

# Meccanica superiore

Alessio Del Vigna

7 marzo 2021



# Indice

<b>1</b>	<b>Richiami di meccanica hamiltoniana</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Trasformazioni canoniche . . . . .	2
1.3	Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo . . . . .	4
1.3.1	Spazio delle fasi esteso . . . . .	7
1.3.2	Funzioni generatrici dipendenti dal tempo . . . . .	9
1.4	L'equazione di Hamilton-Jacobi . . . . .	11
1.5	Separazione delle variabili e applicazioni . . . . .	13
1.5.1	Problema di Keplero accelerato . . . . .	14
1.5.2	Problema dei due centri . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Singularità del problema degli <math>N</math> corpi</b>	<b>17</b>
2.1	Il teorema di esistenza di Cauchy . . . . .	17
2.2	Il problema degli $N$ corpi e le singularità . . . . .	19
2.3	Collisioni . . . . .	23
2.4	Il teorema di von Zeipel . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Regolarizzazione delle collisioni</b>	<b>35</b>
3.1	La trasformazione regolarizzante . . . . .	35
3.2	Applicazione al problema dei tre corpi . . . . .	41
3.3	Un teorema di Sundman . . . . .	43
3.4	Il teorema di Levi-Civita . . . . .	45
3.4.1	Il problema tridimensionale . . . . .	46
3.4.2	Un risultato di Hamilton . . . . .	48
3.5	Un teorema di Moser . . . . .	48
3.5.1	Il flusso geodetico sulla sfera . . . . .	49
3.5.2	Il gruppo di Lie $SL(n)$ . . . . .	50
3.5.3	L'azione del gruppo $SL(2)$ . . . . .	51
3.5.4	Il teorema di Moser . . . . .	53
3.6	L'azione di $SO(3)$ . . . . .	56
3.7	La regolarizzazione di Easton . . . . .	57
3.7.1	Quattro controesempi . . . . .	60
3.8	Collisioni triple . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Orbite periodiche</b>	<b>69</b>
4.1	Le soluzioni di Lagrange . . . . .	69
4.1.1	Generalizzazione a $N$ corpi . . . . .	73
4.2	Metodi di continuazione . . . . .	74
4.3	Orbite periodiche nel problema dei tre corpi . . . . .	81
4.4	La teoria di Floquet . . . . .	86
4.5	Orbite periodiche con metodi variazionali I . . . . .	87
4.5.1	Coercività e vincoli . . . . .	88
4.5.2	Esclusione delle collisioni . . . . .	90
4.6	Orbite periodiche con metodi variazionali II . . . . .	92
4.6.1	Una condizione di coercività . . . . .	93
4.6.2	Recupero della coercività . . . . .	95

# Capitolo 1

## Richiami di meccanica hamiltoniana

In questo capitolo diamo dei richiami alla formulazione hamiltoniana della meccanica e alla teoria delle trasformazioni canoniche.

### 1.1 Introduzione

Sia  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^2$  su un aperto di  $\mathbb{R}^{2n}$ . Ad essa possiamo associare il sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}} \end{cases}.$$

Indichiamo con il termine *variabili canoniche* le due variabili vettoriali  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  in  $\mathbb{R}^n$ . Introduciamo una notazione compatta per i sistemi hamiltoniani: il vettore delle variabili canoniche sarà  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ , così che il sistema hamiltoniano si scrive come

$$\dot{\mathbf{x}} = J\nabla_{\mathbf{x}}H,$$

dove  $J$  è l'identità simplettica

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}.$$

Il campo vettoriale  $J\nabla_{\mathbf{x}}H$  viene comunemente denotato con  $\mathbf{X}_H$ .

**Lemma 1.1.** *Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale definito su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ . Se  $\mathbf{X}$  è hamiltoniano di classe  $\mathcal{C}^1$  allora la matrice  $J\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}$  è simmetrica, e vale il viceversa se  $U$  è semplicemente connesso.*

**Definizione 1.2.** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni delle variabili canoniche. La *parentesi di Poisson* tra  $f$  e  $g$  è definita da

$$\{f, g\} := \nabla f \cdot J\nabla g = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

L'operatore parentesi di Poisson è bilineare, antisimmetrico e soddisfa l'*identità di Jacobi*

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Questo ci dice che lo spazio  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$  con l'operatore  $\{\cdot, \cdot\}$  è un'algebra di Lie. Vediamo adesso una costruzione diversa delle parentesi di Poisson. Sia  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_g$  il sistema hamiltoniano con hamiltoniana  $g$  e sia  $\Phi^t(\mathbf{x})$  il suo flusso integrale. Proviamo che

$$\left. \frac{d}{dt} f(\Phi^t(\mathbf{x})) \right|_{t=0} = \{f, g\}.$$

Basta esplicitare la derivata totale

$$\frac{d}{dt} f(\Phi^t(\mathbf{x})) = \nabla f(\Phi^t(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{X}_g(\Phi^t(\mathbf{x})) = \nabla f(\Phi^t(\mathbf{x})) \cdot J\nabla g(\Phi^t(\mathbf{x}))$$

e poi valutare in  $t = 0$  ricordando che  $\Phi^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

**Corollario 1.3.** *La funzione  $f$  è un integrale primo del sistema hamiltoniano  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H$  se e solo se  $\{f, H\} = 0$ .*

**Corollario 1.4.** *Se  $f$  e  $g$  sono integrali primi di un sistema hamiltoniano allora  $\{f, g\}$  è un integrale primo.*

*Dimostrazione.* Dall'identità di Jacobi si ha

$$0 = \{\{f, g\}, H\} + \{\{g, H\}, f\} + \{\{H, f\}, g\},$$

e dal precedente corollario  $\{f, H\} = \{g, H\} = 0$ . Così  $\{\{f, g\}, H\} = 0$ . □

## 1.2 Trasformazioni canoniche

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  un aperto e sia  $\Psi$  una trasformazione invertibile di classe  $C^2$  definita su  $U$ , ossia  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ . Dato un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  definito su  $U$ , indichiamo con  $\Psi_*\mathbf{X}$  il campo trasformato mediante  $\Psi$  dato da

$$\Psi_*\mathbf{X} = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X} \right) \circ \Psi^{-1},$$

detto anche *push-forward* di  $\mathbf{X}$ .

**Definizione 1.5.** Diremo che  $\Psi$  è *canonica* se per ogni hamiltoniana  $H$  esiste una hamiltoniana  $K$  tale che  $\Psi_*\mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K$ .

Ovviamente non è detto che tutte le trasformazioni di coordinate siano canoniche, vediamo subito un esempio.

**Esempio 1.6.** Lavoriamo con  $n = 1$  e consideriamo l'hamiltoniana  $H(p, q) = p \cos q$ . Come trasformazione  $(P, Q) = \Psi(p, q)$  scegliamo invece

$$\begin{cases} P = p \cos q \\ Q = p \sin q \end{cases}.$$

Calcoliamo adesso il push-forward del campo  $\mathbf{X}_H$  mediante la trasformazione: si ha

$$\mathbf{X}_H = \begin{pmatrix} p \sin q \\ \cos q \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \cos q & -p \sin q \\ \sin q & p \cos q \end{pmatrix},$$

così

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}, \quad \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H \right) \circ \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{P^2 + Q^2} \end{pmatrix}.$$

Verifichiamo adesso che non esiste alcuna hamiltoniana  $K$  tale che  $\mathbf{X}_K$  sia il campo appena scritto. Se tale hamiltoniana esistesse avremmo che

$$-K_Q = 0 \quad \text{e} \quad K_P = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

da cui

$$K_{PQ} = 0 \quad \text{e} \quad K_{QP} = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Ma ciò è assurdo perché  $K$  deve essere di classe  $\mathcal{C}^2$ , e quindi le sue derivate parziali seconde miste devono coincidere per il teorema di Schwarz.

Per caratterizzare le trasformazioni canoniche è utile introdurre un'altra classe di trasformazioni.

**Definizione 1.7.** Sia  $\alpha \neq 0$  un numero reale. Un diffeomorfismo  $\Psi$  si dice *simplettico con valenza  $\alpha$*  se per ogni  $\mathbf{x}$  vale

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} J \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top = \alpha J.$$

Si verifica facilmente che l'insieme delle trasformazioni simplettiche con valenza forma un gruppo con l'operazione di composizione: in particolare, la composizione di due trasformazioni simplettiche con valenze  $\alpha$  e  $\beta$  è simplettica ed ha valenza  $\alpha\beta$ .

**Definizione 1.8.** Le trasformazioni simplettiche con valenza  $\alpha = 1$  si dicono *univalenti* o *completamente canoniche*.

**Teorema 1.9.** Una trasformazione  $\Psi$  è canonica se e solo se è simplettica con valenza  $\alpha$  per qualche  $\alpha$ .

**Teorema 1.10.** Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(i) la trasformazione  $\Psi$  è simplettica con valenza  $\alpha$ ;

- (ii) per ogni hamiltoniana  $H$  di classe  $\mathcal{C}^2$  il campo vettoriale hamiltoniano  $\mathbf{X}_H$  viene trasformato nel campo vettoriale hamiltoniano  $\mathbf{X}_K$ , con  $K = \alpha H \circ \Psi^{-1}$ , ossia

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H \right) \circ \Psi^{-1} = \mathbf{X}_{\alpha H \circ \Psi^{-1}};$$

- (iii) per ogni  $f$  e  $g$  di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $U$  vale  $\{f \circ \Psi^{-1}, g \circ \Psi^{-1}\}_{\mathbf{y}} = \alpha^{-1} \{f, g\}_{\mathbf{x}} \circ \Psi^{-1}$ ;  
 (iv) la forma differenziale  $\mathbf{P} \cdot d\mathbf{Q} - \alpha \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q}$  è chiusa;  
 (v) si ha  $\{P_i, P_j\}_{\mathbf{x}} = 0$ ,  $\{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{x}} = 0$  e  $\{Q_i, P_j\}_{\mathbf{x}} = \alpha \delta_{ij}$  per ogni  $i, j = 1, \dots, n$ .

Si osservi che la condizione (v) implica che  $\Psi$  è completamente canonica se e solo se preserva le parentesi di Poisson fondamentali.

Ci sono principalmente due tecniche con le quali si possono costruire trasformazioni canoniche, richiamiamole brevemente.

- (i) *Flusso di un sistema hamiltoniano.* Sia

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H$$

un sistema hamiltoniano e sia  $\Phi^t$  il suo flusso integrale. Allora le trasformazioni a tempo bloccato  $\mathbf{x} \mapsto \Phi^{\bar{t}}(\mathbf{x})$  sono canoniche univalenti per ogni  $\bar{t}$ .

- (ii) *Funzione generatrice.* Sia  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  una funzione di classe  $\mathcal{C}^2$  su un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  con la proprietà di non degenerazione

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}}(\mathbf{x}) \neq 0$$

per ogni  $\mathbf{x}$ . Allora per ogni  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0) \in U$  le relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \end{cases}$$

definiscono implicitamente una trasformazione completamente canonica  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  da un intorno di  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  a un intorno di  $(\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0)$ , con  $\mathbf{p}_0 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0)$  e  $\mathbf{Q}_0 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}_0)$ .

### 1.3 Trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo

Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  un aperto e  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto. Il tipo di trasformazioni che consideriamo adesso sono delle funzioni  $\Psi$  definite su  $U \times I$  e di classe  $\mathcal{C}^2$ , con

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t),$$



dove  $\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t))$ . Ossia la dipendenza dal tempo nella trasformazione deve essere esplicita. Per trasformazioni di questo tipo cambia anche l'espressione del push-forward di un campo vettoriale  $\mathbf{X}$ :

$$\Psi_* \mathbf{X} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \Psi^{-1}.$$

**Definizione 1.11.** Diremo che  $\Psi$  è *canonica* se per ogni hamiltoniana  $H$  di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $U \times I$  esiste una hamiltoniana  $K$  di classe  $\mathcal{C}^2$  su  $\Psi(U \times I)$  tale che  $\Psi_* \mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K$ .

**Definizione 1.12.** Data una trasformazione  $\Psi$  come sopra, diciamo *trasformazioni a tempo bloccato* le trasformazioni

$$\Phi_{\bar{t}}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, \bar{t}),$$

con  $\bar{t} \in I$

Esiste una caratterizzazione delle trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo in termini di trasformazioni simplettiche.

**Teorema 1.13.** *Se una trasformazione  $\Psi$  è canonica allora esiste  $\alpha \neq 0$  tale che ogni trasformazione a tempo bloccato è simplettica con valenza  $\alpha$ . Il viceversa vale se  $U$  è semplicemente connesso. Inoltre per ogni hamiltoniana  $H$  di classe  $\mathcal{C}^2$  vale*

$$\Psi_* \mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K,$$

dove  $K = \alpha H \circ \Psi^{-1} + K_0$  e  $K_0$  è l'hamiltoniana del campo  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Prendiamo l'hamiltoniana nulla  $H = 0$ : per ipotesi di canonicità abbiamo l'esistenza di un'hamiltoniana  $K_0$  tale che

$$\mathbf{X}_{K_0} = \Psi_* \mathbf{X}_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}.$$

Adesso consideriamo un'hamiltoniana  $H$  generica: anche stavolta sappiamo che esiste  $K$  tale che  $\Psi_* \mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K$ , ovvero

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_K &= \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \circ \Psi^{-1} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H \circ \Psi^{-1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H \circ \Psi^{-1} + \mathbf{X}_{K_0}, \end{aligned}$$

e riscrivendo il tutto si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{X}_H \circ \Psi^{-1} = \mathbf{X}_K - \mathbf{X}_{K_0} = \mathbf{X}_{K-K_0}.$$

Ciò significa che per ogni tempo  $\bar{t}$  la trasformazione a tempo bloccato  $\Phi_{\bar{t}}$  è canonica indipendente dal tempo, e dunque è simplettica con valenza  $\alpha(\bar{t})$ . Ci resta dunque da mostrare che  $\alpha(\bar{t})$  non dipende da  $\bar{t}$ . Osserviamo che per ogni  $t_0$  fissato possiamo scrivere

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\Phi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t) \Big|_{\mathbf{y}=\Phi_{t_0}(\mathbf{x})}. \quad (1.1)$$

Posto allora  $\Theta(\mathbf{y}, t) = \Phi(\Phi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t)$  abbiamo che tale mappa è un flusso hamiltoniano: infatti

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Theta(\mathbf{y}, t) &= \frac{\partial\Phi}{\partial t}(\Phi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t) = \mathbf{X}_{K_0}(\Phi(\Phi_{t_0}^{-1}(\mathbf{y}), t), t) = \\ &= \mathbf{X}_{K_0}(\Theta(\mathbf{y}, t), t),\end{aligned}$$

ed inoltre  $\Theta(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y}$  per ogni  $\mathbf{y}$ . Dalla costruzione delle trasformazioni canoniche mediante flussi hamiltoniani sappiamo che, fissato  $t$ , la trasformazione  $\Theta(\mathbf{y}, t)$  è canonica univalente. Ora, per ogni  $\bar{t}$ , dalla (1.1) abbiamo

$$\Phi_{\bar{t}}(\mathbf{x}) = \Theta(\Phi_{t_0}(\mathbf{x}), \bar{t}).$$

Dato che  $\Phi_{\bar{t}}(\mathbf{x})$  è симплетica con valenza  $\alpha(\bar{t})$  e  $\Phi_{t_0}(\mathbf{x})$  è симплетica con valenza  $\alpha(t_0)$ , passando alle valenze e ricordando la legge di gruppo si ha che  $\alpha(\bar{t}) = 1 \cdot \alpha(t_0) = \alpha(t_0)$  e dunque tale  $\alpha(\bar{t})$  è costante.

( $\Leftarrow$ ) Ricordiamo la definizione del push-forward di un campo hamiltoniano:

$$\Psi_*\mathbf{X}_H = \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{X}_H + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \circ \Psi^{-1}.$$

Abbiamo concluso se dimostriamo che il campo scritto a destra è anch'esso hamiltoniano. Intanto, dal fatto che  $\Phi_t$  è симплетica con valenza  $\alpha$  e dal Teorema 1.10 abbiamo che

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{X}_H \circ \Psi^{-1} = \mathbf{X}_{\alpha H \circ \Psi^{-1}},$$

dunque ci basta mostrare che  $\frac{\partial\Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$  è un campo hamiltoniano. Per far questo, grazie alle ipotesi e al Lemma 1.1, ci basta dimostrare che la matrice

$$J \frac{\partial}{\partial\mathbf{y}} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} \right)$$

è simmetrica. Eseguiamo la derivata:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{y}} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} \right) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathbf{x}\partial t} \circ \Psi^{-1} \cdot \frac{\partial\Phi^{-1}}{\partial\mathbf{y}} = \left[ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\mathbf{x}\partial t} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \right)^{-1} \right] \circ \Psi^{-1}.$$

Allora

$$\begin{aligned}
& J \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} \right) - \left[ J \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1} \right) \right]^\top = \\
& = \left\{ J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x} \partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-T} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x} \partial t} \right)^\top J^\top \right\} \circ \Psi^{-1} = \\
& = \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-T} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top J \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x} \partial t} + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathbf{x} \partial t} \right)^\top J \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right] \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \right\} \circ \Psi^{-1} = \\
& = \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-T} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top J \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right] \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \right\} \circ \Psi^{-1} = \\
& = \left\{ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-T} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha J) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right)^{-1} \right\} \circ \Psi^{-1} = 0,
\end{aligned}$$

che è la tesi. □

### 1.3.1 Spazio delle fasi esteso

Continuiamo a trattare le trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo. Date le variabili  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ , l'idea è quella di estenderle in modo da includere una nuova variabile scalare  $e$ , in modo che le nuove coordinate siano ancora canoniche (nel senso di momenti e coordinate). Ovvero consideriamo le nuove variabili

$$(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$$

in cui  $e$  è il momento coniugato a  $t$ . Chiameremo questo spazio lo *spazio delle fasi esteso*. Dato un diffeomorfismo

$$\Psi : (\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \mapsto (\Phi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t)$$

vorremmo cercare di estenderlo ad una mappa

$$\tilde{\Psi} : (\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) \mapsto (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, t)$$

che sia un diffeomorfismo con l'immagine. Se abbiamo una trasformazione  $\Psi$  canonica vorremmo completarla scegliendo  $\mathcal{E}$  in modo tale da rendere anche l'estensione  $\tilde{\Psi}$  canonica.

**Osservazione 1.14.** Passare allo spazio delle fasi esteso permette di trattare sistemi hamiltoniani dipendenti dal tempo nell'ambito di quelli indipendenti dal tempo, aumentando però la dimensione dello spazio delle fasi. Osserviamo infatti che, dato un sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$$

con hamiltoniana  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$  dipendente dal tempo, si può scrivere facilmente un sistema hamiltoniano nello spazio delle fasi esteso che includa il precedente: basta scegliere come nuova funzione di Hamilton

$$\tilde{H}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) := H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + e.$$

Con tale hamiltoniana si ha il sistema

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{e} = -\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{t} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial e} = 1.$$

**Teorema 1.15.** *Sia  $\Psi$  una trasformazione canonica con valenza  $\alpha$ . Allora  $\tilde{\Psi}$  è canonica con valenza  $\alpha$  se e solo se*

$$\mathcal{E} = \alpha e - H_0,$$

dove  $H_0 = K_0 \circ \Psi$  e  $K_0$  è l'hamiltoniana del campo  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$ , definita a meno di funzioni additive del tempo.

*Dimostrazione.* Denotiamo con  $\tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t)$ , allora si ha

$$\{f, g\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{f, g\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial g}{\partial e} - \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial g}{\partial t},$$

che sono le parentesi di Poisson nello spazio delle fasi esteso. La trasformazione  $\tilde{\Psi}$  è canonica indipendente dal tempo nelle variabili dello spazio delle fasi esteso se e solo conserva (a meno di moltiplicazione per  $\alpha$ ) le parentesi di Poisson fondamentali. In particolare

$$\{t, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \alpha \{t, e\}_{\mathbf{x}} = \alpha,$$

e osservato che  $\{t, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial e}$  si ottiene intanto  $\mathcal{E} = \alpha e + \mathcal{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ . Cerchiamo dunque di capire che forma deve avere  $\mathcal{F}$ , sfruttando le altre parentesi di Poisson. Si ha

$$0 = \{P_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{P_i, \mathcal{E}\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial P_i}{\partial t} \alpha = \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \alpha \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (1.2)$$

e

$$0 = \{Q_i, \mathcal{E}\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{Q_i, \mathcal{E}\}_{\mathbf{x}} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \alpha = \{Q_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \alpha \frac{\partial Q_i}{\partial t}. \quad (1.3)$$

Dato che  $\Psi$  è canonica sappiamo che, scelta l'hamiltoniana nulla, esiste  $K_0$  tale che  $\mathbf{X}_{K_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$ . Esplicitando l'espressione precedente, per ogni indice  $i = 1, \dots, n$  abbiamo

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} = -\frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \Psi \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \frac{\partial K_0}{\partial P_i} \circ \Psi.$$

Utilizziamo queste uguaglianze nelle relazioni (1.2) e (1.3), per esempio nella prima:

$$\begin{aligned} 0 &= \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \alpha \frac{\partial P_i}{\partial t} = \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} - \alpha \frac{\partial K_0}{\partial Q_i} \circ \Psi = \\ &= \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \alpha \{P_i, K_0\}_{\mathbf{y}} \circ \Psi = \\ &= \{P_i, \mathcal{F}\}_{\mathbf{x}} + \{P_i, H_0\}_{\mathbf{x}} = \{P_i, \mathcal{F} + H_0\}_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

dove il penultimo passaggio vale perché  $\Psi$  è  $\alpha$ -simplettica. Con analoghi passaggi per la (1.3) abbiamo  $\{Q_i, \mathcal{F} + H_0\}_{\mathbf{x}} = 0$ . Da queste relazioni si può ricavare che  $\mathcal{F} + H_0$  è costante come funzione di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , ossia  $\mathcal{F} = -H_0 + f(t)$  per una certa funzione  $f$  del solo tempo  $t$ .  $\square$

**Osservazione 1.16.** Nella parte finale della precedente dimostrazione abbiamo dimostrato che  $\mathcal{F} + H_0$  non dipende da  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , ossia  $\mathcal{F} + H_0 = f(t)$  per un'opportuna funzione del tempo. Questo però non è un problema, in quanto l'aggiunta di una funzione del tempo ad una hamiltoniana non altera il sistema hamiltoniano associato, che pertanto avrà le stesse soluzioni.

Il teorema precedente ci dice, partendo da una trasformazione canonica  $\Psi$ , come possiamo estenderla allo spazio delle fasi esteso ed ottenere ancora una trasformazione canonica. Il risultato che segue dà una sorta di viceversa.

**Proposizione 1.17.** *Sia*

$$\tilde{\Psi}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) = (\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \mathcal{E}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t)$$

una trasformazione canonica con valenza  $\alpha$ . Allora  $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = (\mathbf{P}, \mathbf{Q}, t)$  è canonica con valenza  $\alpha$ .

