Foglio di esercizi

Alessio Del Vigna

13 febbraio 2021

1 Argomenti preliminari

Esercizio 1. Dimostrare le seguenti proprietà per induzione.

(i) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \forall n \geq 1$

(iii) $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \quad \forall n \geq 2$

(iv) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n} \quad \forall n \geq 1$

Esercizio 2. Sia $(a_n)_{n\geq 1}$ la successione definita per ricorrenza da

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \quad \forall n \geq 1.$$

(i) Mostrare per induzione che la successione è monotona crescente e limitata superiormente.

(ii) Dedurre dal punto precedente che $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Esercizio 3. Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

(i) $z^4 - 2iz^2 + 3 = 0$

(ii) $z^3 - iz\bar{z} = 0$

(iii) $z^4 = \bar{z}^3$

(iv) $z|z| - 2\operatorname{Re} z = 0$

(v) $z + |z| = 3i + 2$

(vi) $z^2 = -i|z| - \sqrt{2}$

Esercizio 4. Risolvere in $\mathbb{C}$ il sistema di equazioni $\begin{cases} zw^2 = 1 \\ z^2 + w^4 = 2 \end{cases}$.

Esercizio 5. Sia $f : X \to Y$ una funzione e siano $A, B \subseteq X$.

(i) Provare che $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(ii) Provare che $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ e mostrare che in generale l'inclusione è stretta.

(iii) Provare che se f iniettiva vale $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Esercizio 6. Sia X un insieme non vuoto e sia $A \subseteq X$. La *funzione caratteristica* di A è la funzione

$$\mathbb{1}_A : X \to \{0,1\}, \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Dimostrare che valgono le seguenti proprietà, dove A e B sono sottoinsiemi di X:

(i) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$;

(ii) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$;

(iii) $\mathbb{1}_{A^\complement} = 1 - \mathbb{1}_A$.

2 Spazi e sottospazi vettoriali

Esercizio 7. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x + y - z = 0\}.$$

(i) Determinare una base $\mathcal{B}$ di U.

(ii) Determinare le coordinate del vettore $(1, 1, 2) \in U$ rispetto alla base $\mathcal{B}$ trovata al punto precedente.

(iii) Determinare il vettore di $\mathbb{R}^3$ che ha coordinate $(1, -1)$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Esercizio 8. Siano

$$V = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x + 2y + z - t = 0\big\} \quad \text{e} \quad W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Si determini una base di $V \cap W$.

Esercizio 9. Data la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{smallmatrix}\right)$ si consideri l'insieme

$$V = \{B \in M(2, \mathbb{R}) \,:\, \operatorname{Tr}(AB) = 0\}\,.$$

Si dica se V è un sottospazio vettoriale di $M(2, \mathbb{R})$ e in caso affermativo se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 10. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Sia poi $W = \{p \in V \,:\, p(1) = 0\}$. Mostrare che W è un sottospazio vettoriale di V e determinarne una base.

Esercizio 11. Sia $t \in \mathbb{R}$ e si considerino i due sottospazi di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-3\\-3\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad W_t = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\t+1\\2t+1\\1\end{pmatrix}\right).$$

(i) Determinare la dimensione di V e la dimensione di W_t al variare di t.

(ii) Determinare la dimensione di $V \cap W_t$ al variare di t.

(iii) Scrivere le equazioni cartesiane del sottospazio W_{-1}.

Esercizio 12. Si consideriano i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$V_h = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, 2x - 3y + t = 0,\, hx - hy - z = 0\big\}$$

$$W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\6\\-1\\-4\end{pmatrix}\right),$$

dove $h \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di h per cui $\mathbb{R}^4 = V_h \oplus W$.

Esercizio 13. Sia $k \in \mathbb{R}$, e si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = k + \frac{14}{3} \\ 2x + ky - z = k + 3 \\ -x + y + kz = -k \end{cases} .$$

(i) Determinare la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema al variare di k.

(ii) Determinare l'insieme delle soluzioni del sistema per $k = 1$ e per $k = \frac{4}{3}$.

3 Applicazioni lineari

Esercizio 14. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare non nulla, e siano U_1 e U_2 sottospazi vettoriali di V tali che $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Provare che se $(U_1 + U_2) \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ allora $f(U_1 + U_2) = f(U_1) \oplus f(U_2)$.

