.

Suggerimento: sono utili le formule di Werner

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

(ii) Calcolare la norma di ciascuna delle funzioni elencate.

Esercizio 8. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 3/5 & a \\ 4/5 & b \end{pmatrix}.$$

(i) Si determinino a e b tali che f è una rotazione e si dica qual è l'angolo di rotazione.

(ii) Si determinino a e b in modo tale che f sia una riflessione e si determini qual è la retta fissata dalla trasformazione.

Esercizio 9. In $\mathbb{R}^2$ si consideri la retta r di equazione $2x + y = 0$. Scrivere la matrice della riflessione rispetto a r, rispetto alla base canonica.

Esercizio 10. In $\mathbb{R}^2$ si consideri la retta r di equazione $-2x + 3y = 0$. Scrivere la matrice della riflessione rispetto a r, rispetto alla base canonica.

Esercizio 11. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano U di equazione $x+y+z = 0$. Si scriva la matrice della riflessione rispetto a al piano U, rispetto alla base canonica.

Esercizio 12. In $\mathbb{R}^3$ si consideri il piano U di equazione $2x - y = 0$. Si scriva la matrice della riflessione rispetto a al piano U, rispetto alla base canonica.

Esercizio 13. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta generata dal vettore $v = (1,-1,0)^\top$. Si scriva la matrice rispetto alla base canonica della rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno all'asse v.

Esercizio 14. In $\mathbb{R}^3$ si consideri la retta generata dal vettore $v = (1,-1,0)^\top$. Si scriva la matrice rispetto alla base canonica della rotazione attorno all'asse v di angolo $\frac{\pi}{2}$ composta con la riflessione rispetto al piano perpendicolare a v.

Esercizio 15. In $\mathbb{R}^3$ si scriva la matrice rispetto alla base canonica della rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ attorno all'asse z.