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi sappiamo che le parentesi di Poisson fondamentali rispetto alle variabili  $\tilde{\mathbf{x}}$  sono conservate a meno di un fattore  $\alpha$ . Dalle ipotesi su  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , ossia dal fatto che essi non dipendano da  $e$ , abbiamo che

$$\{P_i, Q_j\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{P_i, Q_j\}_{\mathbf{x}}, \quad \{Q_i, Q_j\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \{P_i, P_j\}_{\tilde{\mathbf{x}}} = \{P_i, P_j\}_{\mathbf{x}}.$$

Questo ci dice che per  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  sono conservate a meno di  $\alpha$  le parentesi di Poisson rispetto alle variabili  $\mathbf{x}$ , e questo per ogni  $t$ . Quindi questo ci dice che per ogni  $t$  le trasformazioni a tempo bloccato  $\Phi_t$  sono canoniche con valenza  $\alpha$  indipendente da  $t$ : quindi localmente  $\Psi$  è canonica.  $\square$

### 1.3.2 Funzioni generatrici dipendenti dal tempo

Vediamo adesso come generare trasformazioni canoniche dipendenti dal tempo grazie a funzioni generatrici dipendenti dal tempo.

**Proposizione 1.18.** *Sia  $S : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $S = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$  di classe  $\mathcal{C}^2$ , che soddisfa la condizione*

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \neq 0$$

per ogni  $(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Allora le relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) \end{cases}$$

definiscono implicitamente una trasformazione canonica dipendente dal tempo e univalente.

*Dimostrazione.* Introduciamo la funzione

$$\tilde{S}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \mathcal{E}t,$$

funzione dunque delle nuove coordinate  $(\mathbf{q}, t)$  e dei nuovi momenti  $(\mathbf{P}, \mathcal{E})$ . Vediamo che  $\tilde{S}$  soddisfa la condizione di regolarità per poter generare una trasformazione canonica. La matrice in questione è

$$\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial(\mathbf{q}, t) \partial(\mathbf{P}, \mathcal{E})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} & \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathbf{P}} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathcal{E}} & \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial \mathcal{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}} & * \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

che ha determinante  $\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{P}}$ , e dunque non nullo per ipotesi. Così  $\tilde{S}$  è la funzione generatrice di una trasformazione canonica  $\tilde{\Psi}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) = (\mathbf{P}, \mathcal{E}, \mathbf{Q}, \tau)$  indipendente dal tempo nello spazio delle fasi esteso e tale trasformazione è definita implicitamente dalle relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) \\ e = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathbf{Q} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) \\ \tau = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathcal{E}}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) \end{cases}. \quad (1.4)$$

L'ultima relazione ci dice che  $\tau = t$ , come del resto deve essere per una trasformazione canonica dipendente dal tempo. La prima invece si scrive

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t),$$

e grazie alla condizione di regolarità possiamo invertire localmente la relazione rispetto a  $\mathbf{P}$ ; così si ottiene  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ , ossia  $\mathbf{P}$  non dipende dalla variabile  $e$ . Analoga conclusione per  $\mathbf{Q}$  si ottiene sfruttando la terza relazione, ovvero si ha  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ . Per la Proposizione 1.17 abbiamo che la trasformazione  $\Psi$  generata da  $S$  è canonica univalente perché restrizione di una canonica univalente.  $\square$

Nel caso di trasformazioni canoniche generate da una funzione  $S$ , data un'hamiltoniana  $H$ , è possibile scrivere la nuova hamiltoniana  $K$  in termini di  $H$  e di  $S$ .

**Corollario 1.19.** *Sia  $\Psi$  una trasformazione canonica generata da una funzione  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ . Allora per ogni hamiltoniana  $H$  si ha  $\Psi_* \mathbf{X}_H = \mathbf{X}_K$ , dove*

$$K \circ \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) = H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), t).$$

*Dimostrazione.* Sappiamo che la nuova hamiltoniana è della forma  $K = H \circ \Psi^{-1} + K_0$ , dove  $K_0$  è l'hamiltoniana del campo  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} \circ \Psi^{-1}$ . Così

$$K \circ \Psi = H + K_0 \circ \Psi = H + H_0.$$

Estendiamo la trasformazione  $\Psi$  alla trasformazione  $\tilde{\Psi}$  definita sullo spazio delle fasi esteso. Scegliamo  $\mathcal{E}(\mathbf{p}, e, \mathbf{q}, t) = e - H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ , in modo che  $\tilde{\Psi}$  sia canonica univalente. Definiamo come prima la funzione  $\tilde{S}(\mathbf{q}, t, \mathbf{P}, \mathcal{E}) = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + \mathcal{E}t$ , e ricordiamo le relazioni (1.4). La seconda di esse ci dice che

$$e = \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{E},$$

dunque  $\frac{\partial S}{\partial t} = e - \mathcal{E} = H_0$  e abbiamo la tesi.  $\square$

## 1.4 L'equazione di Hamilton-Jacobi

La teoria di Hamilton-Jacobi riguardo all'integrabilità dei sistemi hamiltoniani è nata attorno al 1840: in particolare nel 1837 uscì il lavoro di Hamilton e nel 1840 quello di Jacobi. I due lavori vennero sviluppati separatamente, benché Jacobi conoscesse il lavoro di Hamilton.

Il nostro scopo sarà integrare il sistema hamiltoniano

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H,$$

dove integrare significa esibire una soluzione del sistema a meno di inversioni e quadrature. Per far ciò, l'idea di Jacobi era quella di cercare una trasformazione canonica che porti il campo hamiltoniano  $\mathbf{X}_H$  nel campo nullo. In tal modo, nelle nuove coordinate  $\mathbf{y} = (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  il sistema hamiltoniano sarà della forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

dunque banalmente integrabile.

**Osservazione 1.20.** Il nuovo sistema hamiltoniano ha soltanto equilibri, quindi ci potremmo chiedere dove sia finita la dinamica data dal problema iniziale. In un certo senso la dinamica è stata assorbita dalla trasformazione  $\Psi$ , che pertanto verrà cercata dipendente dal tempo.

Cerchiamo una funzione generatrice  $S$  per la trasformazione canonica. Grazie al Corollario 1.19 abbiamo che tale  $S$  deve soddisfare

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

**Definizione 1.21.** L'equazione precedente è detta *equazione di Hamilton-Jacobi* per la funzione  $S$ , detta *funzione principale di Hamilton*.

Un *integrale completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi è una famiglia  $S(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t)$  di soluzioni, che dipende dalle  $n + 1$  variabili  $(\mathbf{q}, t)$  e dalle  $n$  costanti di integrazione  $\boldsymbol{\alpha}$ , e tale che

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \neq 0.$$

**Osservazione 1.22.** Notiamo che se  $S$  è soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi allora lo è anche  $S + c$ , con  $c$  costante. Dunque nessuna delle costanti  $\alpha$  può essere puramente additiva.

**Teorema 1.23** (Jacobi). *La conoscenza di un integrale completo  $S$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi permette di risolvere il sistema hamiltoniano in  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}_H$  (nel senso di Liouville, ossia a meno di inversioni e quadrature).*

*Dimostrazione.* Siano  $(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  i dati iniziali del sistema hamiltoniano e sia  $S$  l'integrale completo dato dalle ipotesi. Consideriamo le relazioni di trasformazione

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \alpha, t) \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \alpha, t) \end{cases}$$

Scegliamo come parametri  $\alpha$  i nuovi momenti  $\mathbf{P}$ , che tanto sappiamo risultare costanti: ossia compiamo la scelta  $\mathbf{P} = \alpha$ . Si ha

$$\mathbf{p}_0 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}, 0),$$

da cui possiamo ricavare le costanti  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$  grazie alla condizione di non degenerazione di  $S$ . Dalla seconda relazione si ha

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(\mathbf{q}_0, \mathbf{P}, 0),$$

che ci dice quali sono le coordinate  $\mathbf{Q}$  costanti. A questo punto conosciamo i valori costanti dei nuovi momenti  $\mathbf{P}$  e delle nuove coordinate  $\mathbf{Q}$ . In tal modo

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \alpha}(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t),$$

che possiamo dunque invertire rispetto a  $\mathbf{q}$  sempre grazie all'ipotesi di non degenerazione di  $S$ . Così abbiamo  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t)$  e

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, t), \mathbf{P}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0), t),$$

e abbiamo concluso. □

Mettiamoci nell'ipotesi in cui  $H$  sia indipendente dal tempo: in tal caso sappiamo che  $H$  è un integrale primo del sistema hamiltoniano associato ad  $H$  stessa. In questo caso possiamo cercare

$$S(\mathbf{q}, \alpha, t) = W(\mathbf{q}, \alpha) - e(\alpha)t,$$

dove  $e(\alpha)$  è un'opportuna funzione di  $\alpha$ . Tale funzione rappresenta il valore dell'hamiltoniana, che in questo caso è un integrale primo del sistema hamiltoniano da lei stessa definito.



**Definizione 1.24.** La funzione  $W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha})$  si dice *funzione caratteristica di Hamilton*.

Con tale scelta l'equazione di Hamilton-Jacobi diventa

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = e(\boldsymbol{\alpha}). \quad (1.6)$$

**Proposizione 1.25.** *Abbiamo che  $S$  è un integrale completo dell'equazione (1.5) se e solo se  $W$  è un integrale completo dell'equazione (1.6).*

*Dimostrazione.* Ovviamente  $S$  soddisfa l'equazione (1.5) se e solo se  $W$  soddisfa (1.6). L'unica cosa da verificare è che le condizioni di non degenerazione per  $S$  e per  $W$  sono equivalenti. Per costruzione vale

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q} \partial \boldsymbol{\alpha}},$$

da cui la tesi. □

La funzione caratteristica  $W$  genera però una trasformazione canonica diversa da quella generata da  $S$ . Le relazioni che definiscono questa nuova trasformazione sono

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \\ \mathbf{Q} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}, t) \end{cases}.$$

Se come prima scegliamo come nuovi momenti le costanti di integrazione, ossia se scegliamo  $\mathbf{P} = \boldsymbol{\alpha}$ , l'equazione caratteristica ci dice che la nuova hamiltoniana dipenderà soltanto dai nuovi momenti, essendo proprio  $e(\boldsymbol{\alpha})$ . Così

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{Q}} = \frac{\partial e(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}},$$

ossia

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 + \frac{\partial e(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{P}_0)t,$$

dove  $\mathbf{P}_0$  e  $\mathbf{Q}_0$  sono le condizioni iniziali.

## 1.5 Separazione delle variabili e applicazioni

Sia  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  un'hamiltoniana indipendente dal tempo e consideriamo l'equazione per la funzione caratteristica

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{q}\right) = e(\boldsymbol{\alpha}).$$

**Definizione 1.26.** Diciamo che le variabili  $\mathbf{q}$  sono *separabili* per l'equazione caratteristica se, posto

$$W(\mathbf{q}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^n W_j(q_j, \boldsymbol{\alpha}),$$

allora l'equazione per la funzione caratteristica è equivalente al sistema di equazioni ordinarie

$$H_j \left( \frac{\partial W_j}{\partial q_j}, q_j, \boldsymbol{\alpha} \right) = e_j(\boldsymbol{\alpha}), \quad j = 1, \dots, n,$$

per certe funzioni  $H_j$  e  $e_j(\boldsymbol{\alpha})$ .

Nei prossimi due paragrafi vedremo due problemi tratti dalla meccanica celeste in cui le usuali coordinate non separano l'equazione di Hamilton-Jacobi e in cui applicando un'opportuna trasformazione canonica riusciremo invece a separare le variabili e a integrare il problema.

### 1.5.1 Problema di Keplero accelerato

Un punto materiale  $P$  di massa unitaria si muove nello spazio euclideo bidimensionale  $\mathbb{E}^2$  soggetto ad una forza con energia potenziale

$$V(\mathbf{u}) = -\frac{1}{|\mathbf{u}|} - Fx,$$

dove  $\mathbf{u} = (x, y)^\top$ . Introduciamo adesso le *coordinate paraboliche*  $u$  e  $v$  definite da

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \end{cases}.$$

Dobbiamo calcolare l'hamiltoniana della particella. Si ha  $\dot{x} = u\dot{u} - v\dot{v}$  e  $\dot{y} = v\dot{u} + u\dot{v}$ , così per l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}[(u\dot{u} - v\dot{v})^2 + (v\dot{u} + u\dot{v})^2] = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2).$$

Adesso dobbiamo scrivere l'energia potenziale nelle nuove coordinate. Intanto banalmente si ha

$$|\mathbf{u}|^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(u^2 + v^2)^2,$$

così

$$V(u, v) = -\frac{2}{u^2 + v^2} - \frac{F}{2}(u^2 - v^2).$$

Per determinare l'espressione dell'hamiltoniana dobbiamo calcolare i momenti coniugati alle coordinate. Si ha

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \dot{u}(u^2 v^2) \quad \text{e} \quad p_v = \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} = \dot{v}(u^2 + v^2),$$

da cui

$$H = T + V = \frac{1}{2} \frac{p_u^2 + p_v^2}{u^2 + v^2} - \frac{2}{u^2 + v^2} - \frac{F}{2}(u^2 - v^2).$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica  $W(u, v, \boldsymbol{\alpha})$  è

$$\frac{1}{2(u^2 + v^2)} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \right] - \frac{2}{2(u^2 + v^2)} - \frac{F}{2}(u^2 - v^2) = e(\boldsymbol{\alpha}).$$

Se cerchiamo una soluzione della forma  $W(u, v, \boldsymbol{\alpha}) = W_1(u, \boldsymbol{\alpha}) + W_2(v, \boldsymbol{\alpha})$  si ottiene

$$\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial W_1}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial W_2}{\partial v} \right)^2 \right] - 2 - \frac{F}{2}(u^4 - v^4) = e(\boldsymbol{\alpha})(u^2 + v^2),$$

che si può facilmente separare. Infatti si ha

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial u} \right)^2 - 1 - \frac{F}{2}u^4 - e(\boldsymbol{\alpha})u^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_2}{\partial v} \right)^2 - 1 + \frac{F}{2}v^4 - e(\boldsymbol{\alpha})v^2 = 0,$$

da cui

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_1}{\partial u} \right)^2 - 1 - \frac{F}{2}u^4 - e(\boldsymbol{\alpha})u^2 = c(\boldsymbol{\alpha}) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W_2}{\partial v} \right)^2 - 1 + \frac{F}{2}v^4 - e(\boldsymbol{\alpha})v^2 = -c(\boldsymbol{\alpha}). \end{cases}$$

Introduciamo il tempo fittizio  $\tau$  tale che

$$\frac{d}{d\tau} = (u^2 + v^2) \frac{d}{dt}.$$

Indicando con l'apice la derivazione rispetto al nuovo tempo  $\tau$  si ha  $p_u = \dot{u}(u^2 + v^2) = u'$  e  $p_v = v'$ . Così le equazioni separate diventano

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(u')^2 - 1 - \frac{F}{2}u^4 - e(\boldsymbol{\alpha})u^2 = c(\boldsymbol{\alpha}) \\ \frac{1}{2}(v')^2 - 1 + \frac{F}{2}v^4 - e(\boldsymbol{\alpha})v^2 = -c(\boldsymbol{\alpha}) \end{cases}.$$

Osserviamo che  $c(\boldsymbol{\alpha})$ , essendo funzione di integrali primi, è esso stesso un integrale primo. Come nel problema di Keplero classico c'è il vettore di Lenz, anche qui abbiamo un integrale primo in più: effettivamente questo è la componente nella direzione della forza del vettore generalizzato di Lenz (che viene detto vettore eccentricità osculante).

Il problema può essere anche formulato con maggiore generalità. Consideriamo un punto materiale di massa  $m$  libero di muoversi nello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{E}^3$  e introduciamo le coordinate paraboliche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \cos \varphi \\ z = uv \sin \varphi \end{cases}.$$

Supponendo che il punto sia soggetto a un'energia potenziale

$$V(u, v, \varphi) = \frac{a(u) + b(v)}{u^2 + v^2} + \frac{c(\varphi)}{u^2 v^2}$$

si può dimostrare come fatto prima che le coordinate paraboliche sono separabili per l'equazione di Hamilton-Jacobi dell'hamiltoniana del punto materiale.

## 1.5.2 Problema dei due centri

Consideriamo un punto materiale di massa unitaria libero di muoversi nello spazio euclideo bidimensionale e soggetto ad una forza con un'energia potenziale

$$V(\mathbf{u}) = -\frac{1}{|\mathbf{u} + \mathbf{a}|} - \frac{1}{|\mathbf{u} - \mathbf{a}|},$$

dove abbiamo posto come prima  $\mathbf{u} = (x, y)^\top$  e  $\mathbf{a} = (1, 0)^\top$ . Tale potenziale è un potenziale di attrazione da parte dei due centri fissi  $\mathbf{a}$  e  $-\mathbf{a}$ . Introduciamo adesso le coordinate  $u$  e  $v$  definite da

$$\begin{cases} x = \cosh u \cos v \\ y = \sinh u \sin v \end{cases}.$$

Con calcoli analoghi al precedente problema, e utilizzando la relazione fondamentale tra le funzioni trigonometriche iperboliche, si ottiene che l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)(\cosh^2 u - \cos^2 v).$$

Adesso dobbiamo esprimere l'energia potenziale in funzione delle nuove variabili. Ci è utile osservare che  $|\mathbf{u} \pm \mathbf{a}|^2 = (\cosh u \pm \cos v)^2$ , da cui

$$V = -\frac{2 \cosh u}{\cosh^2 u - \cos^2 v}.$$

Calcolando i momenti coniugati alle variabili si ottiene infine l'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \frac{p_u^2 + p_v^2}{\cosh^2 u - \cos^2 v} - \frac{2 \cosh u}{\cosh^2 u - \cos^2 v}.$$

Procedendo esattamente come nel precedente esempio otteniamo la separabilità delle variabili  $u$  e  $v$ .

# Capitolo 2

## Singularità del problema degli $N$ corpi

### 2.1 Il teorema di esistenza di Cauchy

In questo paragrafo daremo alcuni richiami sulle equazioni differenziali, ed in particolare sul teorema di esistenza e unicità. Quella che vedremo, però, non è la formulazione classica ma è un risultato che, grazie ad alcune ipotesi più forti, ci dà una stima sull'intervallo temporale nel quale la soluzione esiste ed è unica.

**Teorema 2.1** (Cauchy). *Consideriamo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\dot{x}_k = f_k(\mathbf{x}), \quad k = 1, \dots, m.$$

*Supponiamo che le funzioni  $f_k$  siano analitiche in un intorno complesso di  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$  e tali che  $|f_k(\mathbf{x})| \leq M$  per ogni  $x \in D = \{\mathbf{x} : |x_k - \xi_k| < r \ \forall k\}$ . Allora, date le condizioni iniziali  $\mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}$ , esiste un'unica soluzione analitica  $\mathbf{x}(t)$  in*

$$\left\{ t : |t - \tau| < \frac{r}{(m+1)M} \right\},$$

*e in tale insieme si ha  $|x_k(t) - \xi_k| < r$  per ogni  $k$ .*

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione che può essere trovata in [1], pagg. 16-18.  $\square$

Vediamo adesso come si può usare il precedente risultato per prolungare le soluzioni. Assumiamo nel seguito che per tempi reali la soluzione sia reale: effettivamente ciò si ottiene quando  $\xi_k \in \mathbb{R}$  e quando i coefficienti degli sviluppi delle  $f_k$  sono reali.

**Proposizione 2.2.** *Supponiamo che  $\mathbf{x}(t)$  sia analitica su  $[\tau, t_1)$  e sia  $P$  un compatto che contiene  $\mathbf{x}([\tau, t_1))$  e tale che le  $f_k$  siano analitiche su  $P$ . Allora  $\mathbf{x}(t)$  è analitica anche in  $t = t_1$ .*

*Dimostrazione.* Dato che  $P$  è compatto, esiste una costante  $\rho > 0$  tale che per ogni  $\boldsymbol{\xi} \in P$  le funzioni  $f_k$  rimangono analitiche nel dominio  $D_{\boldsymbol{\xi}} = \{\mathbf{x} : |x_l - \xi_l| < \rho \ \forall l\}$ . Inoltre esiste una

costante  $M > 0$  tale che le funzioni  $f_k$  sono uniformemente limitate da  $M$  in  $D_\xi$ . Scegliamo nell'intervallo  $[\tau, t_1)$  un numero  $t_2$  che soddisfa

$$t_1 - t_2 < \frac{\rho}{(m+1)M}$$

e applichiamo il teorema di Cauchy con le condizioni  $\xi_k = x_k(t_2)$  per ogni  $k$ . Allora il teorema ci dice che la soluzione esiste ed è analitica per

$$|t - t_2| < \frac{\rho}{(m+1)M},$$

e dunque in particolare per  $t = t_1$ . □

Nel caso hamiltoniano abbiamo equazioni

$$\begin{cases} \dot{p}_k = -H_{q_k} \\ \dot{q}_k = H_{p_k} \end{cases} \text{ per } k = 1, \dots, n,$$

e si ha  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ . Ricordiamo prima un lemma classico nella teoria di una variabile complessa per poi trarre le conclusioni nel caso hamiltoniano.

**Lemma 2.3.** *Sia  $g(z)$  analitica in  $D_{2\rho} = \{z \in \mathbb{C} : |z - \zeta| < 2\rho\}$  e  $|g(z)| \leq M$  in  $D_{2\rho}$ . Allora per ogni  $z \in D_\rho$  si ha*

$$|g'(z)| \leq \frac{M}{\rho}.$$

*Dimostrazione.* Dalla formula integrale di Cauchy abbiamo

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(u)}{u - z} du,$$

dove  $C$  è il bordo di  $D_\rho$ . Allora

$$|g'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(u)}{(u - z)^2} du \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^2} \cdot 2\pi\rho = \frac{M}{\rho},$$

valida su  $D_\rho$ . □

**Corollario 2.4.** *Sia  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  una hamiltoniana analitica sul dominio complesso  $D_{2\rho} = \{(\mathbf{p}, \mathbf{q}) : |p_k - \eta_k| < 2\rho, |q_k - \xi_k| < 2\rho \forall k\}$  e tale che  $|H(\mathbf{p}, \mathbf{q})| \leq M$  su  $D_{2\rho}$ . Allora su  $D_\rho$  si ha*

$$|H_{p_k}| \leq \frac{M}{\rho} \quad e \quad |H_{q_k}| \leq \frac{M}{\rho}.$$

*Dimostrazione.* Segue banalmente dal lemma precedente. □

## 2.2 Il problema degli $N$ corpi e le singolarità

Il problema degli  $N$  corpi consiste nello studio del sistema formato da  $N$  punti materiali di masse  $m_1, \dots, m_N$  liberi di muoversi nello spazio euclideo a tre dimensioni e soggetti soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale. Le equazioni di moto per questo sistema si possono scrivere facilmente, e sono le equazioni

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \nabla_{\mathbf{x}_i} U(\mathbf{x}),$$

dove

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

avendo indicato con

$$r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$$

la *distanza mutua* tra la  $i$ -esima e la  $j$ -esima particella. Al solito, la quantità  $V = -U$  è l'energia potenziale e si ha che

$$E = T - U = T + V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

è un integrale primo del moto.