Esercizio 15. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$. Si provi che f è lineare se e solo se il *grafico* di f, ossia l'insieme

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in V \times W \, : \, y = f(x)\} ,$$

è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

Esercizio 16. Sia $f : V \to V$ lineare. Si supponga che esistano un vettore $v \in V$ e un intero $m \geq 1$ tali che $f^{m-1}(v) \neq 0$ e $f^m(v) = 0$. Si dimostri che $\{v, f(v), \dots, f^{m-1}(v)\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V.

Esercizio 17. Sia U il piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x + y - 2z = 0$ e r la retta generata dal vettore $(1, 1, 3)$. Se esiste, costruire un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(r) \subseteq U$, $f(U) \subseteq r$ e $f^2 \neq 0$.

Esercizio 18. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$f(x, y, z) = (x - y,\, x + 2y + 3z,\, y + z).$$

(i) Determinare una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$.

(ii) Costruire, se esiste, un'applicazione lineare non nulla $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f = 0$.

Esercizio 19. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Spiegare perché esiste un'unica applicazione lineare con le proprietà indicate.

(ii) Si determini la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Si determini la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f)$, dove $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono le due basi di $\mathbb{R}^2$ date da

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Svolgere l'esercizio in due modi: il primo utilizzando la formula del cambiamento di base e il secondo sfruttando la definizione di matrice associata ad un'applicazione lineare.

Esercizio 20. Sia $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y) = (-y, 2x)$. Determinare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

Esercizio 21. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$ e sia

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$.

Esercizio 22. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_h(X) = A_h X$ per ogni $X \in \mathbb{R}^3$, dove

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -1 & h+1 \\ 2 & h & -h \\ 4 & h-1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R}).$$

(i) Per quali valori di h l'applicazione f_h è invertibile?

(ii) Si determinino una base di $\operatorname{Im} f_h$ e $\operatorname{Ker} f_h$ per ogni h.

Esercizio 23. Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si consideri l'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f_h(X) = A_h X$ per ogni $X \in \mathbb{R}^4$, dove

$$A_h = \begin{pmatrix} h+1 & 2 & h+5 & 0 \\ h & 1 & 2 & h \\ h & h & 3h+1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3, 4, \mathbb{R}).$$

(i) Al variare di $h \in \mathbb{R}$ si calcoli $\dim \operatorname{Im} f_h$.

(ii) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\operatorname{Im} f_h$ è isomorfo a $\operatorname{Ker} f_h$.

(iii) Scelto un valore di $h \in \mathbb{R}$ per cui f_h non è surgettiva, si determinino equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} f_h$.

(iv) Sia $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x+y=0,\ z=0\}$. Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbb{R}^4 = H \oplus \operatorname{Ker} f_h$.

Esercizio 24*. Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio dei polinomi di grado ≤ 3 e a coefficienti reali e sia $W = \{p \in V \,:\, p(1) = 0\}$.

(i) Posto $Z_h = \operatorname{Span}\left(-2h - 2 + hx + 2x^2 + x^3,\ h - x^2, 2 - hx - x^3\right)$, si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per cui $\dim(Z_h \cap W) = 1$.

(ii) Sia $q(x) = x^3 + x - 1$. Si mostri che esiste $f \in \operatorname{End}(V)$ con le seguenti proprietà:

  (a) $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$;

  (b) esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(w) = \lambda w\ \forall w \in W$;

  (c) $f(q) = q$.

(iii) Si verifichi che l'insieme

$$E = \{f \in \operatorname{End}(V) \,:\, \dim \operatorname{Im} f \leq 2,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(w) = \lambda w\ \forall w \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\operatorname{End}(V)$ e se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 25*. Siano $f, g \in \mathrm{End}(V)$ endomorfismi di uno spazio vettoriale V tali che $f^2 = 0$, $g^2 = 0$, $f \circ g + g \circ f = id$. Si provi che:

(i) $f(\mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{Ker}\, f$, $g(\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}\, g$ e si ha $V = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, g$;

(ii) V ha dimensione pari;

(iii) se $\dim V = 2$, allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$