Introduciamo immediatamente la notazione utilizzata in [1]. Indicheremo con  $q_k$  una generica componente di  $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)$ , e invece useremo soltanto  $q$  qualora non specificheremo la particella a cui ci riferiamo, cioè con  $q$  indichiamo una delle  $3N$  coordinate  $q_k$  al variare di  $k$ . In modo analogo useremo le notazioni  $v$  e  $v_k$ ; infine con  $m$  indicheremo la massa della particella associata a  $q$ , ossia una generica massa. Con queste convenzioni il problema degli  $N$  corpi si scrive quindi in modo compatto come

$$m \ddot{q} = U_q,$$

oppure come

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = m^{-1} U_q.$$

Ora applicheremo il teorema di Cauchy per ottenere una proprietà di prolungamento di soluzioni del problema degli  $N$  corpi.

**Teorema 2.5.** *Sia  $\mathbf{x}(t)$  una soluzione del problema degli  $N$ -corpi con dati iniziali al tempo  $\tau$ . Esiste una costante  $\delta > 0$  tale che la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  è definita nell'intervallo  $[\tau, \tau + \delta)$ .*

*Dimostrazione.* Data una grandezza  $x$  dipendente dal tempo, indichiamo con  $x_\tau$  il suo valore all'istante iniziale  $\tau$ . Per  $k \neq l$  sia  $\rho_{kl} = r_{kl\tau} > 0$  la distanza tra la massa  $k$  e la massa  $l$  al tempo iniziale  $\tau$ . Inoltre introduciamo

$$\rho = \min_{k \neq l} \rho_{kl} \quad \text{e} \quad \mu = \min_k m_k.$$

Dobbiamo applicare il teorema di Cauchy al sistema di equazioni differenziali

$$\dot{v}_k = m_k^{-1} U_{q_k} \quad \text{e} \quad \dot{q}_k = v_k,$$

e per far ciò dobbiamo vedere che in un intorno dei dati iniziali le funzioni a secondo membro hanno modulo limitato. Iniziamo dalla prima equazione e cerchiamo delle stime per  $m_k^{-1} U_{q_k}$ . Sia  $A > 0$  tale che  $U_\tau \leq A$ , allora

$$A \geq U_\tau = \sum_{1 \leq k < l \leq N} \frac{m_k m_l}{\rho_{kl}} \geq \frac{\mu^2}{\rho},$$

così al tempo  $t = \tau$  si ha  $\rho \geq \mu^2 A^{-1}$ . Introduciamo adesso un'altra notazione: indicheremo l'espressione  $(q_k - q_{k\tau}) - (q_l - q_{l\tau})$  con  $\varphi, \psi$  o  $\chi$  a seconda che  $q$  sia  $x, y$  o  $z$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} |r_{kl}|^2 &= |r_{kl}^2| = |(\varphi + (x_{k\tau} - x_{l\tau}))^2 + (\psi + (y_{k\tau} - y_{l\tau}))^2 + (\chi + (z_{k\tau} - z_{l\tau}))^2| \geq \\ &\geq \rho_{kl}^2 - 2 \left| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{k\tau} - x_{l\tau} \\ y_{k\tau} - y_{l\tau} \\ z_{k\tau} - z_{l\tau} \end{pmatrix} \right| - (|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2) \stackrel{(*)}{\geq} \\ &\geq \rho_{kl}^2 - 2\rho_{kl}(|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2)^{1/2} - (|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2), \end{aligned}$$

dove nel passaggio con  $(*)$  abbiamo utilizzato la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Assumiamo adesso che ogni  $q$  sia vicino al dato iniziale  $q_\tau$ : in particolare assumiamo la condizione

$$|q - q_\tau| < \frac{\mu^2}{14A} < \frac{\rho}{14}.$$

Si ha

$$|\varphi|^2 + |\psi|^2 + |\chi|^2 < 3 \cdot \left(\frac{\rho}{7}\right)^2 < \frac{\rho^2}{16},$$

quindi

$$|r_{kl}|^2 \geq \rho_{kl}^2 - 2\rho_{kl} \cdot \frac{\rho}{4} - \frac{\rho^2}{16} > \frac{1}{4}\rho_{kl}^2,$$

da cui  $|r_{kl}| > \frac{\rho_{kl}}{2}$ . Per stimare dall'alto  $U_{q_k}$  dobbiamo stimare dal basso  $r_{kl}$ , e lo abbiamo appena fatto, e dobbiamo poi stimare dall'alto le quantità  $|q_l - q_k|$  per  $k \neq l$ . Per far ciò basta osservare che

$$|q_l - q_k| \leq |q_l + q_{l\tau}| + |q_k - q_{k\tau}| + |q_{l\tau} - q_{k\tau}| < \frac{\rho}{7} + \rho_{kl} \leq \frac{8}{7}\rho_{kl}.$$

Così

$$\left| \frac{q_k - q_l}{r_{kl}} \right| \leq \frac{8}{7}\rho_{kl} \left( \frac{2}{\rho_{kl}} \right)^3 \leq \frac{64}{7}\rho^{-2} \leq \frac{64}{7} \frac{A^2}{\mu^4},$$

e dunque infine

$$|m_k^{-1} U_{q_k}| = \left| \sum_{k \neq l} m_l \frac{q_k - q_l}{r_{kl}^3} \right| \leq c_1 A^2,$$



con la costante  $c_1$  che dipende soltanto dalle masse. Occupiamoci adesso delle equazioni  $\dot{q}_k = v_k$  e stimiamo le velocità. Per fare questo utilizzeremo l'integrale primo dell'energia, che assumiamo avere il valore  $h = E$  lungo la soluzione. Intanto

$$\frac{1}{2}mv_\tau^2 \leq T_\tau = U_\tau + h \leq A + h,$$

da cui  $|v_\tau| \leq c_2\sqrt{A+h}$ , con la costante  $c_2$  che anche stavolta dipende soltanto dalle masse. Scelto  $r = \frac{\mu^2}{14A}$  e scelto come dominio l'insieme

$$|q - q_\tau| < r \quad \text{e} \quad |v - v_\tau| < r,$$

si ha

$$|v| \leq |v - v_\tau| + |v_\tau| < r + c_2\sqrt{A+h}.$$

Scelto infine  $M = r + c_2\sqrt{A+h} + c_1A^2$ , dal teorema di Cauchy abbiamo che le soluzioni sono analitiche in nel cerchio

$$|t - \tau| < \frac{r}{(6N+1)M} = \delta.$$

Per  $t$  reale abbiamo che la soluzione è definita nell'intervallo  $[\tau, \tau + \delta)$ , dove  $\delta$  dipende solo dalle masse, dall'energia  $h$  e dalla costante  $A$ .  $\square$

Veniamo adesso alla definizione chiave di questa parte, la definizione di singolarità.

**Definizione 2.6.** Se  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$  è una soluzione del problema degli  $N$  corpi definita su un intervallo massimale destro  $[0, t_*)$ , allora il tempo  $t_*$  è detto *singolarità* di  $\mathbf{x}(t)$ .

Associati a questa definizione introduciamo gli insiemi

$$\Delta_{ij} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j\} \quad \text{e} \quad \Delta = \bigcup_{i < j} \Delta_{ij},$$

dei quali il secondo è detto *insieme singolare*. Vediamo adesso alcuni teoremi che riguardano le singolarità, il primo dei quali ci dice come si comporta il potenziale lungo una soluzione singolare quando ci avviciniamo alla singolarità.

**Teorema 2.7.** Se  $t_*$  è una singolarità di  $\mathbf{x}(t)$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow t_*} U(\mathbf{x}(t)) = +\infty.$$

*Dimostrazione.* Se la tesi non fosse vera, allora esisterebbe una successione  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $\tau \leq t_n < t_*$  e  $t_n \rightarrow t_*$  ed esiste una costante  $A$  tale che  $U(\mathbf{x}(t_n)) < A$ . Sia  $\delta$  dal precedente teorema e scegliamo  $\bar{n}$  in modo che  $t_* - t_{\bar{n}} < \delta$ . Applicando il teorema precedente con  $\tau = t_{\bar{n}}$  otteniamo che la soluzione  $\mathbf{x}(t)$  è ancora analitica in  $t_*$ , contraddicendo il fatto che  $t_*$  è una singolarità.  $\square$

**Teorema 2.8** (Painlevé). *Se  $t_*$  è una singolarità di  $\mathbf{x}(t)$  si ha*

$$\lim_{t \rightarrow t_*} \min_{i \neq j} r_{ij}(t) = 0.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $\rho = \min_{i \neq j} r_{ij}$ . Banalmente si ha  $U(\mathbf{x}) \leq \frac{M^2}{\rho(\mathbf{x}(t))}$ , dove abbiamo posto  $M^2 = \sum_{i < j} m_i m_j$ . Ma allora grazie al teorema precedente si ha

$$0 \leq \limsup_{t \rightarrow t_*} \rho(\mathbf{x}(t)) \leq \limsup_{t \rightarrow t_*} \frac{M^2}{U(\mathbf{x}(t))} = 0.$$

□

Infine introduciamo una grandezza molto importante per lo studio delle singolarità, il momento di inerzia.

**Definizione 2.9.** La quantità

$$I = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_j$$

è detta *momento di inerzia* del sistema rispetto all'origine.

Vediamo adesso due proprietà importanti del momento di inerzia. La prima indica che il momento di inerzia può essere anche espresso in funzione delle distanze mutue tra i corpi: si può infatti dimostrare (esercizio) che vale

$$I = \frac{1}{\sum_{i=1}^N m_i} \sum_{i < j} m_i m_j |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2. \quad (2.1)$$

**Lemma 2.10** (identità di Lagrange). *Vale la relazione*

$$\frac{1}{2} \ddot{I} = 2T - U.$$

*Dimostrazione.* Derivando una volta la relazione che definisce il momento di inerzia  $I$  si ottiene  $\dot{I} = 2 \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j \cdot \mathbf{x}_j$ . Derivando una seconda volta e applicando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee si ottiene

$$\ddot{I} = 2 \sum_{j=1}^N m_j (\ddot{\mathbf{x}}_j + |\dot{\mathbf{x}}_j|^2) = 2(\nabla U \cdot \mathbf{x} + 2T) = 2(2T - U),$$

da cui la tesi. □

Vediamo come si comporta il momento di inerzia rispetto all'origine lungo una soluzione che ha una singolarità.

**Proposizione 2.11.** *Se  $t_*$  è una singolarità di  $\mathbf{x}(t)$  allora esiste  $I_* \in [0, +\infty]$  tale che*

$$\lim_{t \rightarrow t_*} I(\mathbf{x}(t)) = I_*.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $h = T - U$  e scriviamo l'identità di Lagrange come

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T - U = 2h + U.$$

Per il teorema precedente  $U(\mathbf{x}(t))$  tende a  $+\infty$  avvicinandoci alla singolarità, per cui abbiamo l'esistenza di un intervallo  $[t_2, t_*)$  su cui  $\ddot{I} > 0$ . Su questo intervallo  $\dot{I}$  è monotona crescente. A meno di restringersi a  $[t_3, t_*)$  con  $t_3 \geq t_2$  possiamo anche supporre che  $\dot{I} > 0$  o  $\dot{I} < 0$ : ovvero nell'intervallo  $[t_3, t_*)$  abbiamo che  $I$  è monotona, e dunque ammette limite (finito o infinito).  $\square$

**Definizione 2.12.** Se esiste il limite  $\lim_{t \rightarrow t_*} \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$  diremo che  $t_*$  è una *singolarità di collisione*. Se invece il limite non esiste allora  $t_*$  si dice *pseudocollisione*.

**Osservazione 2.13.** La definizione di collisione appena data non è immediatamente collegata all'idea intuitiva di collisione che abbiamo, ossia di un istante in cui almeno due delle  $N$  particelle occupano la stessa posizione. Per effettuare questo collegamento effettivamente serve il risultato di Painlevé: dato che, nel caso di collisione, il limite della soluzione esiste avremo che ciascuna particella tende ad una posizione limite ben precisa; ma dato che la minima distanza mutua deve tendere a zero, almeno due di queste devono occupare, al limite, la stessa posizione.

Le pseudocollisioni, invece, non hanno una “visualizzazione intuitiva” come le collisioni e viene anche da chiedersi se esistano, per quali  $N$  esistano eccetera. Nel 1895 Painlevé venne invitato a Stoccolma per tenere un ciclo di lezioni riguardo alla risoluzione di equazioni differenziali, con particolare riferimento al problema degli  $N$  corpi: egli dimostrò che per  $N = 3$  non esistono pseudocollisioni e congetturò che per  $N \geq 4$  ci possono invece essere. Nel 1988 il matematico J. Xia esibì un esempio di pseudocollisione nel caso  $N = 5$ .

## 2.3 Collisioni

Tra gli integrali primi del problema degli  $N$  corpi abbiamo anche la quantità di moto totale del sistema: la prima equazione cardinale ci dice dunque che il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme. Se scegliamo un sistema di riferimento centrato nel baricentro dei corpi, grazie al principio di relatività galileiano, le equazioni di moto  $m\ddot{\mathbf{q}} = U_q$  rimangono invariate.

Il teorema che esaminiamo in questo paragrafo dà una condizione necessaria affinché si abbia una collisione: tale condizione dice che le tre componenti del momento angolare (che è costante) devono necessariamente essere tutte nulle. Il fatto importante è che questa condizione può essere verificata dai dati iniziali, e se non dovesse essere soddisfatta possiamo già escludere collisioni. Nel corso della dimostrazione del teorema ci servirà un lemma di carattere puramente algebrico, che isoliamo per comodità.

**Lemma 2.14.** *Vale l'identità*

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \sum_{k=1}^n \eta_k^2 = \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right)^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2.$$

*Dimostrazione.* Si procede per induzione su  $n \geq 2$ . Se  $n = 2$  si verifica facilmente l'identità scritta svolgendo i calcoli ai due membri. Supponiamo che l'identità valga per un certo intero  $n$  e verifichiamo che vale per  $n + 1$ . Sviluppriamo i due termini del secondo membro: il primo è

$$\left( \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k \eta_k \right)^2 = \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right)^2 + 2\xi_{n+1} \eta_{n+1} \sum_{k=1}^n \eta_k \xi_k + \xi_{n+1}^2 \eta_{n+1}^2,$$

mentre il secondo è

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k < l \leq n+1} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2 &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2 + \sum_{k=1}^n (\xi_k \eta_{n+1} - \xi_{n+1} \eta_k)^2 = \\ &= \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2 + \eta_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \xi_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \eta_k^2 - 2\xi_{n+1} \eta_{n+1} \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k. \end{aligned}$$

Adesso occupiamoci del primo membro:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \xi_k^2 \sum_{k=1}^{n+1} \eta_k^2 &= \sum_{k=1}^n \xi_k^2 \sum_{k=1}^n \eta_k^2 + \xi_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \eta_k^2 + \eta_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \xi_{n+1}^2 \eta_{n+1}^2 = \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right)^2 + \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2 + \xi_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \eta_k^2 + \eta_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \xi_{n+1}^2 \eta_{n+1}^2, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo utilizzato l'ipotesi induttiva. Sommando i due addendi del secondo membro otteniamo proprio quello del primo.  $\square$

Nel seguito indicheremo con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  le tre componenti del momento angolare del sistema. Le loro espressioni sono

$$\alpha = \sum_{k=1}^N m_k (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k), \quad \beta = \sum_{k=1}^N m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \quad \gamma = \sum_{k=1}^N m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

**Teorema 2.15** (Sundman). *Condizione necessaria per avere una collisione totale è che il momento angolare totale sia nullo.*

*Dimostrazione.* Mostriamo la contronominale, ossia mostriamo che se il momento angolare non è nullo allora non si può avere una collisione totale. Il momento di inerzia rispetto

all'origine è dato da  $\frac{1}{2}\dot{I} = \sum_q mq\dot{q}$ . Applicando il lemma con  $n = 3N$ ,  $\xi_k = q\sqrt{m}$  e  $\eta_k = \dot{q}\sqrt{m}$  si ottiene

$$\frac{1}{4}\dot{I}^2 = \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k \right)^2 = 2TI - \sum_{1 \leq k < l \leq n} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2.$$

Così si deduce che

$$2IT \geq \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \sum_{k=1}^N m_k^2 \{ (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k)^2 + (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k)^2 + (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k)^2 \}.$$

Dalla disuguaglianza  $\left( \sum_{k=1}^N a_k \right)^2 \leq N \sum_{k=1}^N a_k^2$  (che si può dimostrare per induzione) si ottiene

$$\alpha^2 = \left( \sum_{k=1}^N m_k (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k) \right)^2 \leq N \sum_{k=1}^N m_k^2 (y_k \dot{x}_k - x_k \dot{y}_k)^2,$$

e analoghe disuguaglianze per  $\beta$  e  $\gamma$ . Allora

$$2IT \geq \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \eta,$$

dove abbiamo posto  $\eta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{N}$ . Utilizzando la disuguaglianza più debole  $2TI \geq \eta$ , dall'identità di Lagrange si ottiene

$$\ddot{I} = 2(T + h) = \frac{2TI}{I} + 2h \geq \frac{\eta}{I} + 2h.$$

Dalla Proposizione 2.11 abbiamo fatto vedere che  $I$  è strettamente monotona su un intervallo  $[t_3, t_*)$ , e adesso mostriamo che nei due casi di monotonia arriviamo sempre alla conclusione che  $I$  ha una limitazione inferiore positiva su  $[t_3, t_*)$ , il che implica che non ci sia collisione totale. Sia  $I_3 = I(\mathbf{x}(t_3))$ . Se  $I$  è monotona crescente allora concludiamo banalmente osservando che  $I \geq I_3 > 0$ , dunque occupiamoci del caso in cui  $I$  è monotona decrescente. Si ha

$$-2I\ddot{I} \geq -2\eta I^{-1}\dot{I} - 4H\dot{I}.$$

Se integriamo tra  $t_3$  e  $t$  si ottiene

$$\dot{I}_3^2 - \dot{I}^2 \geq 2\eta \log \frac{I_3}{I} + 4h(I_3 - I),$$

e così

$$2\eta \log \frac{I_3}{I} \leq \dot{I}_3^2 - \dot{I}^2 - 4h(I_3 - I) < I_3^2 + 4|h|I_3.$$

Se il momento angolare è non nullo allora  $\eta > 0$ , e dunque  $I \geq \varepsilon > 0$ .  $\square$

Adesso vediamo cosa accade se il momento angolare totale è nullo nel caso del problema dei tre corpi.

**Teorema 2.16.** *Nel caso  $N = 3$ , se il momento angolare totale è nullo allora il moto si svolge in un piano fissato.*

*Dimostrazione.* Sia  $\tau$  un certo istante di tempo per il quale la configurazione dei tre corpi non sia singolare (ossia in modo che non ci sia una collisione). Possiamo scegliere un riferimento in cui  $z_i(\tau) = 0$  per ogni  $i$ , ossia tutte le particelle giacciono sul piano  $z = 0$  al tempo  $\tau$ . Per non appesantire la notazione, nel seguito non specificheremo più il fatto che ciò che stiamo scrivendo vale all'istante  $t = \tau$ . Abbiamo così le tre equazioni seguenti:

$$\sum_{i=1}^3 m_i x_i \dot{z}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 m_i y_i \dot{z}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 m_i \dot{z}_i = 0,$$

dove le prime due equazioni dicono che le prime due componenti del momento angolare sono nulle, mentre la terza ci dice che la componente lungo  $\hat{\mathbf{e}}_3$  della velocità del baricentro è nulla (e questo vale perché il baricentro è fermo nell'origine del sistema di riferimento). Quello scritto, nelle incognite  $m_i \dot{z}_i$ , è un sistema lineare omogeneo con matrice

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se  $\det A \neq 0$  allora  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = 0$  all'istante iniziale in quanto il sistema ha come unica soluzione la soluzione nulla. In questo caso le direzioni iniziali di moto per i tre corpi giacciono sul piano  $z = 0$ , e per l'unicità della soluzione dell'equazione di moto abbiamo che i tre corpi devono rimanere in questo piano. Se invece  $\det A = 0$  allora i tre punti  $(x_j, y_j, 1)$  sono coplanari e allineati, e in particolare stanno sul piano  $z = 1$ . Se proiettiamo sul piano  $z = 0$  otteniamo che, all'istante iniziale, le tre particelle sono allineate lungo una retta per l'origine. Ruotando attorno alla direzione di allineamento dei tre punti possiamo fare in modo che all'istante iniziale  $\dot{z}_3 = 0$ . Con questa assunzione, al tempo iniziale  $m_1 \dot{z}_1 + m_2 \dot{z}_2 = 0$ , e dunque  $\dot{z}_1 = 0$  se e solo se  $\dot{z}_2 = 0$ . Escludiamo il caso in cui  $\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = 0$  perché lo abbiamo già trattato in precedenza e supponiamo che  $\dot{z}_1 \neq 0$ . Si ha

$$0 = m_1 x_1 \dot{z}_1 + m_2 x_2 \dot{z}_2 = m_1 (x_1 - x_2) \dot{z}_1,$$

avendo usato la terza equazione del sistema; da questa si ottiene  $x_1 = x_2$ . Analogamente si può ricavare che  $y_1 = y_2$ , per cui si ottiene che all'istante iniziale c'è una collisione tra  $P_1$  e  $P_2$ , assurdo per la scelta del tempo  $\tau$ .  $\square$

Facciamo adesso vedere che nel caso dei tre corpi non esistono pseudocollisioni, risultato che Painlevé dimostrò nel suo ciclo di lezioni a Stoccolma.

**Teorema 2.17.** *Nel caso  $N = 3$  le uniche singolarità sono collisioni.*

*Dimostrazione.* Come in precedenza, sia  $I_* = \lim_{t \rightarrow t_*} I(\mathbf{x}(t))$ : se  $I_* = 0$  allora c'è una collisione totale tra i corpi. Sia dunque  $I_* > 0$ : questo significa che su un intervallo  $[t_1, t_*)$

il momento di inerzia  $I$  è limitato dal basso da una quantità positiva. Dall'identità (2.1) abbiamo che

$$MI = \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

dove  $M$  è la massa totale dei corpi, così se  $I \geq \varepsilon' > 0$  allora  $\max_{i < j} r_{ij}(t) \geq \varepsilon > 0$  per  $t \in [t_1, t_*)$ . Del resto sappiamo che  $r = \min r_{ij} \rightarrow 0$ , dunque esiste  $t_2 \in [t_1, t_*)$  tale che su questo intervallo  $r < \frac{\varepsilon}{2}$ . Su tale intervallo di tempo un lato fissato del triangolo individuato dalla particelle deve mantenere sempre la minima lunghezza: se così non fosse avremmo un altro lato che, da un certo istante in poi, ha lunghezza minima e dunque  $< \frac{\varepsilon}{2}$ ; in questo modo abbiamo due lati di lunghezza  $< \frac{\varepsilon}{2}$ , e così il lato rimanente verrebbe ad avere lunghezza  $< \varepsilon$ , contro la scelta di  $\varepsilon$ .

Supponiamo senza perdere di generalità che  $r_{13} < \frac{\varepsilon}{2}$  e che invece  $r_{12}, r_{23} > \frac{\varepsilon}{2}$  su  $[t_2, t_*)$ . Dato che  $r = r_{13}$  tende a zero quando  $t \rightarrow t_*$ , abbiamo che  $P_1$  e  $P_3$  collidono. Mostriamo adesso che la collisione avviene in un punto ben definito nello spazio. L'equazione di moto per la seconda particella è

$$\ddot{\mathbf{q}}_2 = \frac{m_1}{r_{12}^3}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{m_3}{r_{23}^3}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2),$$

da cui

$$|\ddot{\mathbf{q}}_2| \leq \frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2} \leq \frac{4}{\varepsilon^2}(m_1 + m_2) < \infty,$$

da cui esistono i limiti di  $\mathbf{q}_2$  e  $\dot{\mathbf{q}}_2$  (basta integrare due volte la relazione). Dalla condizione che il centro di massa è fisso nell'origine del riferimento si ha

$$m_1(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3) + (m_1 + m_3)\mathbf{q}_3 = -m_2\mathbf{q}_2;$$

ora,  $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_3 \rightarrow \mathbf{0}$ , e dunque anche  $\mathbf{q}_3$  ha un limite in un determinato punto dello spazio; stesso argomento per  $\mathbf{q}_1$ .  $\square$

**Osservazione 2.18.** Notiamo che dal precedente ragionamento segue anche che la funzione  $I$  è limitata nell'intervallo  $[t_2, t_*)$ . Essendo monotona segue che  $I$  deve avere un limite finito per  $t \rightarrow t_*$ .

Rimaniamo nel contesto del precedente teorema, ossia nel caso  $N = 3$  in cui collidono le due particelle  $P_1$  e  $P_3$ . Vediamo che, come uno si immagina, le velocità delle due particelle devono tendere all'infinito quando  $t \rightarrow t_*$ . Indichiamo con

$$v_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2}$$

la velocità della particella  $P_k$ . Inoltre abbiamo la relazione

$$T = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^3 m_K v_K^2 = U + h,$$

con

$$U = \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}.$$

Le particelle  $P_1$  e  $P_3$  collidono, così che  $r = r_{13} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow t_*$ . Allora per  $t \rightarrow t_*$  abbiamo  $rU = m_1 m_3 + o(1)$  e dunque

$$2rT = 2rU + 2rh \rightarrow 2m_1 m_3.$$

In particolare le quantità  $rv_k^2$ ,  $r\dot{q}_k^2$  e  $r^{1/2}\dot{q}_k$  restano limitate alla collisione. Inoltre, il fatto che il centro di massa è fermo nell'origine ci dà

$$\begin{aligned} r(m_1\dot{q}_1)^2 - r(m_3\dot{q}_3)^2 &= r \{ (m_2\dot{q}_2)^2 + (m_3\dot{q}_3)^2 + 2m_2 m_3 \dot{q}_2 \dot{q}_3 - (m_3\dot{q}_3)^2 \} = \\ &= m_2 r^{1/2} \{ m_2 r^{1/2} (\dot{q}_2)^2 + 2m_3 \dot{q}_2 (r^{1/2} \dot{q}_3) \} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

per  $t \rightarrow t_*$ , in quanto il termine entro parentesi è limitato. Sommando sulle tre coordinate  $q$  otteniamo la relazione

$$r(m_1 v_1)^2 - r(m_3 v_3)^2 \rightarrow 0.$$

Siamo pronti adesso per dimostrare il risultato che ci dà il comportamento asintotico per le velocità delle due particelle.

**Proposizione 2.19.** *Valgono*

$$rv_1^2 \rightarrow \frac{2m_3^2}{m_1 + m_3} \quad e \quad rv_3^2 \rightarrow \frac{2m_1^2}{m_1 + m_3}.$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$2rT = r \sum_{k=1}^3 m_k v_k^2 = r \frac{m_1^2 v_1^2}{m_1} - r \frac{m_3^2 v_3^2}{m_1} + r \frac{m_3^2 v_3^2}{m_1} + r m_2 v_2^2 + r m_3 v_3^2,$$

da cui

$$rv_3^2 = \left( 2rT - r \frac{m_1^2 v_1^2}{m_1} - r \frac{m_3^2 v_3^2}{m_1} - r m_2 v_2^2 \right) \frac{m_1}{m_3(m_1 + m_3)}.$$

Ora  $2rT \rightarrow 2m_1 m_3$ , i seguenti due termini entro parentesi tendono a 0 grazie alla relazione scritta prima dell'enunciato, e infine  $r m_2 v_2^2 \rightarrow 0$  in quanto  $v_2$  è limitato (come sappiamo dal precedente teorema). Così

$$rv_3^2 \rightarrow \frac{2m_1^2}{m_1 + m_3},$$

e in modo analogo si può mostrare anche l'altra proprietà. □

La funzione  $r = \min_{i < j} r_{ij}$  tende a zero quando  $t \rightarrow t_*$ , ma nonostante questo abbiamo una proprietà di convergenza di un integrale.

**Proposizione 2.20.** *Converge l'integrale*

$$\int_{\tau}^{t_*} \frac{dt}{r(t)}.$$



*Dimostrazione.* Ricordiamo l'identità di Lagrange  $\frac{1}{2}\ddot{I} = U + 2h$ . Osserviamo che  $U - \frac{m_1 m_3}{r_{13}}$  è limitato, dato che  $r_{23}$  e  $r_{12}$  non tendono a zero per  $t \rightarrow t_*$ ; così possiamo manipolare la precedente identità per scrivere

$$\frac{1}{2m_1 m_3} \ddot{I} = \frac{1}{m_1 m_3} \left( U - \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + 2h \right) + \frac{1}{r_{13}}.$$

Dato che il termine entro parentesi tonda è limitato, basta dimostrare che  $\dot{I}$  (primitiva di  $\ddot{I}$ ) ha limite finito per  $t \rightarrow t_*$ . Dato che  $\dot{I}$  è monotona basterà dunque provare che  $\dot{I}$  è limitata. Si ha

$$\frac{1}{2} \dot{I} = \sum_{k=1}^3 m_k (x_k \dot{x}_k + y_k \dot{y}_k + z_k \dot{z}_k) = \sum_{k=1}^2 m_k \{ (x_k - x_3) \dot{x}_k + (y_k - y_3) \dot{y}_k + (z_k - z_3) \dot{z}_k \},$$

avendo sottratto  $x_3 \sum_{k=1}^3 m_k \dot{x}_k + y_3 \sum_{k=1}^3 m_k \dot{y}_k + z_3 \sum_{k=1}^3 m_k \dot{z}_k = 0$ . Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz abbiamo

$$\frac{1}{2} |\dot{I}| \leq \sum_{k=1}^2 m_k r_{k3} v_k,$$

che è una somma con limite finito perché  $r_{13} v_1 \rightarrow 0$  mentre  $r_{23}$  e  $v_2$  rimangono limitate.  $\square$

## 2.4 Il teorema di von Zeipel

Il risultato di von Zeipel dice che cosa accade al moto delle particelle nel caso di pseudo-collisioni. In questa sezione seguiremo la presentazione moderna dell'articolo di von Zeipel dovuta a McGehee e contenuta in [2].

L'idea base di von Zeipel è quella di introdurre una scomposizione del sistema degli  $N$  corpi in *clusters*, ossia in raggruppamenti, vediamo come. Sia  $\underline{N} = \{1, \dots, N\}$  e sia  $\mu \subseteq \underline{N}$ : un tale  $\mu$  è un cluster, e rappresenta l'insieme delle particelle  $\{P_i\}_{i \in \mu}$ . Il *centro di massa del cluster*  $\mu$  è

$$\mathbf{c}_\mu \mathbf{q} = \frac{\sum_{i \in \mu} m_i \mathbf{q}_i}{\sum_{i \in \mu} m_i}.$$

Definiamo adesso  $\Delta_\mu = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N} : \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_j \ \forall i, j \in \mu\}$ , che rappresenta le configurazioni di collisione del cluster  $\mu$ <sup>1</sup>. Sia inoltre  $\omega$  una partizione di  $\underline{N}$  e introduciamo

$$\Delta_\omega = \bigcap_{\mu \in \omega} \Delta_\mu,$$

ossia gli elementi di  $\Delta_\omega$  sono le configurazioni che danno collisioni simultanee di tutti i clusters. Si verifica che  $\Delta_\omega$  è un sottospazio lineare di  $\mathbb{R}^{3N}$ .

Definiamo adesso su  $\mathbb{R}^{3N}$  un'operazione di prodotto scalare diverso da quello standard, in quanto è pesato con le masse delle particelle.

<sup>1</sup>Ovviamente se  $\mu = \emptyset$  allora l'insieme  $\Delta_\mu$  non è definito, mentre se  $\mu$  è un singoletto allora  $\Delta_\mu = \mathbb{R}^{3N}$ .

**Definizione 2.21.** Dati due elementi  $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3N}$  introduciamo il loro *prodotto scalare pesato* con le masse

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{p}_i.$$

Con questa notazione, il momento di inerzia rispetto all'origine si scrive semplicemente come  $I(\mathbf{q}) = \|\mathbf{q}\|^2$ . Ricordiamo la forma del potenziale:

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}.$$

Il differenziale  $dU(\mathbf{q})$  è un funzionale lineare e continuo sullo spazio di Hilbert  $\mathbb{R}^{3N}$  con il prodotto scalare appena introdotto: allora per il teorema di Riesz esso è rappresentato da un vettore  $\nabla U(\mathbf{q})$ , ovvero  $dU(\mathbf{q})\mathbf{p} = \langle \nabla U(\mathbf{q}), \mathbf{p} \rangle$  per ogni  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3N}$ . Con tale vettore l'equazione di moto diventa

$$\nabla U(\mathbf{q}) = \ddot{\mathbf{q}}.$$

Infine, data una partizione  $\omega$  di  $N$  definiamo  $\pi_\omega : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}^{3N}$  come l'applicazione lineare tale che

$$(\pi_\omega \mathbf{q})_i = \mathbf{c}_\mu \mathbf{q} \quad \text{se } i \in \mu \in \omega.$$

**Lemma 2.22.** La mappa  $\pi_\omega$  è una proiezione ortogonale rispetto al prodotto scalare delle masse, con immagine  $\Delta_\omega$  e nucleo

$$X_\omega = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{3N} : \sum_{i \in \mu} m_i \mathbf{q}_i = 0 \quad \forall \mu \in \omega \right\}.$$

*Dimostrazione.* Che l'immagine sia  $\Delta_\omega$  e che il nucleo sia  $X_\omega$  sono due fatti ovvi. Per dimostrare che la mappa è una proiezione ortogonale basta far vedere che per ogni  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{3N}$  si ha  $\langle \pi_\omega \mathbf{q}, \mathbf{q}' - \pi_\omega \mathbf{q}' \rangle = 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} \langle \pi_\omega \mathbf{q}, \mathbf{q}' - \pi_\omega \mathbf{q}' \rangle &= \sum_{\mu \in \omega} \sum_{h \in \mu} m_h (\pi_\omega \mathbf{q})_h \cdot \mathbf{q}'_h - \sum_{\mu \in \omega} \sum_{h \in \mu} m_h (\pi_\omega \mathbf{q})_h \cdot (\pi_\omega \mathbf{q}')_h = \\ &= \sum_{\mu \in \omega} \left( \mathbf{c}_\mu \mathbf{q} \cdot \sum_{h \in \mu} m_h \mathbf{q}'_h - \mathbf{c}_\mu \mathbf{q} \cdot \mathbf{c}_\mu \mathbf{q}' \sum_{h \in \mu} m_h \right) = 0, \end{aligned}$$

e questo prova la tesi. □

Grazie al lemma precedente, per ogni partizione  $\omega$  possiamo decomporre  $\mathbb{R}^{3N} = \Delta_\omega \oplus X_\omega$ . Se poniamo anche  $\Pi_\omega = id - \pi_\omega$  abbiamo che  $\Pi_\omega$  è la proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^{3N}$  su  $X_\omega$ . Così abbiamo

$$I = \|\mathbf{q}\|^2 = \|\pi_\omega \mathbf{q}\|^2 + \|\Pi_\omega \mathbf{q}\|^2 = I_\omega + J_\omega,$$

con ovvie definizioni di  $I_\omega$  e  $J_\omega$ . Diamo adesso un'interpretazione fisica della precedente equazione. Si ha

$$I_\omega = \|\pi_\omega \mathbf{q}\|^2 = \sum_{\mu \in \omega} \sum_{i \in \mu} m_i |\mathbf{c}_\mu \mathbf{q}|^2 = \sum_{\mu \in \omega} \left( \sum_{i \in \mu} m_i \right) |\mathbf{c}_\mu \mathbf{q}|^2,$$

e dunque  $I_\omega$  è il momento di inerzia di un sistema fittizio in cui ogni cluster è rimpiazzato da una particella di massa pari alla massa del cluster e posto nel centro di massa del cluster. Invece

$$J_\omega = \|\Pi_\omega \mathbf{q}\|^2 = \sum_{\mu \in \omega} J_\mu(\mathbf{q}) = \sum_{\mu \in \omega} \sum_{i \in \mu} m_i |\mathbf{q}_i - \mathbf{c}_\mu \mathbf{q}|^2,$$

ossia è la somma dei momenti di inerzia dei cluster, ognuno rispetto al proprio centro di massa. Dunque il momento di inerzia  $I$  è decomposto nella somma tra il momento di inerzia di un sistema composto da particelle fittizie poste nei centri di massa dei cluster e il momento di inerzia di ognuno dei clusters.

Un'analogia decomposizione può essere effettuata per l'energia potenziale. Introduciamo la notazione

$$U_{ij}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Dato un cluster  $\mu$  introduciamo l'energia potenziale

$$V_\mu(\mathbf{q}) = \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \mu} U_{ij}(\mathbf{q}),$$

che tiene di conto soltanto delle interazioni tra le particelle del cluster. Possiamo poi definire

$$V_\omega(\mathbf{q}) = \sum_{\mu \in \omega} V_\mu,$$

che è l'energia potenziale di tutti i clusters considerati come isolati, ossia non tiene conto delle interazioni tra particelle appartenenti a clusters diversi. Per tenere conto di questo introduciamo il *potenziale residuo*, dato da

$$U_\omega(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) - V_\omega(\mathbf{q}).$$

Per essere più precisi poniamo

$$U_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \sum_{i \in \mu} \sum_{j \in \nu} U_{ij}(\mathbf{q}) & \text{se } \mu \cap \nu = \emptyset \\ 0 & \text{se } \mu = \nu \end{cases}.$$

Con questa nuova notazione possiamo scrivere il potenziale residuo come

$$U_\omega(\mathbf{q}) = \sum_{\mu \in \omega} \sum_{\nu \in \omega} U_{\mu\nu}(\mathbf{q}).$$

**Lemma 2.23.** Per ogni  $\mathbf{z} \in \Delta_\omega$  si ha  $V_\omega(\mathbf{q} + \mathbf{z}) = V_\omega(\mathbf{q})$ .

*Dimostrazione.* Basta esplicitare le quantità presenti:

$$V_\omega(\mathbf{q} + \mathbf{z}) = \sum_{\mu \in \omega} \sum_{\substack{i, j \in \mu \\ i \neq j}} \frac{1}{2} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i + \mathbf{z}_i - \mathbf{q}_j - \mathbf{z}_j|}.$$

Dal fatto che  $\mathbf{z} \in \Delta_\omega$  abbiamo che  $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_j$  per ogni  $i, j \in \mu$  e dunque otteniamo la tesi.  $\square$

Dato che  $\pi_\omega$  ha immagine in  $\Delta_\omega$  abbiamo che per ogni  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{3N}$  si ha  $V_\omega(\mathbf{q} + \pi_\omega \mathbf{p}) = V_\omega(\mathbf{q})$ . Allora da ciò segue l'identità tra operatori

$$dV_\omega(\mathbf{q})\pi_\omega = 0.$$

Il fatto che  $\pi_\omega$  sia una proiezione ortogonale ci dice che  $\pi_\omega$  è autoaggiunto, come mostra l'osservazione seguente.

**Osservazione 2.24.** Il fatto che una proiezione ortogonale  $T$  sia un operatore autoaggiunto è un fatto generale. Dall'ipotesi si ha che per ogni  $\mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{3N}$  vale  $\langle T\mathbf{q}, \mathbf{q}' - T\mathbf{q}' \rangle = 0$ , da cui

$$\langle T\mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle = \langle T\mathbf{q}, T\mathbf{q}' \rangle. \quad (2.2)$$

Così

$$\langle T\mathbf{q}, \mathbf{q}' \rangle = \langle T\mathbf{q}, T\mathbf{q}' \rangle = \langle T\mathbf{q}', \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, T\mathbf{q}' \rangle,$$

dove abbiamo usato (2.2) nella prima uguaglianza e (2.2) con i ruoli di  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  scambiati nella seconda.

**Proposizione 2.25.** Si ha  $\pi_\omega \nabla V_\omega(\mathbf{q}) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $\mathbf{q}'$  si ha

$$0 = dV_\omega(\mathbf{q})\pi_\omega \mathbf{q}' = \langle \nabla V_\omega(\mathbf{q}), \pi_\omega \mathbf{q}' \rangle = \langle \pi_\omega \nabla V_\omega(\mathbf{q}), \mathbf{q}' \rangle,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che  $\pi_\omega$  è autoaggiunto. Valendo la precedente relazione per ogni  $\mathbf{q}'$  abbiamo la tesi.  $\square$

L'equazione differenziale del problema degli  $N$  corpi può essere riscritta come

$$\ddot{\mathbf{q}} = \nabla U(\mathbf{q}) = \nabla V_\omega(\mathbf{q}) + \nabla U_\omega(\mathbf{q}),$$

e se proiettiamo l'equazione con la mappa  $\pi_\omega$  si ottiene

$$\pi_\omega \ddot{\mathbf{q}} = \pi_\omega \nabla U_\omega(\mathbf{q}).$$

Questo ci dice che la proiezione dell'accelerazione sullo spazio  $\Delta_\omega$  dipende soltanto da  $U_\omega$ , ovvero dall'interazione tra i vari clusters. Grazie a questa equazione otteniamo l'identità

$$\frac{d^2}{dt^2} I_\omega(\mathbf{q}(t)) = \frac{d}{dt} 2 \langle \pi_\omega \mathbf{q}, \pi_\omega \dot{\mathbf{q}} \rangle = 2 \|\pi_\omega \dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + 2 \langle \pi_\omega \mathbf{q}, \pi_\omega \nabla U_\omega(\mathbf{q}) \rangle.$$

**Lemma 2.26.** *Sia  $\mathbf{x}(t)$  una soluzione con collisione a  $t = t_*$ . Allora*

$$\rho = \sqrt{2}d(\mathbf{x}, \Delta),$$

dove  $\Delta$  è l'insieme singolare. In particolare l' $\omega$ -limite della soluzione per  $t \rightarrow t_*$  è contenuto nell'insieme singolare  $\Delta$ .

*Dimostrazione.* Per definizione

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^N |\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j|^2.$$

Se  $\mathbf{y} \in \Delta$  allora esistono  $h$  e  $k$  tali che  $\mathbf{y}_h = \mathbf{y}_k = \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ . Vogliamo minimizzare  $d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  su  $\Delta_{hk}$ : si ha

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}_h - \boldsymbol{\xi}|^2 + |\mathbf{x}_k - \boldsymbol{\xi}|^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq h, k}}^N |\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j|^2.$$

Affinché il gradiente  $\nabla d^2 = 0$  deve sicuramente essere che  $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} d^2 = 0$ , che ci dà la condizione necessaria  $\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_k}{2}$ . Così

$$d^2(\mathbf{x}, \Delta_{hk}) = \min_{\mathbf{y} \in \Delta_{hk}} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} |\mathbf{x}_h - \mathbf{x}_k|^2 = \frac{1}{2} r_{hk}^2,$$

e allora

$$d^2(x, \Delta) = \min_{h < k} d^2(x, \Delta_{hk}) = \frac{1}{2} \rho^2,$$

che è la tesi. □

Siamo pronti per enunciare il teorema di von Zeipel, per la cui dimostrazione rimandiamo all'articolo di McGehee [2].

**Teorema 2.27** (von Zeipel). *Sia  $\mathbf{x}(t)$  una soluzione con una singolarità in  $t = t_*$ . Se  $\mathbf{x}(t)$  ha una pseudocollisione in  $t = t_*$  allora il moto diventa illimitato in tempo finito, ossia  $I(\mathbf{x}(t)) \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow t_*$ .*



# Capitolo 3

## Regolarizzazione delle collisioni

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto le soluzioni singolari, ed in particolare quelle che chiamiamo collisioni. Nel problema dei tre corpi possono esistere due tipi di collisioni: le collisioni doppie, ossia quelle che avvengono tra due sole delle particelle, e le collisioni triple. In questo capitolo esamineremo varie tecniche che ci permetteranno di regolarizzare le collisioni doppie (come la teoria di Sundman, di Levi-Civita e di Easton), e tratteremo solo alla fine le collisioni triple mostrando, seppur non nei dettagli, che esse non sono regolarizzabili.

### 3.1 La trasformazione regolarizzante

Esprimeremo adesso le equazioni di moto per il problema dei tre corpi in forma hamiltoniana, senza assumere (almeno per ora) che il centro di massa sia fermo nell'origine del sistema di riferimento.

Siano  $q_1, \dots, q_9$  le coordinate delle tre particelle  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , così la terna  $(x_k, y_k, z_k)$  diventa  $(q_{3k-2}, q_{3k-1}, q_{3k})$ , mentre la terna dei momenti angolari  $(m_k \dot{x}_k, m_k \dot{y}_k, m_k \dot{z}_k)$  sarà denotata con  $(p_{3k-2}, p_{3k-1}, p_{3k})$ . In tal modo

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \frac{p_k^2}{m_1} + \frac{p_{k+3}^2}{m_2} + \frac{p_{k+6}^2}{m_3} \right),$$

e al solito poniamo  $E = T - U$ . Così le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{p}_k = -E_{q_k} \quad \text{e} \quad \dot{q}_k = E_{p_k},$$

con  $k = 1, \dots, 9$ . Queste pertanto sono 18 equazioni differenziali con altrettante variabili indipendenti  $p_k$  e  $q_k$ . Consideriamo la seguente trasformazione puntuale:

$$\begin{cases} x_k = q_k - q_{k+6} \\ x_{k+3} = q_{k+3} - q_{k+6} \\ x_{k+6} = q_{k+6} \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Abbiamo fatto in modo che  $x_1, \dots, x_6$  siano le coordinate di  $P_1$  e  $P_2$  relative a  $P_3$ , mentre  $x_7, x_8, x_9$  sono le coordinate di  $P_3$ . Estendiamo questa trasformazione a una trasformazione

canonica  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  attraverso una funzione generatrice  $w(\mathbf{q}, \mathbf{y})$ . La trasformazione è definita implicitamente dalle relazioni

$$p_k = w_{q_k} \quad \text{e} \quad x_k = w_{y_k},$$

da cui integrando si ottiene

$$w(\mathbf{q}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^3 \{(q_k - q_{k+6})y_k + (q_{k+3} - q_{k+6})y_{k+3} + q_{k+6}y_{k+6}\}.$$

La condizione di regolarità  $\det \frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{y}} \neq 0$  è soddisfatta: infatti

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} I_3 & 0_3 & -I_3 \\ 0_3 & I_3 & -I_3 \\ -I_3 & -I_3 & I_3 \end{pmatrix},$$

che ha determinante 1. Dalle relazioni che definiscono la trasformazione canonica si ottiene

$$\begin{cases} p_k = y_k \\ p_{k+3} = y_{k+3} \\ p_{k+6} = y_{k+6} - y_{k+3} - y_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_k = p_k \\ y_{k+3} = p_{k+3} \\ y_{k+6} = p_{k+6} + p_{k+3} + p_k \end{cases} \quad k = 1, \dots, 9. \quad (3.2)$$

Le equazioni (3.1) e (3.2) definiscono la trasformazione canonica  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  che estende la trasformazione puntuale introdotta in precedenza. Le nuove equazioni di Hamilton sono equazioni con hamiltoniana la vecchia hamiltoniana  $E$  riletta però nelle nuove variabili. Ossia per  $k = 1, \dots, 9$  abbiamo

$$\dot{y}_k = -E_{x_k} \quad \text{e} \quad \dot{x}_k = E_{y_k},$$

dove  $E = T - U$  con energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_k^2}{m_1} + \frac{y_{k+3}^2}{m_2} + \frac{(y_{k+6} - y_k - y_{k+3})^2}{m_3} \right)$$

e potenziale

$$U = \frac{m_1 m_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} + \frac{m_2 m_3}{(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2)^{1/2}} + \frac{m_1 m_2}{[(x_1 - x_4)^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_3 - x_6)^2]^{1/2}}. \quad (3.3)$$

Osserviamo che le variabili  $x_7, x_8, x_9$  sono cicliche, e ciò implica che i momenti coniugati  $y_7, y_8, y_9$  sono costanti, e dunque note le condizioni iniziali sono noti anche tali momenti. Se adesso consideriamo le equazioni del sistema hamiltoniano per  $k = 1, \dots, 6$  otteniamo ancora un sistema hamiltoniano solo per le prime sei coppie di variabili  $x_k$  e  $y_k$ , tanto i momenti  $y_7, y_8, y_9$  sono costanti e invece le corrispondenti coordinate possono essere ricavate da  $\dot{x}_k = E_{y_k}$  per quadratura. Assumiamo da ora in poi che il centro di massa sia fermo nell'origine: quindi  $y_7 = y_8 = y_9 = 0$  e

$$0 = m_1 q_k + m_2 q_{k+3} + m_3 q_{k+6} = m_1(x_k + x_{k+6}) + m_2(x_{k+3} + x_{k+6}) + m_3 x_{k+6},$$



da cui

$$x_{k+6} = -\frac{m_1 x_k + m_2 x_{k+3}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \text{per } k = 1, 2, 3.$$

Riassumendo, fin qui abbiamo ridotto il sistema iniziale al sistema  $\dot{y}_k = -E_{x_k}$ ,  $\dot{x}_k = E_{y_k}$  per  $k = 1, \dots, 6$ , dove l'energia cinetica è data da

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left( \frac{y_k^2}{m_1} + \frac{y_{k+3}^2}{m_2} + \frac{(y_k + y_{k+3})^2}{m_3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \left\{ (m_1^{-1} + m_2^{-1}) y_k^2 + (m_2^{-1} + m_3^{-1}) y_{k+3}^2 \right\} + \sum_{k=1}^3 \frac{y_k y_{k+3}}{m_3}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Usando i risultati precedenti vediamo adesso più nel dettaglio cosa accade alle soluzioni  $x_k$  e  $y_k$  quando  $P_1$  e  $P_3$  collidono al tempo  $t_*$ . Usiamo le abbreviazioni

$$x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad \text{e} \quad y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

ovvero  $x$  è la distanza tra  $P_1$  e  $P_3$ , mentre  $y$  è il modulo del momento angolare di  $P_1$ . Così sappiamo che

$$\lim_{t \rightarrow t_*} x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow t_*} xy^2 = \frac{2(m_1 m_3)^2}{m_1 + m_3},$$

dove il secondo limite segue dalla Proposizione 2.19. Inoltre sappiamo che  $x_k$  e  $y_k$  hanno limite finito per  $k = 4, 5, 6$ : infatti  $(x_4, x_5, x_6) \rightarrow \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_3$ , mentre  $(y_4, y_5, y_6) \rightarrow m_2 \mathbf{q}_2$ . E infine ricordiamo che  $xU \rightarrow m_1 m_3$ . Di qui in avanti, inoltre, i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono i vettori  $(x_1, x_2, x_3)$  e  $(y_1, y_2, y_3)$ . Introduciamo adesso una nuova variabile temporale, che si ispira al contenuto della Proposizione 2.20:

$$s(t) = \int_{\tau}^t \frac{dt}{x(t)}.$$

La funzione  $s(t)$  ha la proprietà che  $\dot{s}(t) = \frac{1}{x(t)} > 0$ , ovvero  $s(t)$  è monotona crescente e dunque può essere presa come nuovo tempo, che chiamiamo *tempo fittizio*. Indicando con un apice la derivazione rispetto a  $s$ , le equazioni di Hamilton diventano

$$x'_k = x E_{y_k} \quad \text{e} \quad y'_k = -x E_{x_k}, \quad (3.5)$$

per  $k = 1, \dots, 6$ . Notiamo che il sistema ottenuto non è hamiltoniano: l'idea per ricondurlo in forma hamiltoniana e risolverlo è dovuta a Poincaré ed è nota come *trucco di Poincaré*. Se decidiamo di studiare il sistema su una superficie di energia fissata  $h$ , si riesce a trovare un sistema hamiltoniano che, sulla superficie in questione, ha le stesse soluzioni del sistema scritto. Consideriamo allora

$$F = x(E - h) = x(T - U - h).$$

Sulla superficie  $E = h$  abbiamo

$$F_{x_k} = x E_{x_k} \quad \text{e} \quad F_{y_k} = x E_{y_k}$$

in quanto i termini contenenti  $E - h$  si cancellano. Così il sistema (3.5) diventa

$$y'_k = -F_{x_k} \quad \text{e} \quad x'_k = F_{y_k},$$

ed è in forma hamiltoniana con hamiltoniana  $F$ . Il problema di questo sistema è che  $F_{x_k}$  non restano tutte limitate in quanto  $y$  tende a infinito. Dunque il sistema scritto non è ancora adatto ad uno studio approfondito della singolarità  $t_*$ , e quindi adesso cercheremo una trasformazione canonica dove  $y_1, y_2$  e  $y_3$  sono trasformati per inversione radiale.

Per trovare un'espressione della trasformazione iniziamo con un'approssimazione a due corpi, tanto quando  $t \rightarrow t_*$  accade che  $P_2$  è lontano rispetto a  $P_1$  e  $P_3$  e dunque il suo contributo è trascurabile. Pertanto lavoriamo con

$$T = \frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_3^{-1}) (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \quad \text{e} \quad U = \frac{m_1 m_3}{x},$$

così

$$F = \frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_3^{-1}) xy^2 - m_1 m_3 - hx.$$

In  $F$  trascuriamo il termine costante  $m_1 m_3$  che tanto è ininfluenza, poniamo per comodità  $h = 0$  e scegliamo infine delle unità di misura in cui  $\frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_3^{-1}) = 1$ . A questo punto

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = xy^2.$$

Cerchiamo adesso una trasformazione canonica  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mapsto (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  utilizzando l'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica  $v(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , ossia l'equazione

$$F(v_{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \lambda(\boldsymbol{\xi}).$$

Una volta risolta, l'equazione di Hamilton-Jacobi ci fornirà  $v$  e quindi potremo effettuare la trasformazione canonica definita implicitamente dalle relazioni

$$y_k = v_{x_k} \quad \text{e} \quad \eta_k = -v_{\xi_k} \tag{3.6}$$

per  $k = 1, 2, 3$ . Iniziamo considerando il caso piano, ossia il caso in cui operiamo solo con i vettori  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$ , per poi estendere in modo naturale la conclusione al caso generale. Sia  $z = x_1 + ix_2$  e cerchiamo  $v$  come parte immaginaria di una funzione olomorfa  $\varphi(z) = u + iv$ . Le condizioni di Cauchy-Riemann i dicono che

$$u_{x_1} = v_{x_2} \quad \text{e} \quad u_{x_2} = -v_{x_1}.$$

Dato che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = u_{x_1} + iv_{x_1}$$

si ha dunque

$$v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 = u_{x_1}^2 + v_{x_1}^2 = |\varphi_z|^2.$$

L'equazione di Hamilton-Jacobi diventa pertanto  $|z\varphi_z^2| = \lambda(\boldsymbol{\xi})$ , il che ci dice che  $|z\varphi_z^2|$  è una quantità che non dipende da  $z$ . Dato che  $z\varphi_z^2$  è analitica avremo che anch'essa è costante in  $z$ , e dunque

$$z\varphi_z^2 = \bar{\zeta} = \xi_1 - i\xi_2.$$

Da ciò si ricava  $\varphi_z = \left(\frac{\bar{\zeta}}{z}\right)^{1/2}$ , e infine

$$\varphi(z) = 2(\bar{\zeta}z)^{1/2}.$$

Dalla relazione  $iv = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2}$  si ottiene così

$$v^2 = 2 \left[ (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2} (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \right].$$

Un rapido calcolo mostra che se  $\zeta z \neq 0$  allora  $\det \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4|\zeta z|} \neq 0$ , e dunque  $v$  ha le proprietà di una funzione generatrice. La naturale generalizzazione fornisce

$$v^2 = 2 \left( \xi x - \sum_{k=1}^3 \xi_k x_k \right).$$

Assicuriamoci adesso che l'equazione di Hamilton-Jacobi con tale scelta di  $v$  abbia soluzione per qualche  $\lambda(\boldsymbol{\xi})$ . Derivando l'equazione che definisce  $v$  si ottiene

$$vv_{x_k} = \frac{x_k}{x} \xi - \xi_k \quad (x \neq 0) \quad \text{e} \quad vv_{\xi_k} = \frac{\xi_k}{\xi} x - x_k \quad (\xi \neq 0). \quad (3.7)$$

Usando la prima di queste equazioni si ha

$$\begin{aligned} x^2 v^2 \sum_{k=1}^3 v_{x_k}^2 &= \sum_{k=1}^3 x^2 v^2 v_{x_k}^2 = \sum_{k=1}^3 x_k^2 \xi^2 + x^2 \xi_k^2 - 2x\xi x_k \xi_k = \\ &= 2x\xi \left( \xi x - \sum_{k=1}^3 \xi_k x_k \right) = x\xi v^2, \end{aligned}$$

da cui se  $xv^2 \neq 0$  si ottiene

$$x \sum_{k=1}^3 v_{x_k}^2 = \xi. \quad (3.8)$$

Questo mostra che l'equazione di Hamilton-Jacobi è soddisfatta con la funzione  $v$  definita prima scegliendo  $\lambda(\boldsymbol{\xi}) = \xi$ . Inoltre si verifica che

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{x} \partial \boldsymbol{\xi}} = -\frac{1}{4\xi xv},$$

e dunque richiediamo  $\xi xv \neq 0$ . Affinché ciò sia soddisfatto dobbiamo richiedere che  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\mathbf{x}$  siano linearmente indipendenti: infatti

$$\xi^2 x^2 v^2 = 2\xi^2 x^2 (|\boldsymbol{\xi}||\mathbf{x}| - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})$$

e il termine entro parentesi tonda è non nullo se  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  sono indipendenti. Adesso vogliamo ricavare esplicitamente la trasformazione. Dall'equazione di Hamilton-Jacobi (3.8) e dalla relazione  $y_k = v_{x_k}$  si ottiene

$$xy^2 = \xi.$$

Per ricavare l'Equazione (3.8) abbiamo utilizzato la prima delle equazioni (3.7). Utilizzando la seconda e procedendo in modo analogo si ottiene

$$\xi\eta^2 = x,$$

dove ovviamente abbiamo abbreviato  $\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$ . Inoltre osserviamo che

$$xv_{x_k} = \frac{1}{v}(x_k\xi - x\xi_k) = -\frac{1}{v}(x\xi_k - x_k\xi) = -\xi v_{\xi_k},$$

che grazie alle (3.6) si scrive come

$$xy_k = \xi\eta_k.$$

Utilizzando queste ultime tre relazioni si possono scrivere le equazioni di trasformazione dei momenti (e della sua inversa), che sono dunque

$$\eta_k = \frac{xy_k}{\xi} = \frac{y_k}{y^2} \quad \text{e} \quad y_k = \frac{\xi\eta_k}{x} = \frac{\eta_k}{\eta^2},$$

per  $k = 1, 2, 3$ . Da  $x\xi \neq 0$  abbiamo che anche  $y \neq 0$  e  $\eta \neq 0$ . Così dalle precedenti equazioni vediamo che le due triple  $y_1, y_2, y_3$  e  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  si trasformano una nell'altra per inversione radiale.

Infine dobbiamo determinare la trasformazione (e la sua inversa) per le coordinate. Introduciamo le due abbreviazioni  $g = \sum_{k=1}^3 x_k y_k$  e  $\gamma = \sum_{k=1}^3 \xi_k \eta_k$ . Dalla prima equazione delle (3.7) si ha

$$x_k v y_k = \frac{x_k^2}{x} \xi - \xi_k x_k,$$

da cui sommando su  $k$  si ottiene  $vg = x\xi - \sum_{k=1}^3 x_k \xi_k = \frac{v^2}{2}$ , ossia  $g = \frac{v}{2}$ . Dalla seconda delle (3.7) si ottiene in modo analogo la relazione  $\gamma = -\frac{v}{2}$ . Così

$$x_k = \frac{\xi_k}{\xi} x - v v_{\xi_k} = \frac{\xi_k}{\xi} x + v \eta_k = \frac{\xi_k}{\xi} x - 2\gamma \eta_k = \xi_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l$$

per  $k = 1, 2, 3$ . Usando la prima delle (3.7) si ottiene in modo analogo la relazione

$$\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{l=1}^3 x_l y_l$$

per  $k = 1, 2, 3$ . Riassumendo, la trasformazione canonica è definita dalle relazioni

$$\xi_k = x_k y^2 - 2y_k \sum_{l=1}^3 x_l y_l \quad \text{e} \quad \eta_k = \frac{y_k}{y^2} \quad (3.9)$$

per  $k = 1, 2, 3$ , e la abbiamo ottenuta sotto l'ipotesi che  $\mathbf{x}$  e  $\boldsymbol{\xi}$  siano linearmente indipendenti. La trasformazione ottenuta è un'involuzione birazionale: birazionale sta ad indicare il fatto che la trasformazione è razionale, così come la sua inversa.

## 3.2 Applicazione al problema dei tre corpi

La trasformazione ricavata nel precedente paragrafo sarà adesso applicata al problema dei tre corpi. Le equazioni di moto sono

$$y'_k = -F_{x_k} \quad \text{e} \quad x'_k = F_{y_k}$$

con  $k = 1, \dots, 6$ , dove l'apice indica la derivazione rispetto al tempo fittizio  $s$  che abbiamo introdotto precedentemente. La trasformazione (3.9) è canonica e possiamo estenderla a tutte le dodici variabili  $x_k, y_k$  con  $k = 1, \dots, 6$  in modo naturale: basta porre

$$\xi_k = x_k \quad \text{e} \quad \eta_k = y_k$$

per  $k = 4, 5, 6$ . La trasformazione estesa  $\Psi$  data da  $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \mapsto (\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  è canonica<sup>1</sup>. Infatti, posto  $\mathbf{X} = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ , si ha che

$$B = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

dove  $A$  è la matrice associata alla trasformazione canonica costruita in precedenza: siccome  $A$  è simplettica anche la matrice  $B$  lo è, e questo mostra che  $\Psi$  è canonica.

Le sei coppie di funzioni  $x_k(s)$  e  $y_k(s)$  per  $k = 1, \dots, 6$  sono regolari per  $0 \leq s < s_*$ , mentre almeno una delle tre funzioni  $y_1(s)$ ,  $y_2(s)$  e  $y_3(s)$  ha una singolarità in  $s = s_*$ . L'idea è di utilizzare il teorema di Cauchy per dimostrare che la trasformazione ottenuta è effettivamente regolarizzante, ossia che possiamo prolungare la soluzione singolare oltre la singolarità. La trasformazione è indipendente da  $s$ , l'hamiltoniana è ancora  $F$  e il sistema hamiltoniano rimane

$$\xi'_k = F_{\eta_k} \quad \text{e} \quad \eta'_k = -F_{\xi_k},$$

per  $k = 1, \dots, 6$ , con  $F$  vista come funzione di  $\xi_k$  e  $\eta_k$ . Ricordiamo che  $F = x(E - h) = x(T - U - h)$ , e dunque ci servono le espressioni (e poi le stime) per i tre addendi che la compongono. Dall'Equazione (3.4) per l'energia cinetica e ricordando le relazioni  $xy^2 = \xi$  e  $\xi\eta^2 = x$  si ottiene

$$xT = \frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_3^{-1}) \xi + \frac{1}{2} (m_2^{-1} + m_3^{-1}) \xi \eta^2 \sum_{k=1}^3 \eta_{k+3}^2 + m_3^{-1} \xi \sum_{k=1}^3 \eta_k \eta_{k+3},$$

mentre dalla (3.3) si ottiene

$$xU = m_1 m_3 + m_2 \xi \eta^2 \left( \frac{m_3}{r_{23}} + \frac{m_1}{r_{13}} \right).$$

Osserviamo che per  $s \rightarrow s_*$  le quantità  $\xi_k$  e  $\eta_k$  per  $k = 4, 5, 6$  hanno limiti finiti, e che  $r_{23}$  e  $r_{12}$  hanno limiti finiti e positivi. Inoltre

$$\xi = xy^2 \rightarrow \frac{2(m_1 m_2)^2}{m_1 + m_3} = c > 0,$$

---

<sup>1</sup>I simboli in grassetto sono qui riferiti ai vettori le cui componenti hanno lo stesso nome del vettore e indici che scorrono da 1 a 6.

ovvero la norma del vettore  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  ha un limite finito e positivo, ma niente garantisce che anche le tre componenti lo abbiano. Quello che faremo ora è proprio mostrare questa proprietà.

**Proposizione 3.1.** *La trasformazione  $\Psi$  è regolarizzante.*

*Dimostrazione.* Consideriamo il guscio sferico  $S = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 : \frac{c}{2} \leq \xi \leq c\}$ , e consideriamo  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  come variabili reali indipendenti nel guscio  $S$ . Le altre nove variabili  $\xi_k$  per  $k = 4, 5, 6$  e  $\eta_k$  per  $k = 1, \dots, 6$  hanno limiti finiti per  $s \rightarrow s_*$ . Infatti ciò è banalmente vero per le variabili indicizzate con  $k = 4, 5, 6$ , mentre per le altre basta osservare che  $\eta_k = \frac{y_k}{y^2} \rightarrow 0$  per  $k = 1, 2, 3$ . I corrispondenti limiti nello spazio a nove dimensioni possono essere tutti contenuti in una sfera  $K$  sufficientemente piccola da fare in modo che in  $P = S \times K$  le funzioni  $\xi, r_{12}^{-1}$  e  $r_{23}^{-1}$  siano analitiche. Dalle equazioni per  $xT$  e  $xU$  e ricordando che  $F = xT - xU - hx$ , abbiamo che in  $P$  anche  $F$  è regolare. Sufficientemente vicino a  $s_*$  le curve soluzione  $\xi_k(s)$  e  $\eta_k(s)$  giacciono interamente in  $P$ , e dunque dalla Proposizione 2.2 esse sono analitiche in  $s = s_*$ .  $\square$

Studiamo adesso in maniera più accurata il comportamento delle soluzioni vicino alla singolarità. Introduciamo le abbreviazioni

$$\xi_{k*} = \xi_k(t_*) \quad \text{e} \quad b = \frac{1}{2} (m_1^{-1} + m_2^{-1}),$$

così  $xT = b\xi + \xi \cdot o(1)$  e allora  $\eta'_k = -F_{\xi_k} = -\frac{b}{c}\xi_{k*} + \dots$ . Integrando la relazione precedente si ottiene

$$\eta_k = -\frac{b}{c}\xi_{k*}(s - s_*) + \dots$$

e dunque sommando su  $k$  e tenendo conto che  $\sum_{k=1}^3 \xi_{k*}^2 = c^2$  si ha

$$\eta^2 = b^2(s - s_*)^2 + \dots$$

Per  $k = 1, 2, 3$  abbiamo allora

$$x_k = \eta_k \eta^2 - 2\eta_k \sum_{l=1}^3 \xi_l \eta_l = \xi_{k*} b^2 (s - s_*)^2 - 2 \frac{b^2 c^2}{c^2} \xi_{k*} (s - s_*)^2 + \dots = -b^2 \xi_{k*} (s - s_*)^2 + \dots$$

e sommando su  $k$  si ottiene  $x = b^2 c (s - s_*)^2 + \dots$ . Adesso ricordiamo che  $x = t'$ , allora

$$t - t_* = \frac{b^2 c}{3} (s - s_*)^3 + \dots,$$

ossia

$$s - s_* = \left\{ \frac{3}{b^2 c} (t - t_*) \right\}^{1/3} + \dots$$

Così infine si possono esprimere le coordinate  $x_k$  in funzione del tempo  $t$  anziché del tempo fittizio  $s$ . Quello che si ottiene è

$$x_k = -b^2 \xi_{k*} \left( \frac{3}{b^2 c} \right)^{2/3} (t - t_*)^{2/3} + \dots$$

Questo mostra che per  $t = t_*$  le due soluzioni  $x_k(t)$  e  $y_k(t)$  hanno un punto di diramazione di ordine 2. Considerando il termine principale (cioè asintoticamente) dell'equazione precedente il comportamento vicino alla collisione è quello di un rimbalzo.

**Osservazione 3.2.** Nel caso dei due corpi il comportamento è un rimbalzo perfetto che avviene su traiettoria rettilinea (proprio perché il momento angolare totale deve essere nullo).

### 3.3 Un teorema di Sundman

In questo paragrafo daremo l'enunciato di un teorema di Sundman riguardo alle collisioni doppie, ma daremo soltanto un'idea della dimostrazione. Assumeremo qui che le tre componenti del momento angolare totale (che sono costanti) siano nulle: in questo modo sappiamo che non possono accadere collisioni triple, ossia totali, del sistema dei tre corpi.

Supponiamo che per un certo istante  $t = t_1$  avvenga una collisione (necessariamente) binaria. Dopo la prima collisione ce ne potrebbero essere altre, e queste altre collisioni potrebbero anche essere infinite. La questione che ci poniamo è la seguente: potrebbe esistere un tempo  $t_\infty$  di accumulazione per i tempi di collisione? La risposta è negativa e infatti vale il seguente risultato.

**Teorema 3.3.** *Non può esistere un tempo  $t_\infty$  di accumulazione per i tempi di collisione (doppia).*

*Dimostrazione.* Sia  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione di tempi di collisione che converge crescendo ad un limite  $t_\infty < \infty$ . Intanto, essendo un limite di singolarità, anche  $t_\infty$  deve essere una singolarità: come sappiamo vale quindi che

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} U(t) = \infty.$$

Inoltre sappiamo anche che  $\min_{i < j} r_{ij} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow t_\infty$ . L'identità di Lagrange  $\frac{1}{2} \ddot{I} = U + 2h$  ci dice che su un intervallo  $[t_0, t_\infty)$  si ha  $\ddot{I} > 0$ , e in particolare  $\ddot{I}$  è infinito su infiniti punti, quelli di singolarità, dove  $U$  è infinito. Sappiamo anche che  $\dot{I}$  è continua a sinistra in ogni punto di collisione e lo stesso argomento mostra che è anche continua a destra. Così  $\dot{I}$  è continuo in  $[t_0, t_\infty)$ , ed è crescente. Come già fatto per il teorema di Sundman nel precedente capitolo si può vedere che  $I$  ha una limitazione positiva inferiore su  $[t_0, t_\infty)$ . Ragionando ancora come in precedenza abbiamo che la lunghezza di un lato ben preciso del triangolo formato dalle particelle ha lunghezza minima, diciamo quello tra  $P_1$  e  $P_3$ : con  $t_0$  sufficientemente ristretto, tutte le collisioni agli infiniti tempi  $t_n$  saranno definitivamente tra  $P_1$  e  $P_3$ .

Ai tempi di singolarità il tempo fittizio assume i valori  $s_n = \int_{t_0}^{t_n} \frac{dt}{x(t)}$ , ma non sappiamo ancora se  $s_\infty < \infty$  o no. Come già fatto nella dimostrazione dell'esistenza dell'integrale che definisce  $s_*$ , si mostra che  $\dot{I}$  è limitato per  $t \rightarrow t_\infty$ , e ciò implica che  $s_\infty$  è finito. Applicando il ragionamento di inizio sezione si conclude dunque che  $x_k(s)$  è analitica in  $s_\infty$ . Ma dato che  $x_k(s)$  è analitica e nulla su tutti gli infiniti  $s_n$ , dovremmo avere che  $x_k(s)$  è identicamente nulla, e questo è assurdo.  $\square$

Il prolungamento analitico visto ci dà una soluzione valida per tutti i tempi  $t \geq \tau$ , e può anche essere effettuato per  $t \leq \tau$ . Infatti le equazioni di moto  $\dot{p}_k = -E_{q_k}$  e  $\dot{q}_k = E_{p_k}$  sono invarianti per la trasformazione  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \mapsto (\mathbf{q}, -\mathbf{p}, -t)$ . In questo modo abbiamo una soluzione per ogni tempo reale  $t$ . Del resto vorremmo però un tempo fittizio  $s$  che non dipende da quelli due particelle collidano in ogni singolarità: per effettuare questo rimpiazeremo la variabile  $s$  con una variabile complessa  $\omega$  in modo che le coordinate  $q_k$  ( $k = 1, \dots, 9$ ) delle tre particelle diventano funzioni regolari di  $\omega$  nel disco  $|\omega| < 1$ , dove l'asse reale del tempo  $t$  corrisponde all'intervallo reale  $-1 < \omega < 1$ .

**Teorema 3.4** (Sundman). *Se le tre costanti del momento angolare totale non sono tutte nulle, allora le coordinate cartesiane, le distanze tra i corpi e il tempo  $t$  hanno tutti espansioni in serie di potenze di una variabile  $\omega$  convergenti in  $|\omega| < 1$  e descrivono il moto per tutti i tempi reali.*

Diamo un cenno di dimostrazione. Introduciamo il parametro

$$s = \int_{\tau}^t (U + 1) dt,$$

che riesce a regolarizzare tutte le collisioni. Vogliamo mostrare che nel dominio di analiticità delle variabili  $q_k$  c'è una striscia complessa attorno all'asse reale e ampia  $2\delta$  con  $\delta > 0$ . Il teorema della mappa di Riemann ci dice che esiste un'applicazione conforme che manda la striscia nella palla unitaria, e in modo che l'asse reale venga mandato nel diametro della palla. Tale mappa definisce il parametro  $\omega$ :

$$\omega = \frac{e^{\frac{\pi s}{2\delta}} - 1}{e^{\frac{\pi s}{2\delta}} + 1}.$$

Come procede la dimostrazione per determinare la striscia del piano complesso? Ci sono due lemmi che Sundman utilizza e che portano alla conclusione:

- (i) si può dimostrare che il perimetro del triangolo formato con i tre corpi si mantiene sempre sopra un valore  $\rho > 0$  (ciò è ovvio nel caso in cui le collisioni siano in numero finito, ma non è banale nel caso di infinite collisioni);
- (ii) la velocità del terzo corpo è limitata dall'alto da un certo  $\nu$  per ogni  $t$ .

Questi due lemmi sono molto tecnici e richiedono stime molto accurate, e la loro trattazione estesa può essere trovata in [1, pag. 47-68].



### 3.4 Il teorema di Levi-Civita

Presentiamo adesso un'altra tecnica di regolarizzazione, dovuta a Levi-Civita. Questo risultato, rispetto a quello di Sundman, ha più interesse per le applicazioni perché invece di regolarizzare la singola soluzione singolare, si preoccupa di regolarizzare le equazioni del moto.

Supponiamo di lavorare su un piano (il caso generale in tre dimensioni sarà diverso): utilizziamo quindi i numeri complessi e poniamo  $z = x + iy$  e  $r = |z|$ . L'equazione del moto e quella dell'energia sono rispettivamente

$$\ddot{z} = -\frac{z}{r^3} \quad \text{e} \quad |\dot{z}|^2 = 2(r^{-1} + h).$$

Introduciamo il tempo fittizio  $ds = \frac{1}{r(t)} dt$  e riscriviamo le equazioni di moto rispetto ad esso. Dobbiamo calcolare le derivate rispetto al tempo  $t$  in funzione di quelle rispetto al tempo  $s$ . Si ha  $r \frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}$ , da cui

$$\dot{r} \frac{d}{dt} + r \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{ds^2}.$$

Osservato che  $\dot{r} = \frac{r'}{r}$ , il primo termine è  $\dot{r} \frac{d}{dt} = \frac{r'}{r} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{ds} = \frac{r'}{r^2} \frac{d}{ds}$ , e si ottiene infine

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{r^3} \left( r \frac{d^2}{ds^2} - r' \frac{d}{ds} \right).$$

Così l'equazione di moto diventa

$$\frac{1}{r^3} (rz'' - r'z') = -\frac{z}{r^3},$$

ossia  $rz'' - r'z' + z = 0$ ; Inoltre l'equazione per l'energia diventa

$$z'\bar{z}' = 2(r + hr^2).$$

Supponiamo da ora in avanti che  $h < 0$ . La trasformazione di Levi-Civita  $z \mapsto w$  è definita da

$$w^2 = z;$$

geometricamente, il piano complesso meno il semiasse reale positivo viene mandato nel semipiano superiore o inferiore (a seconda di come si sceglie la radice di  $z$ ). Ora,

$$z' = 2ww', \quad z'' = 2(w')^2 + 2ww'', \quad r = |z| = |w^2| = |w|^2 = w\bar{w},$$

$$r' = w'\bar{w} + w\bar{w}'.$$

Così l'equazione di moto nella nuova variabile  $w$  diventa

$$2w^2\bar{w}w'' - 2w^2|\bar{w}'|^2 + w^2 = 0.$$

Dividendo per  $w^2\bar{w}$  e ricordando che  $\frac{1}{\bar{w}} = \frac{w}{r}$  si ottiene in definitiva

$$2w'' - \frac{w}{r} (2|w'|^2 - 1) = 0. \quad (3.10)$$

Analogamente l'equazione dell'energia diventa

$$2|w'|^2 - 1 = hr,$$

e questo consente di semplificare l'equazione di moto: le due equazioni sono pertanto

$$w'' - \frac{h}{2}w = 0 \quad \text{e} \quad 2|w'|^2 - 1 = hr.$$

Con l'ipotesi che  $h < 0$ , la prima è l'equazione di un oscillatore armonico. Dunque con la trasformazione di Levi-Civita per un problema in due dimensioni abbiamo trasportato il problema di Keplero in un problema di oscillatore armonico.

### 3.4.1 Il problema tridimensionale

Il problema di Keplero in versione tridimensionale è descritto dalle equazioni di Hamilton

$$\dot{p}_i = -H_{q_i} \quad \text{e} \quad \dot{x}_i = H_{p_i},$$

per  $i = 1, 2, 3$ , dove l'hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) - \frac{k}{r},$$

dove  $r^2 = \sum_{j=1}^3 x_j^2$ . Introducendo il tempo fittizio  $dt = r ds$  otteniamo

$$p'_i = -rH_{x_i} \quad \text{e} \quad x'_i = rH_{p_i}.$$

Scelto  $H = 0$ , ossia considerando moti parabolici, si ottengono le equazioni

$$p'_i = -\frac{\partial(rH)}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad x'_i = \frac{\partial(rH)}{\partial p_i},$$

ossia un sistema hamiltoniano con hamiltoniana  $rH$ . Per integrare il problema, utilizziamo la teoria di Hamilton-Jacobi. L'equazione di Hamilton-Jacobi per la funzione caratteristica  $W$  è

$$\frac{1}{2}r \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial W}{\partial x_3} \right)^2 \right] = h(\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

e la scelta  $H = 0$  implica che  $h(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = k$ . Passiamo a coordinate sferiche  $r, w$  e  $\varphi$ , così si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2}r \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial W}{\partial w} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 w} \left( \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = h(\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Cerchiamo adesso la funzione caratteristica  $W$  della forma  $W(r, w) = \sqrt{r}f(w)$ . Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\frac{1}{4}f^2(w) + (f'(w))^2 = 2h,$$

da cui si può vedere che la funzione  $f(w) = 2\sqrt{\xi} \sin \frac{w}{2}$  con  $\xi = 2h$  soddisfa l'equazione precedente. Notiamo che è possibile scegliere la direzione dell'asse polare in modo che  $w$  sia l'angolo tra il vettore  $\boldsymbol{\xi}$  e il vettore  $\mathbf{x}$ . In questo modo

$$W = 2\sqrt{r\xi} \sin \frac{w}{2} = \sqrt{2r\xi(1 - \cos w)} = \sqrt{2} \sqrt{\xi r - \sum_{i=1}^3 \xi_i x_i}.$$

Poniamo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{v} = (p_1, p_2, p_3)$  (vecchie coordinate e vecchi momenti),  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  e  $\mathbf{w} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$  (nuove coordinate e nuovi momenti). Le equazioni che definiscono la trasformazione  $(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \mapsto (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})$  sono

$$\bar{w}_i = -\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \frac{r}{W} \left( \frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) \quad \text{e} \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial x_i} = \frac{\xi}{W} \left( \frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right).$$

Dalle due equazioni appena scritte si ottiene anche la relazione  $rp_i = \xi \bar{w}_i$ . Le tre relazioni precedenti si possono scrivere anche in forma vettoriale come

$$\mathbf{w} = \frac{1}{W} \left( \mathbf{x} - \frac{r}{\xi} \boldsymbol{\xi} \right), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{W} \left( \frac{\xi}{r} \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \right) \quad \text{e} \quad r\mathbf{v} = \xi \mathbf{w}.$$

Osserviamo che

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{w} = \frac{1}{W} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \mathbf{v},$$

da cui segue che i vettori  $\boldsymbol{\xi}$  e  $\mathbf{w}$  stanno sul piano del moto. Dall'espressione di  $W$  si ottiene anche che

$$w^2 = |\mathbf{w}|^2 = \frac{1}{W} \left| \mathbf{x} - \frac{r}{\xi} \boldsymbol{\xi} \right|^2 = \frac{1}{W^2} \cdot \frac{r}{\xi} W^2 = \frac{r}{\xi}.$$

Adesso calcoliamo

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{W} (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} - r\xi) = -\frac{W}{2},$$

così

$$|\mathbf{c}|^2 = |\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{w}|^2 = \xi^2 w^2 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{w})^2 = \xi^2 w^2 - \frac{W^2}{4} = \xi r - \frac{1}{2}(\xi r - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\xi r + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}).$$

Dalla relazione appena scritta, scrivendo  $c = |\mathbf{c}|$ , abbiamo

$$r(1 + \cos w) = \frac{2}{\xi} c^2,$$

che è l'equazione della traiettoria, ossia la relazione tra  $r$  e  $w$ .

Per concludere scriviamo esplicitamente le equazioni della trasformazione canonica trovata. Utilizzando le relazioni ricavate in precedenza si ottiene

$$x_i = W\bar{w}_i + w^2\xi_i \quad \text{e} \quad W = -2\xi \cdot \mathbf{w},$$

e nella prima equazione abbiamo ritrovato la stessa trasformazione ottenuta nella teoria di Sundman. Poi

$$p_i = \frac{\xi}{W} \left( \frac{x_i}{r} - \frac{\xi_i}{\xi} \right) = \frac{\xi}{r} W = \frac{\bar{w}_i}{w^2},$$

che è la trasformazione per inversione radiale ottenuta sempre nella teoria di Sundman.

### 3.4.2 Un risultato di Hamilton

Ricordiamo adesso un risultato di Hamilton (1846).

**Teorema 3.5.** *Supponiamo che il momento angolare totale non sia nullo. Al variare del tempo, il vettore velocità  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  si muove lungo un cerchio  $\mathcal{C}$  che giace in un piano  $P$  contenente l'origine, ma in generale non è centrato nell'origine. Possiamo ottenere uno qualunque di tali cerchi e questi, insieme ad un'orientazione, determinano univocamente l'orbita.*

*Dimostrazione.* Consideriamo la legge delle aree  $mr^2\dot{\vartheta} = l$  e l'equazione di moto  $m\ddot{\mathbf{x}} = -k\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ . Dividendo per  $m\dot{\vartheta}$  si ottiene

$$\frac{d}{d\vartheta} \mathbf{v} = -\frac{k}{m\dot{\vartheta}r^2}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = -\frac{k}{l}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) = -R(\cos \vartheta, \sin \vartheta),$$

dove abbiamo posto  $R = \frac{k}{l}$ . Integrando l'equazione differenziale precedente si ottiene così

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} + R(-\sin \vartheta, \cos \vartheta),$$

e questo mostra che il vettore velocità descrive un cerchio di raggio  $R$  e di centro  $\mathbf{c}$ .  $\square$

Si può vedere che la quantità  $e = \frac{|\mathbf{c}|}{R}$  è proprio l'eccentricità dell'orbita. Osserviamo che

$$\mathbf{v} = R(-\sin \vartheta, e + \cos \vartheta),$$

da cui

$$|\mathbf{x} \times \mathbf{v}| = r^2\dot{\vartheta} = \frac{l}{m} = rR[\cos \vartheta(e + \cos \vartheta) + \sin^2 \vartheta] = rR(1 + e \cos \vartheta).$$

### 3.5 Un teorema di Moser

Per comprendere l'enunciato del teorema di Moser che presenteremo più avanti abbiamo bisogno di alcune definizioni e risultati preliminari.

**Definizione 3.6.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  delle coordinate, con  $\mathbf{x} = \mathbf{u}(\mathbf{y})$  il cambio di coordinate. Consideriamo inoltre i due sistemi differenziali

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

definiti dai due campi vettoriali  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ . I due campi si dicono *equivalenti* se vale la relazione  $\mathbf{g} = \mathbf{u}_y^{-1}(\mathbf{f} \circ \mathbf{u})$ .

La definizione precedente esprime l'equivalenza di campi vettoriali, che si ha quando i due campi esprimono lo stesso sistema differenziale in due sistemi di coordinate diversi. Associata a questa abbiamo un'altra definizione:

**Definizione 3.7.** Siano  $\Phi^t$  e  $\Psi^t$  i flussi dei due campi vettoriali  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ . Se  $\Psi^t = \mathbf{u}^{-1} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}$  allora i due flussi si dicono *equivalenti*<sup>2</sup>.

Le due definizioni precedenti si possono anche dare, come si dice, "in senso esteso". L'equivalenza di campi in senso esteso si ha quando

$$\mathbf{g} = \lambda \cdot \mathbf{u}_y^{-1}(\mathbf{f} \circ \mathbf{u}),$$

con  $\lambda = \lambda(\mathbf{y})$  una funzione scalare. L'equivalenza di flussi in senso esteso ammette una riparametrizzazione del tempo: ossia deve valere la relazione

$$\Psi^t = \mathbf{u}^{-1} \circ \Phi^s \circ \mathbf{u}, \quad \text{con } s = \int_0^t \lambda(\Psi^\sigma(\mathbf{y})) d\sigma.$$

### 3.5.1 Il flusso geodetico sulla sfera

Consideriamo la sfera  $S^n$  e un punto su di essa non soggetto a forze tranne che a quella vincolare. Per determinare il moto del punto non possiamo passare alle solite coordinate sferiche perché siamo in dimensione  $n$ , e allora usiamo i principi variazionali. Il problema è quello di un moto vincolato alla superficie  $|\boldsymbol{\xi}|^2 - 1 = 0$  (con  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ), dunque si deve minimizzare il funzionale

$$S[\boldsymbol{\xi}] = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{1}{2} |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \lambda(|\boldsymbol{\xi}|^2 - 1) \right] dt.$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange ci danno  $\ddot{\boldsymbol{\xi}} = \lambda \boldsymbol{\xi}$  (infatti la lagrangiana è la funzione integranda del funzionale azione); essendo  $\boldsymbol{\xi}$  sulla sfera unitaria  $S^n$  abbiamo

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} |\boldsymbol{\xi}|^2 = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}}) = |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \boldsymbol{\xi} \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}} = |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \lambda |\boldsymbol{\xi}|^2,$$

da cui si ottiene  $\lambda = -|\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2$ . Quindi abbiamo

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}} = -|\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 \boldsymbol{\xi},$$

---

<sup>2</sup>Dato  $\Phi^t$  si può vedere per esercizio che il flusso  $\Psi^t$  definito come  $\Psi^t = \mathbf{u}^{-1} \circ \Phi^t \circ \mathbf{u}$  soddisfa la seconda equazione differenziale.

che è l'equazione del moto geodetico sulla sfera  $S^n$ . Le equazioni precedenti possono essere scritte come sistema differenziale del primo ordine come segue:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = -|\boldsymbol{\eta}|^2 \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta} \end{cases}.$$

Il *flusso geodetico sulla sfera* è il flusso del campo vettoriale definito dal precedente sistema. Possiamo pensare che le coppie  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  siano elementi del fibrato tangente a  $S^n$ , definito da  $TS^n = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) : |\boldsymbol{\xi}|^2 = 1, \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0\}$ . Inoltre

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{\eta}|^2 = 2(\boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}) = -2|\boldsymbol{\eta}|^2 \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0,$$

e questo ci dice che  $|\boldsymbol{\eta}|$  è costante. Se ci restringiamo a  $|\boldsymbol{\eta}| = 1$  stiamo considerando il cosiddetto fibrato tangente unitario, definito da

$$T_1S^n = \{(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) : |\boldsymbol{\xi}|^2 = 1, \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0, |\boldsymbol{\eta}| = 1\}.$$

### 3.5.2 Il gruppo di Lie $SL(n)$

Il gruppo  $G = SL(n)$  delle matrici reali  $n \times n$  a determinante 1 è un gruppo di Lie: questo significa che  $G$  è dotato di una struttura di varietà differenziabile rispetto alla quale l'operazione di gruppo e l'inversione sono continue.

**Lemma 3.8.** *Il gruppo  $G = SL(n)$  forma una superficie regolare in  $M(n)$ .*

*Dimostrazione.* Per una matrice  $A \in M(n)$  definiamo la funzione

$$f(A) = \det A - 1 = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} - 1.$$

Abbiamo che  $G = f^{-1}(\{0\})$ , e questo ci dice che  $G$  forma una superficie in  $M(n)$ . Per vedere che è regolare calcoliamo

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j} A_{ij},$$

che sono tutte nulle se e solo se  $\det A = 0$ , e ciò non si verifica in  $G$ . □

Ogni gruppo di Lie ha associata una cosiddetta *algebra di Lie*, rappresentata dai vettori del piano tangente al gruppo nell'elemento identità. Tradizionalmente l'algebra di Lie associata a  $G$  si denota con  $\mathfrak{g}$ .

**Proposizione 3.9.** *L'algebra di Lie del gruppo  $G = SL(n)$  è  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ , dove  $\mathfrak{sl}(n)$  è l'insieme delle matrici a traccia nulla.*

*Dimostrazione.* Vediamo come sono fatti i vettori tangenti all'elemento identità  $I \in SL(n)$ . Sia  $A(t)$  con  $\det A(t) = 1$  e  $A(0) = I$ , ossia una curva su  $SL(n)$  che passa dall'identità all'istante iniziale  $t = 0$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{d}{dt} \det A(t) \right) \Big|_{t=0} = \left( \frac{d}{dt} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left( \sum_{k=1}^m \dot{a}_{k\sigma(k)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{j\sigma(j)} \right) \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^m \dot{a}_{kk} \Big|_{t=0} = \operatorname{Tr} \left( \frac{d}{dt} A(t) \Big|_{t=0} \right), \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo usato  $A(0) = I$ . L'espressione che compare entro parentesi tonda è proprio il vettore tangente alla curva  $A(t)$  nell'identità, ossia un generico vettore tangente al gruppo  $G$  nel suo elemento identità.  $\square$

L'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$  delle matrici a traccia nulla è generata dalla tre matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine ricordiamo che nel caso del gruppo di Lie  $G = SL(n)$  e della sua algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$  la *mappa esponenziale*  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  è definita dalla serie

$$\exp A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

### 3.5.3 L'azione del gruppo $SL(2)$

Consideriamo adesso l'hamiltoniana

$$H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \{ |\boldsymbol{\xi}|^2 |\boldsymbol{\eta}|^2 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \} = \frac{1}{2} \det S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}), \quad (3.11)$$

dove abbiamo posto

$$S = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{\eta}|^2 & \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} & |\boldsymbol{\xi}|^2 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo il gruppo  $G = SL_{\mathbb{R}}(2) = SL(2)$  e definiamo un'azione di questo gruppo sullo spazio  $\mathbb{R}^{2(n+1)}$ , che è lo spazio delle  $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$ . L'azione è la seguente: per una matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_{\mathbb{R}}(2)$$

definiamo  $\Psi^g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = (a\boldsymbol{\eta} + b\boldsymbol{\xi}, c\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\xi})$ . A livello di notazione, per ogni matrice quadrata  $A$  di ordine 2 introduciamo la matrice  $\tilde{A}$  di ordine  $2(n+1)$  come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} aI_{n+1} & bI_{n+1} \\ cI_{n+1} & dI_{n+1} \end{pmatrix}.$$

In questo modo si può riscrivere l'azione come

$$\Psi^g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{g} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}.$$

Due sono le proprietà importanti di questa azione.

- (i) L'azione è canonica, ovvero per ogni  $g \in G$  la trasformazione di coordinate indotta, ossia  $\Psi^g$ , è canonica (o meglio, completamente canonica). Infatti le parentesi di Poisson fondamentali vengono conservate:

$$\{a\boldsymbol{\eta} + b\boldsymbol{\xi}, c\boldsymbol{\eta} + d\boldsymbol{\xi}\} = (ad - bc)\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}\} = -I.$$

- (ii) Si ha

$$S(\Psi^g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) = gS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})g^\top,$$

come un calcolo diretto mostra. Questa proprietà è importante perché dal fatto che  $\det g = 1$  e dal teorema di Binet si ottiene che  $H$  è invariante per l'azione di  $G$ .

Per ciascuna delle matrici  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) che generano l'algebra di Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$  possiamo costruire il sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} \end{pmatrix} = \tilde{A}_j \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

e questo ha soluzione

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} = \exp(\tilde{A}_j \tau) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_0 \\ \boldsymbol{\xi}_0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che  $\exp(\tilde{A}_j \tau) \in SL(2n + 2)$  in quanto  $\tilde{A}_j \in \mathfrak{sl}(2n + 2)$ . Questo ci permette di rappresentare un flusso: al variare di  $\tau$  abbiamo una curva di elementi del gruppo  $G$  e che lasciano invariata l'hamiltoniana; inoltre l'azione è canonica, da cui si deduce che il flusso scritto è canonico e dunque il campo vettoriale del sistema (3.12) è hamiltoniano. Le hamiltoniane associate ai tre sistemi sono

$$G_1 = -\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad G_2 = -|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{e} \quad G_3 = |\boldsymbol{\eta}|^2.$$

**Proposizione 3.10.** *Le hamiltoniane  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  sono integrali primi del sistema hamiltoniano definito da  $H$ .*

*Dimostrazione.* La matrice che definisce il flusso del sistema hamiltoniano associato a  $G_j$  è  $\exp(\tilde{A}_j \tau)$ , che è del tipo

$$g_j(\tau) = \begin{pmatrix} a_j I_{n+1} & b_j I_{n+1} \\ c_j I_{n+1} & d_j I_{n+1} \end{pmatrix}$$

con  $a_j d_j - b_j c_j = 1$ , stando in  $SL(2n + 2)$ . Dunque  $\Psi^{g_j(\tau)}$  lascia invariata  $H$  per ogni  $\tau$ , e allora  $H$  è un integrale primo del flusso hamiltoniano generato da  $G_j$ , ossia  $\{H, G_j\} = 0$ . Per la simmetria delle parentesi di Poisson si conclude anche che  $G_j$  è un integrale primo del flusso hamiltoniano generato da  $H$ .  $\square$



### 3.5.4 Il teorema di Moser

Presentiamo adesso il teorema che Moser ha dimostrato nel 1970 e che mette in relazione il problema di Keplero con tutte le nozioni introdotte finora.

**Lemma 3.11.** *Il flusso del campo vettoriale hamiltoniano dell'hamiltoniana (3.11) è equivalente al flusso geodetico sulla sfera  $S^n$ .*

*Dimostrazione.* Consideriamo nuovamente l'hamiltoniana introdotta nell'Equazione (3.11). Sappiamo che

$$G_1 = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}, \quad G_2 = |\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \text{e} \quad G_3 = |\boldsymbol{\eta}|^2$$

sono integrali primi del sistema hamiltoniano definito da  $H^3$ . Siano  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_1$  (nell'ordine) i valori costanti di questi integrali, così

$$S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la relazione

$$S(\Psi^g(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})) = gS(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})g^\top$$

e affermiamo che possiamo scegliere un elemento  $g \in SL(2)$  in modo che la matrice sia della forma

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ossia in modo che  $c_2 = 0$  e  $c_3 = 1$ . Cerchiamo  $g$  che soddisfi  $gS = D(g^\top)^{-1}$ : se si eseguono tutti i calcoli si ottiene un sistema omogeneo nelle incognite  $a_1, b_1, c_1, d_1$ , che ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) & -c_1 J \\ J & S(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \end{pmatrix}.$$

Tale matrice ha determinante  $\det A = (\det S)^2 - c_1^2 = 0$  perché  $\det S = c_1$ . Dunque esiste una soluzione non nulla del sistema omogeneo definito da  $A$  e prendiamo quella e moltiplichiamo opportunamente per uno scalare in modo che il determinante sia 1. Ne segue che il sistema hamiltoniano associato all'hamiltoniana  $H$  diventa

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}} = -|\boldsymbol{\eta}|^2 \boldsymbol{\xi} \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\eta} \end{cases},$$

e dunque abbiamo l'equivalenza tra il flusso hamiltoniano associato ad  $H$  e il flusso geodetico sulla sfera  $S^n$ , essendo i due flussi descritti dalle stesse equazioni (a meno di un cambio di coordinate).  $\square$

---

<sup>3</sup>Con un piccolo abuso di notazione abbiamo chiamato di nuovo  $G_1$  e  $G_2$  gli opposti degli integrali primi  $G_1$  e  $G_2$  trovati nel precedente paragrafo.

**Teorema 3.12** (Moser). *Il flusso del campo vettoriale hamiltoniano  $\mathbf{X}_H = J\nabla H$  con*

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^{-1}$$

*ristretto ad una superficie ad energia costante  $H = E < 0$  opportunamente compattificata alle singolarità di collisione  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  è equivalente in senso esteso al flusso geodetico sulla sfera  $S^n$ .*

*Dimostrazione.* Grazie al lemma precedente è sufficiente mostrare che il flusso associato all'hamiltoniana

$$H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \{ |\boldsymbol{\xi}|^2 |\boldsymbol{\eta}|^2 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2 \}$$

è equivalente al flusso associato all'hamiltoniana del problema di Keplero. Iniziamo considerando la trasformazione stereografica definita per  $|\boldsymbol{\xi}| > \xi_0$  da

$$x_0 = |\boldsymbol{\xi}| = a_0(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{e} \quad x_j = \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0} = a_j(\boldsymbol{\xi})^4.$$

Vogliamo anche scrivere l'inversa di questa trasformazione. Come notazione introduciamo  $|\mathbf{x}|$ , che non è la norma del vettore  $\mathbf{x}$ , bensì definiamo

$$|\mathbf{x}|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2}{(|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0)^2} = \frac{|\boldsymbol{\xi}|^2 - \xi_0^2}{(|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0)^2} = \frac{|\boldsymbol{\xi}| + \xi_0}{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0}, \quad (3.13)$$

ossia  $|\mathbf{x}|^2(x_0 - \xi_0) = x_0 + \xi_0$ , da cui si ricava

$$\xi_0 = \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{|\mathbf{x}|^2 + 1} x_0.$$

L'inversa della trasformazione è dunque

$$\xi_0 = x_0 \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \quad \text{e} \quad \xi_j = x_j(x_0 - \xi_0) = \frac{2x_0x_j}{|\mathbf{x}|^2 + 1}.$$

Vogliamo adesso completare la trasformazione puntuale scritta ad una trasformazione canonica, e per far questo utilizziamo una funzione generatrice  $W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$ . Le relazioni di trasformazione sono

$$\mathbf{y} = W_{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi} = W_{\boldsymbol{\eta}},$$

da cui con qualche calcolo si ottiene

$$W(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{|\mathbf{x}|^2 + 1} x_0 \eta_0 + \sum_{k=1}^n \frac{2x_0x_k}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \eta_k.$$

---

<sup>4</sup>L'applicazione definita non è la proiezione stereografica classica, in quanto i punti immagine non appartengono al piano equatoriale  $x_0 = 0$ .

Vogliamo adesso esplicitare la trasformazione generata da  $W$ . Dalla (3.13) si ottiene

$$\begin{aligned} y_0 = W_{x_0} &= \frac{|\mathbf{x}|^2 - 1}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \eta_0 + \frac{2}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \sum_{k=1}^n x_k \eta_k = \\ &= \frac{\xi_0}{|\boldsymbol{\xi}|} \eta_0 + \frac{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0}{|\boldsymbol{\xi}|} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0} \eta_k = \frac{\xi_0}{|\boldsymbol{\xi}|} \eta_0 + \frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|} \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}|}. \end{aligned}$$

Per le altre  $y_j$  si ottiene invece

$$y_j = (|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0) \eta_j - \left( \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}|} - \eta_0 \right) \xi_j.$$

La trasformazione inversa della trasformazione canonica (verificare per esercizio) è data dalle seguenti equazioni:

$$\eta_0 = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x_0} - \frac{2y_0}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \quad \text{e} \quad \eta_j = \frac{|\mathbf{x}|^2 + 1}{2x_0} y_j + x_j y_0 \left[ 1 - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{x_0 y_0} + \frac{2}{|\mathbf{x}|^2 + 1} \right].$$

Utilizziamo adesso la trasformazione canonica  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  ottenuta. Restringiamola al fibrato tangente  $T(\dot{S}^n)$ , dove  $\dot{S}^n$  è la sfera privata del polo nord, ovvero

$$T(\dot{S}^n) = \{(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) : \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n+1}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus L^+, |\boldsymbol{\xi}| = 1, \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0\},$$

dove  $L^+$  è la semiretta che contiene il polo nord. Tale restrizione dà

$$x_0 = |\boldsymbol{\xi}| = 1 \quad \text{e} \quad y_0 = \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi}|} = 0.$$

Il push-forward dell'hamiltoniana è  $F = H \circ \mathbf{u}^{-1}$ . Utilizzando le relazioni

$$|\mathbf{x}|^2 = \frac{|\boldsymbol{\xi}| + \xi_0}{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0}, \quad |\mathbf{y}|^2 = \left( \frac{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0}{|\boldsymbol{\xi}|} \right)^2 \{|\boldsymbol{\xi}|^2 |\boldsymbol{\eta}|^2 - (\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\eta})^2\},$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_0 \eta_0 - \xi_0 y_0$$

si può verificare che

$$F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8} (|\mathbf{x}|^2 + 1)^2 |\mathbf{y}|^2.$$

Ristretti al fibrato tangente della sfera puntata abbiamo che  $H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\eta}|^2$  (che è costante perché  $|\boldsymbol{\eta}|$  è un integrale primo), e tale hamiltoniana è equivalente a quella del flusso geodetico sulla sfera. Se poi ci restringiamo al fibrato tangente unitario si ottiene l'hamiltoniana  $H = \frac{1}{2}$ . Sia

$$\psi(F) = \sqrt{2F} = \frac{1}{2} (|\mathbf{x}|^2 + 1) |\mathbf{y}|,$$

allora  $\psi(1/2) = 1$ . Modifichiamo ancora l'hamiltoniana come

$$|\mathbf{y}|^{-1} (\psi(F) - 1) = \frac{1}{2} (|\mathbf{x}|^2 + 1) - |\mathbf{y}|^{-1}.$$

A cosa corrisponde questa modifica? Abbiamo riparametrizzato il tempo introducendo il tempo fittizio  $\tau$  definito da

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = |\mathbf{y}|.$$

Poi come al solito il sistema con le derivazioni rispetto al tempo  $\tau$  anziché rispetto al tempo  $t$  non è hamiltoniano, e per renderlo tale si introduce la nuova hamiltoniana con la moltiplicazione per  $|\mathbf{y}|^{-1}$  e si studia il sistema su una superficie ad energia fissata, che è quello che stiamo facendo (trucco di Poincaré). Applicando infine la trasformazione  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{p}$  e  $\mathbf{y} \mapsto -\mathbf{q}$  si ottiene

$$\frac{1}{2}|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{q}|^{-1} + \frac{1}{2},$$

e quindi abbiamo ottenuto l'hamiltoniana del problema di Keplero.  $\square$

**Osservazione 3.13.** Eseguendo una trasformazione del tipo  $\xi_0 \mapsto -\xi_0$  e  $\eta_0 \mapsto -\eta_0$ , lasciando le altre coordinate invariate, si ottiene

$$-p_j = x_j = \frac{\xi_j}{|\boldsymbol{\xi}| - \xi_0} \mapsto \frac{x_j}{|\mathbf{x}|^2} = -\frac{p_j}{|\mathbf{p}|^2}$$

e con altri calcoli si ottiene

$$q_j \mapsto |\mathbf{p}|^2 q_j - 2(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_j - 2x_0 y_0 p_j.$$

Se ci restringiamo al fibrato tangente alla sfera si cancella l'ultimo termine e si ottiene la trasformazione di Levi-Civita nel caso tridimensionale.

### 3.6 L'azione di $SO(3)$

Con la Proposizione 3.10 abbiamo visto che grazie al gruppo  $SL(2)$  abbiamo ottenuto alcuni integrali primi del sistema associato all'hamiltoniana  $H(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})$  (che poi ha un flusso equivalente al flusso dell'hamiltoniana del problema di Keplero).

Vediamo quali integrali primi del problema di Keplero si possono ottenere con l'azione del gruppo  $SO(n+1)$ . Tale insieme è un gruppo di Lie, che ha come algebra di Lie associata l'algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1)$  delle matrici antisimmetriche.

**Esempio 3.14.** Nel caso  $n=2$  tale algebra è generata dalle tre matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In generale sia  $R \in SO(n+1)$ , allora abbiamo l'azione definita dalla seguente mappa:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\boldsymbol{\eta} \\ R\boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}.$$

In modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso di  $SL(2)$  si dimostra che l'azione appena definita è completamente canonica. I sistemi associati ai generatori di  $\mathfrak{so}(n+1)$  sono

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = A_j \boldsymbol{\eta} \quad \text{e} \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = A_j \boldsymbol{\xi},$$

e le hamiltoniane di questi sistemi sono

$$G_j = \boldsymbol{\eta} \cdot A_j \boldsymbol{\xi} = -A_j \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\xi}.$$

Tali integrali primi sono

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha \quad \text{con } 0 \leq \alpha < \beta \leq n,$$

e corrispondono a una generalizzazione del vettore momento angolare in dimensione  $n$ . Abbiamo anche gli integrali

$$\Gamma_{0k} = \xi_0 \eta_k - \eta_k \eta_0 \quad \text{per } k = 1, \dots, n,$$

vediamo a cosa corrispondono. Se  $\mathbf{u}$  è la trasformazione stereografica introdotta precedentemente prima si ottiene

$$\Gamma_{0k} \cdot \mathbf{u}^{-1} = G_{0k} = -(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})x_k + \frac{1}{2}(|\mathbf{x}|^2 - 1)y_k,$$

che si può esprimere in termini di  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ . Si ha  $\{H, G_{0k}\} = p_k (H + \frac{1}{2})$ , e dunque i  $G_{0k}$  sono integrali primi sulla varietà di livello  $H = -\frac{1}{2}$  e dunque i  $\Gamma_{0k}$  non sono in generale integrali primi del problema di Keplero. Se prendiamo però

$$L_k = -G_{0k} + q_k \left( H + \frac{1}{2} \right)$$

si ottiene  $\{H, L_k\} = 0$  e dunque questi sono dei veri integrali primi. Tali integrali si possono scrivere come

$$L_k = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})p_k + |\mathbf{p}|^2 q_k - \frac{q_k}{|\mathbf{q}|},$$

che sono una generalizzazione del vettore di Lenz.

### 3.7 La regolarizzazione di Easton

Presentiamo adesso un'altra tecnica di regolarizzazione, dovuta a Easton e chiamata *block regularization*. Seguiremo [5].

Sia  $M$  una varietà differenziabile e sia  $\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  un flusso completo su  $M$  (completo sta ad indicare che è definito per tutti i tempi). Un sottoinsieme  $N \subseteq M$  è detto *invariante* per il flusso  $\psi$  se  $\psi(N, \mathbb{R}) = N$ .

**Definizione 3.15.** Sia  $N \subseteq M$  compatto e invariante. Si dice che  $N$  è *isolato* se esiste  $U$  aperto con  $N \subseteq U$  tale che

$$\psi(x, \mathbb{R}) \subseteq U \Rightarrow x \in N.$$

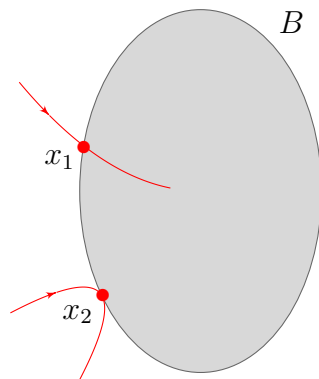
Tale  $U$  si dice *intorno isolante* di  $N$ .

La definizione precedente ha un significato geometrico immediato: tutte le orbite con un punto in  $U$  o stanno interamente in  $N$  oppure devono uscire da  $U$  nel futuro e nel passato.

**Definizione 3.16.** Sia  $B \subseteq M$  compatto, con parte interna non vuota e tale che  $b = \partial B$  sia una varietà differenziabile. Definiamo

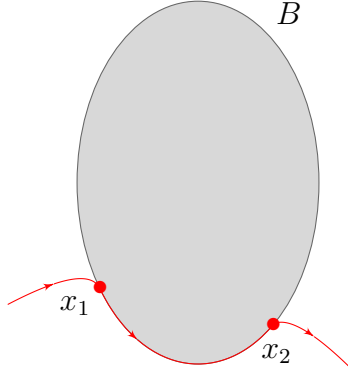
$$\begin{aligned} b^+ &= \{x \in b : \psi(x, (-\varepsilon, 0)) \cap B = \emptyset \text{ per qualche } \varepsilon > 0\}, \\ b^- &= \{x \in b : \psi(x, (0, \varepsilon)) \cap B = \emptyset \text{ per qualche } \varepsilon > 0\}, \\ t &= \left\{x \in b : \dot{\psi}(x, 0) \text{ è tangente a } b\right\}. \end{aligned}$$

Anche questa definizione si presta ad un'interpretazione geometrica. I punti che stanno in  $b^+$  sono i cosiddetti *punti entranti*: questi sono i punti del bordo da cui passano linee di campo entranti, che potrebbero essere al limite anche tangenti (in un punto soltanto) al bordo, come mostra la Figura 3.1.



**Figura 3.1.** I punti  $x_1$  e  $x_2$  sono punti in  $b^+$ ;  $x_2$  sta anche in  $b^-$  e in  $t$ .

I punti in  $b^-$  sono detti *punti uscenti*, e valgono considerazioni analoghe a quanto detto per i punti entranti. Infine i punti in  $t$  sono detti *punti di tangenza* e sono quei punti del bordo da quali passano linee di campo tangenti al bordo stesso, eventualmente anche linee che si adagiano sul bordo. Si veda la Figura 3.2



**Figura 3.2.** I punti sull'arco tra  $x_1$  e  $x_2$  (estremi compresi) sono punti in  $t$ . Inoltre  $x_1$  sta anche in  $b^+$  e  $x_2$  sta anche in  $b^-$ .

**Definizione 3.17.** Un insieme  $B$  come nella definizione precedente è detto *isolating block* se  $t = b^+ \cap b^-$ .

**Definizione 3.18.** Sia  $N$  un insieme invariante e isolato e sia  $B$  un isolating block. Diciamo che  $B$  *isola*  $N$  se la parte interna di  $B$  è un intorno isolante di  $N$ .

Nel lavoro di Conley e Easton si dimostra anche che se  $N$  è un insieme invariante e isolato allora esiste un isolating block che isola  $N$ . Procediamo con le definizioni.

**Definizione 3.19.** Definiamo gli insiemi seguenti:

$$a^+ = \{x \in b^+ : \psi(x, [0, \infty)) \subseteq B\} \quad \text{e} \quad a^- = \{x \in b^- : \psi(x, (-\infty, 0]) \subseteq B\}.$$

Vediamo anche qui l'interpretazione geometrica, che è questo punto è molto semplice: i punti in  $a^+$  sono i punti della frontiera dai quali si entra in  $B$  e nel futuro non si esce più da  $B$ ; invece i punti in  $a^-$  sono i punti della frontiera dai quali si esce da  $B$  e si era dentro  $B$  da tempo infinito.

Un punto  $x \in b^+ \setminus a^+$  è dunque un punto della frontiera di  $B$  dal quale si entra in  $B$  con una linea di campo che poi uscirà da  $B$ . Per  $x \in b^+ \setminus a^+$  si può dunque definire il *tempo trascorso* in  $B$  come

$$T(x) = \inf\{t > 0 : \psi(x, t) \notin B\}.$$

La *mappa attraverso il blocco* è la mappa  $\Psi : b^+ \setminus a^+ \rightarrow b^- \setminus a^-$  definita da

$$\Psi(x) = \psi(x, T(x)).$$

Nell'articolo viene dimostrato che la mappa  $\Psi$  è un diffeomorfismo, e noi omoetteremo la dimostrazione di questo fatto.

**Definizione 3.20.** Un isolating block  $B$  è detto *banalizzabile* se  $\Psi$  si estende univocamente ad un diffeomorfismo  $b^+ \rightarrow b^-$ .

Sempre nell'articolo si trova la dimostrazione del fatto seguente: se  $B_1$  e  $B_2$  sono due blocchi che isolano  $N$ , allora  $B_1$  è banalizzabile se e solo se  $B_2$  è banalizzabile. Così ha senso dare la seguente definizione.

**Definizione 3.21.** Sia  $N$  un insieme invariante. Diremo che  $N$  è *banalizzabile* se esiste un isolating block  $B$  banalizzante che isola  $N$ .

Vediamo adesso la tecnica di regolarizzazione a blocchi. Sia  $M$  una varietà differenziabile,  $N \subseteq M$  compatto e sia  $F$  un campo vettoriale su  $M \setminus N$ . Indichiamo con  $\varphi$  il flusso su  $M \setminus N$  dato da  $F$  (questo flusso può anche non essere completo)<sup>5</sup>. Sia poi  $B \subseteq M$  compatto con parte interna non vuota e in modo che la frontiera  $b$  sia una varietà differenziabile con  $b \cap N = \emptyset$ .

**Definizione 3.22.** L'*orbita* che passa da  $x$  è l'insieme

$$\mathcal{O}(x) = \{\varphi(x, t) : \varphi(x, t) \text{ è definito}\}.$$

**Definizione 3.23.** Diremo che un isolating block  $B$  *isola* l'insieme singolare  $N$  se  $N$  è contenuto nella parte interna di  $B$  e se  $\mathcal{O}(x) \not\subseteq B$  per ogni  $x \in B \setminus N$ .

In modo analogo a prima possiamo definire la mappa attraverso il blocco, che stavolta chiamiamo  $\Phi : b^+ \setminus a^+ \rightarrow b^- \setminus a^-$ . Si può ripetere anche la definizione di banalizzabile data in precedente, e a questo punto la definizione cruciale è la seguente.

**Definizione 3.24.**  $N$  è *regolarizzabile a blocchi* se esiste un blocco isolante  $B$  banalizzabile che isola  $N$ .

### 3.7.1 Quattro controesempi

Abbiamo fin qui esaminato due principali nozioni di regolarizzabilità: quella introdotta Sundman che regolarizza le singole soluzioni singolari, e quella a blocchi dovuta a Easton. Le due nozioni non sono equivalenti ed effettivamente non sono neanche correlate: infatti presentiamo adesso quattro esempi di campi vettoriali che coprono tutte le possibilità di regolarizzabilità e non.

**Esempio 3.25.** Consideriamo il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = (x^2 + y^2)^{-1/3} \\ \dot{y} = 0 \end{cases}.$$

Il ritratto di fase è mostrato nella Figura 3.3. Infatti dalla seconda equazione vediamo che  $y$  è costante e abbiamo problemi di regolarità del campo quando  $y(t) = 0$ : in tal caso la prima equazione è a variabili separabili e dà

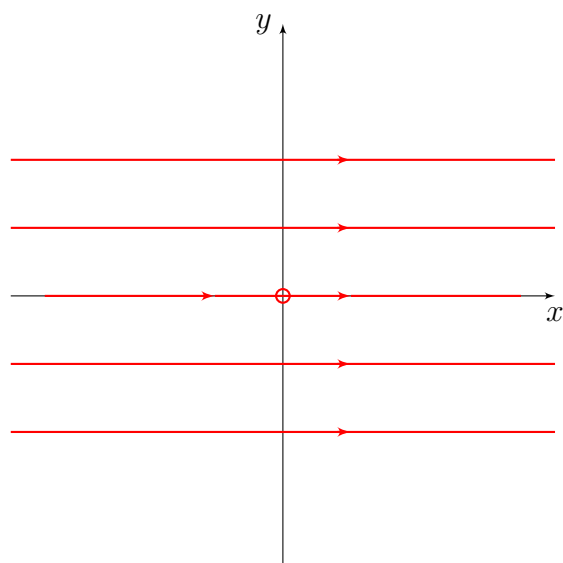
$$x(t) = \left(\frac{5}{3}\right)^{3/5} (t - t_*)^{3/5}.$$

---

<sup>5</sup>La generalizzazione a campi vettoriali su insiemi del tipo  $M \setminus N$  ci serve per trattare il caso in cui  $N$  è l'insieme singolare di un certo sistema differenziale, e quindi il flusso non può essere definito su di esso.



Tale soluzione, dato l'esponente, può essere continuata oltre la singolarità secondo la teoria di Sundman; l'intuizione, dato che non abbiamo approfondito i dettagli teorici, ci dice che tale campo si può regolarizzare anche secondo Easton.



**Figura 3.3.** Ritratto di fase del primo sistema.

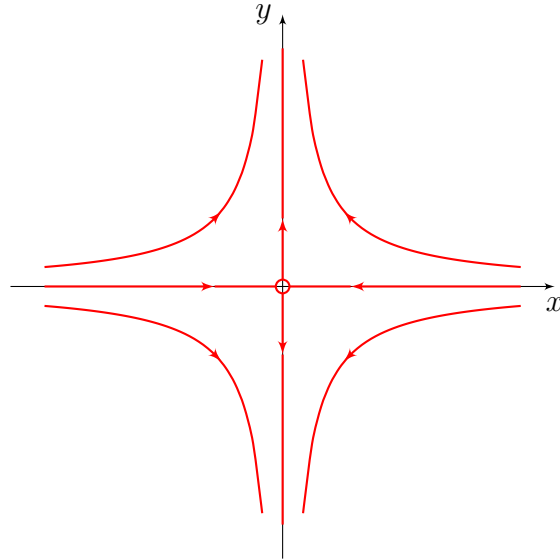
**Esempio 3.26.** Come prossimo esempio consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{x^2 + y^2} \\ \dot{y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Esaminiamo anche stavolta il ritratto di fase (Figura 3.4). Per disegnare il ritratto di fase dobbiamo cercare un integrale primo e lo possiamo fare cercandolo della forma  $F(x, y) = f(x) + g(y)$ . Effettuando i calcoli si ottiene  $F(x, y) = \log |xy|$ . Mettiamoci lungo la soluzione con  $y(t) = 0$ : si ottiene la prima equazione nuovamente a variabili separabili, che dà

$$x(t) = -2^{1/2}(t^* - t)^{1/2}.$$

In questo caso, data la presenza di un denominatore pari, non si può regolarizzare la soluzione secondo Sundman; inoltre non si può fare neanche una block regularization perché non si ha dipendenza continua dai dati: infatti in ogni intorno di ogni punto della soluzione singolare abbiamo punti che sono dati iniziali per soluzioni che divergono.



**Figura 3.4.** Ritratto di fase del secondo sistema.

**Esempio 3.27.** Consideriamo un esempio simile al primo:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ \dot{y} = 0 \end{cases} .$$

Il ritratto di fase infatti è qualitativamente lo stesso di quello del primo esempio. La soluzione singolare stavolta non può essere regolarizzata secondo Sundman (verificare), e invece è regolarizzabile secondo la teoria di Easton.

**Esempio 3.28.** Nell'ultimo esempio, più complesso, prendiamo il sistema differenziale

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{4/3}} \\ \dot{y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{4/3}} \end{cases} .$$

In questo caso la soluzione per  $y(t) = 0$  è

$$x(t) = -\left(\frac{5}{3}\right)^{3/5} (t^* - t)^{3/5} .$$

Stavolta la soluzione è regolarizzabile secondo Sundman perché il denominatore dell'esponente è dispari, ma non si può effettuare una regolarizzazione a blocchi per lo stesso motivo del secondo esempio (disegnare il ritratto di fase per convincersi di questo).

### 3.8 Collisioni triple

Ci concentriamo adesso sulle collisioni triple del problema dei tre corpi: come sappiamo queste sono possibili soltanto se il momento angolare è nullo. Quello che è noto oggi è che le collisioni triple, in generale, non sono regolarizzabili. Qui lo vedremo per il caso dei tre corpi collineari, seguendo [3].

Introdotti  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$  e  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , le equazioni del moto sono

$$\dot{\mathbf{q}} = M^{-1}\mathbf{p} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{p}} = \nabla U(\mathbf{q}),$$

dove  $M$  è la matrice delle masse e

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \frac{m_i m_j}{|q_i - q_j|}.$$

Fissiamo il centro di massa nell'origine, ossia ci stiamo restringendo agli insiemi

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 m_j q_j = 0 \right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 : \sum_{j=1}^3 p_j = 0 \right\}.$$

Questo significa che  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{P}$ : tale restrizione constringe  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  ad uno spazio di dimensione 4 anziché di dimensione 6. L'energia cinetica invece è  $T(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^\top M^{-1}\mathbf{p}$ . Inoltre abbiamo anche l'integrale primo dell'energia, di cui fissiamo un valore  $h$ . Possiamo dunque definire la varietà associata

$$\mathcal{E}(h) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{P} : H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = h\}.$$

Ammettiamo infine che ad un certo istante avvenga una collisione tripla: sicuramente tale collisione dovrà avvenire in  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  per l'aver fissato il centro di massa nell'origine. Per studiare la collisione iniziamo effettuando una trasformazione di coordinate. Consideriamo le coordinate  $r$ ,  $s$  e  $u$  definite dalle relazioni seguenti:

$$r = (\mathbf{q}^\top M \mathbf{q})^{1/2}, \quad \mathbf{s} = r^{-1}\mathbf{q} \quad \text{e} \quad \mathbf{u} = r^{1/2}\mathbf{p},$$

ovvero  $r$  ed  $\mathbf{s}$  sono coordinate polari su  $\mathcal{Q}$ . Infatti  $\mathbf{s} \in S = \{\mathbf{x} : \mathbf{x}^\top M \mathbf{x} = 1\}$  è la sfera unitaria rispetto al prodotto scalare delle masse. Nelle nuove coordinate l'energia è  $T(\mathbf{u}) - U(\mathbf{s}) = rh$ , e la varietà dell'energia è

$$\mathcal{F}(h) = \{(r, \mathbf{s}, \mathbf{u}) \in [0, \infty) \times S \times \mathcal{P} : T(\mathbf{u}) - U(\mathbf{s}) = rh\}.$$

Tale varietà contiene anche i punti di singolarità di collisione tripla in quanto abbiamo regolarizzato l'equazione dell'energia. Più precisamente, detto

$$\mathcal{F}^0(h) = \mathcal{F}(h) \setminus \{r = 0\}$$

la trasformazione di coordinate induce un diffeomorfismo analitico tra  $\mathcal{E}(h)$  e  $\mathcal{F}^0(h)$ . Poi si definisce

$$\mathcal{F}^C = \mathcal{F}(h) \setminus \mathcal{F}^0(h) = \mathcal{F}(h) \cap \{r = 0\},$$

che è la *varietà di collisione tripla*. Vediamo come si trasformano le equazioni differenziali: qualche calcolo mostra che il nuovo campo vettoriale è dato da

$$\dot{r} = r^{-1/2} \mathbf{u}^\top \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{s}} = r^{-3/2} [-(\mathbf{u}^\top \mathbf{s})\mathbf{s} + M^{-1}\mathbf{u}], \quad \dot{\mathbf{u}} = r^{-3/2} \left[ \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\top \mathbf{s})\mathbf{u} + \nabla U(\mathbf{s}) \right]^6.$$

Consideriamo il tempo fittizio

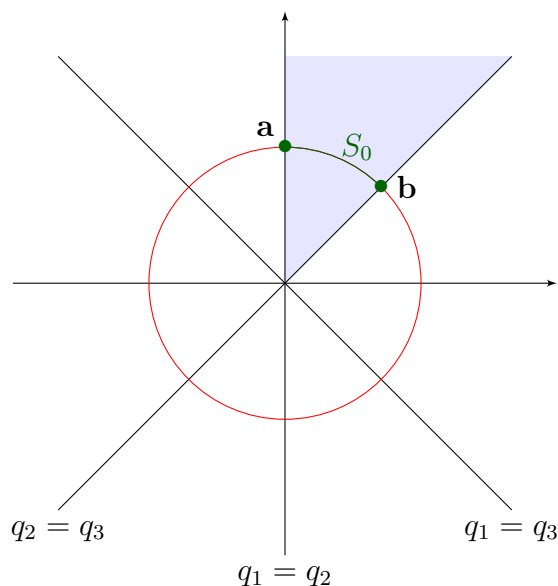
$$dt = r^{3/2} dt',$$

con questo nuovo tempo le equazioni differenziali si trasformano nelle equazioni

$$\frac{dr}{dt'} = r \mathbf{u}^\top \mathbf{s}, \quad \frac{d\mathbf{s}}{dt'} = -(\mathbf{u}^\top \mathbf{s})\mathbf{s} + M^{-1}\mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt'} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^\top \mathbf{s})\mathbf{u} + \nabla U(\mathbf{s}).$$

Dalle equazioni si vede che il nuovo campo vettoriale è regolare, e inoltre abbiamo che la varietà di collisione tripla è invariante per tale campo vettoriale: infatti partendo con condizione iniziale  $r = 0$  (ossia sulla varietà di collisione) allora l'unica soluzione della prima equazione è quella identicamente nulla.

Assumiamo senza perdere di generalità che  $q_1 \leq q_2 \leq q_3$ . Le precedenti condizioni individuano una porzione connessa di spazio che, intersecata con  $\mathcal{Q}$ , dà uno "spicchio" su questo piano. Detta  $S' = S \cap \mathcal{Q}$  la circonferenza di intersezione tra la sfera unitaria  $S$  e il piano  $\mathcal{Q}$ , abbiamo che lo spicchio e tale circonferenza si intersecano in un arco  $S_0$  di estremi  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . I vettori  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  per costruzione sono tali che  $a_1 = a_2$  e  $b_2 = b_3$ .



**Figura 3.5.** L'arco  $S_0$  sul piano  $\mathcal{Q}$ .

<sup>6</sup>Per ricavare queste equazioni si utilizza anche l'omogeneità del potenziale: il potenziale  $U$  è omogeneo di grado  $-1$ , per cui il suo gradiente è omogeneo di grado  $-2$ .

**Proposizione 3.29.** *Esiste un unico diffeomorfismo analitico reale  $\sigma : [-1, 1] \rightarrow S_0$  tale che  $\sigma(-1) = \mathbf{a}$ ,  $\sigma(1) = \mathbf{b}$  e tale che per ogni  $s \in [-1, 1]$*

$$\sigma'(s)M\sigma'(s) = \lambda^{-2}$$

per qualche  $\lambda > 0$ .

Nella dimostrazione della proposizione (che noi non vedremo) il diffeomorfismo viene costruito esplicitamente, e per i dettagli si rimanda a [3].

Introduciamo adesso tre coordinate scalari  $s$ ,  $v$  e  $w$ . La coordinata  $s$  è la coordinata reale  $s \in [-1, 1]$  introdotta grazie alla proposizione precedente; invece le altre due componenti sono definite come multipli opportuni dei coefficienti della decomposizione di  $\mathbf{u}$  in parte radiale e tangenziale, ossia  $v$  e  $w$  sono definiti dalla relazione

$$\mathbf{u} = vM\sigma(s) + w\lambda M\sigma'(s).$$

Posto  $V(s) = U(\sigma(s))$ , si verifica che

$$\frac{1}{2}(v^2 + w^2) - V(s) = rh,$$

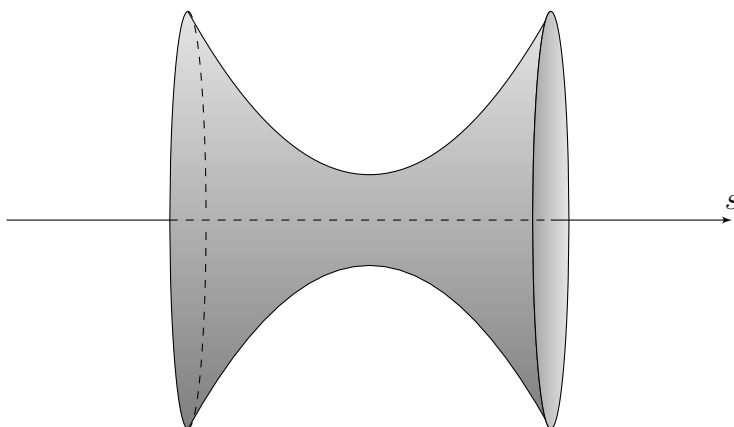
Con vari calcoli che omettiamo, si ottiene che il nuovo campo vettoriale è

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt'} &= rv, & \frac{ds}{dt'} &= w\lambda \\ \frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 + w^2 - V(s), & \frac{dw}{dt'} &= -\frac{1}{2}vw + \lambda V'(s). \end{aligned}$$

Vediamo come è fatta la varietà di collisione tripla dal punto di vista topologico. Se  $r = 0$  abbiamo

$$V(s) = \frac{1}{2}(v^2 + w^2),$$

che è una superficie di rotazione. Si vede che  $\lim_{s \rightarrow \pm 1} V(s) = +\infty$  e si può mostrare che  $V(s)$  ha un unico punto di minimo; la varietà di collisione è dunque quella mostrata nella Figura 3.6



**Figura 3.6.** La varietà di collisione tripla.

Così, topologicamente, la varietà di collisione è un cilindro senza il bordo delle due basi. Infatti il bordo delle basi non ci deve essere: per  $s = 1$  abbiamo la collisione doppia tra la seconda e la terza particella, mentre per  $s = -1$  abbiamo una collisione doppia tra la prima e la seconda particella. Si può dimostrare, ma non vedremo la dimostrazione, che nel caso della collisione doppia, ossia per  $s \rightarrow \pm 1$ , si ha

$$w \rightarrow \pm\infty \quad \text{e} \quad v \rightarrow v^* < \infty.$$

Queste due collisioni doppie si possono regolarizzare. Si introducono

$$W(s) = 2(1 - s^2)V(s) \quad \text{e} \quad \tilde{w} = (1 - s^2)W(s)^{-1/2}w,$$

e osserviamo che la funzione  $W(s)$  è definita anche in  $s = \pm 1$ . Le equazioni di moto si trasformano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt'} &= rv, & \frac{ds}{dt'} &= \frac{W(s)^{1/2}}{k(1 - s^2)}\tilde{w} \\ \frac{dv}{dt'} &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{W(s)}{2(1 - s^2)} \left( 1 - \frac{2\tilde{w}^2}{1 - s^2} \right) \\ \frac{d\tilde{w}}{dt'} &= -\frac{1}{2}v\tilde{w} + \frac{W(s)^{1/2}}{k(1 - s^2)} \left[ s \left( 1 - \frac{2\tilde{w}^2}{1 - s^2} \right) + \frac{1}{2}(1 - s^2 - \tilde{w}^2) \frac{W'(s)}{W(s)} \right] \end{aligned}$$

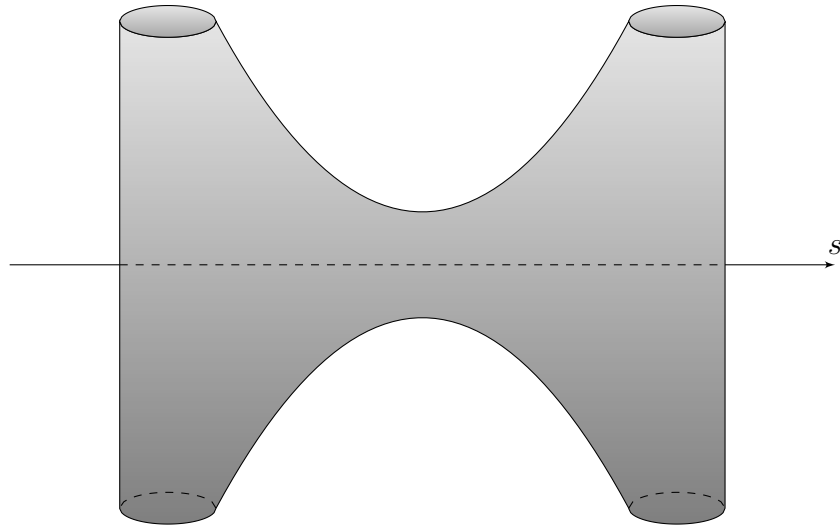
dove  $k$  è il più piccolo intero positivo tale che  $\cos 2k = \mathbf{a}^\top M \mathbf{b}$ . Cambiamo nuovamente il tempo introducendo un tempo  $\tau$  tale che

$$dt' = k(1 - s^2)W(s)^{-1/2} d\tau.$$

Le equazioni che si ottengono sono

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\tau} &= rv \frac{k(1 - s^2)}{W(s)^{1/2}}, \\ \frac{ds}{d\tau} &= \tilde{w}, \\ \frac{dv}{d\tau} &= \left\{ \frac{1}{2}v^2 - \frac{W(s)}{2(1 - s^2)} \left( 1 - \frac{2\tilde{w}^2}{1 - s^2} \right) \right\} \frac{k(1 - s^2)}{W(s)^{1/2}}, \\ \frac{d\tilde{w}}{d\tau} &= -\frac{1}{2}v\tilde{w} \frac{k(1 - s^2)}{W(s)^{1/2}} + \left[ s \left( 1 - \frac{2\tilde{w}^2}{1 - s^2} \right) + \frac{1}{2}(1 - s^2 - \tilde{w}^2) \frac{W'(s)}{W(s)} \right]. \end{aligned}$$

La varietà di collisione dopo la regolarizzazione delle soluzioni doppie è mostrata in Figura 3.7, ossia topologicamente è una sfera privata di quattro punti. Ci sono due soli punti di equilibrio del sistema dinamico su questa varietà, corrispondenti alle configurazioni centrali, e denotati con  $x_+$  e  $x_-$ . Vale che  $\sigma(\bar{s})$  è una configurazione centrale se e solo se  $V'(\bar{s}) = 0$ , e inoltre si può dimostrare che esiste un unico  $\bar{s}$  tale che  $V'(\bar{s}) = 0$ , e che questo punto è minimo di  $V(s)$ .



**Figura 3.7.** La varietà di collisione tripla regolarizzata.

Studiamo il flusso su questa varietà di collisione tripla regolarizzata: quello che si ottiene è un flusso di tipo gradiente rispetto a  $v$ , e questo implica che la  $v$  è una funzione crescente (non necessariamente in senso stretto). Alcune delle orbite che si ottengono sono le seguenti:

- (i) orbite costanti corrispondenti ai punti di equilibrio;
- (ii) orbite che arrivano in o “partono” da un punto di equilibrio;
- (iii) orbite che non contengono equilibri e che sono costrette dunque a salire sempre lungo la varietà.

Per poter regolarizzare la collisione tripla bisognerebbe poter collegare orbite che vanno verso di essa con orbite che hanno energia cinetica infinita, e questo non è possibile. Più precisamente si può mostrare il seguente risultato.

**Teorema 3.30.** *Le orbite che terminano in una collisione tripla sono asintotiche a  $x_-$ , mentre le orbite che iniziano in una collisione tripla sono asintotiche a  $x_+$ .*

In generale dunque le collisioni triple non sono regolarizzabili. Lo sono soltanto per particolari valori delle masse, per i quali l’orbita corrispondente arriva in un punto di equilibrio. Non diamo la dimostrazione del teorema, ma accenniamo a un fatto importante. Quello che viene fatto in [3] è lo studio del linearizzato del sistema nei due punti  $x_+$  e  $x_-$ . Quello che si trova è che la varietà stabile di  $x_-$  ha dimensione 2 e quella instabile ha dimensione 1: in particolare la varietà stabile è come un nastro che si avvolge in verso antiorario salendo sul ramo in basso a sinistra della varietà, per poi passare da  $x_-$  e avvolgersi in verso orario scendendo sul ramo in basso a destra della varietà di collisione. La situazione è esattamente scambiata per  $x_+$ .





# Capitolo 4

## Orbite periodiche

Richiamiamo la notazione che abbiamo introdotto per trattare il problema degli  $N$  corpi. Abbiamo le equazioni del moto

$$m\ddot{q} = U_q \quad \text{o equivalentemente} \quad \begin{cases} \dot{q} = v \\ \dot{v} = m^{-1}U_q \end{cases}$$

dove il potenziale  $U$  è dato da

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

Le soluzioni periodiche più semplici sono quelle le cui componenti non dipendono dal tempo, ossia gli equilibri. Gli eventuali equilibri devono soddisfare  $v = 0$  e  $U_q = 0$  per ogni  $q$ ; ma allora (usando il teorema di Eulero sulle funzioni omogenee) avremmo

$$0 = \sum_q q U_q = -U,$$

ma  $U > 0$  e questo è assurdo.

Dato che non esistono equilibri del sistema, ci chiediamo se esistono degli equilibri relativi, ossia equilibri in altri sistemi di riferimento. Siccome cerchiamo soluzioni periodiche bisognerà che questi sistemi di riferimento abbiano un moto periodico (per esempio una rotazione uniforme) uno rispetto all'altro. Lagrange si occupò del problema dei tre corpi e nel 1772 pubblicò una memoria in cui ha studiato gli equilibri relativi del problema utilizzando una riduzione del problema grazie all'introduzione delle distanze mutue, e questo è ciò di cui adesso ci andremo ad occupare.

### 4.1 Le soluzioni di Lagrange

Supponiamo di avere 3 corpi che si muovono nel piano e cerchiamo soluzioni corrispondenti a particelle che si muovono su traiettorie circolari. Indichiamo le coordinate dei corpi con la scrittura

$$(q_{2k-1}, q_{2k}) \quad \text{con } k = 1, 2, 3,$$

mentre i loro momenti lineari con la scrittura  $(p_{2k-1}, p_{2k})$ . Così l'energia cinetica e quella potenziale avranno le espressioni

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k^{-1} (p_{2k-1}^2 + p_{2k}^2) \quad \text{e} \quad U = \sum_{k < l} \frac{m_k m_l}{r_{kl}}.$$

Mettiamoci adesso in un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare costante  $\omega \neq 0$  rispetto al precedente. I due riferimenti hanno la stessa origine. La velocità  $\omega$  è da determinare in modo che nel nuovo riferimento le tre particelle siano ferme. In formule, per  $k = 1, 2, 3$  introduciamo le nuove coordinate

$$x_{2k-1} = cq_{2k-1} + sq_{2k} \quad \text{e} \quad x_{2k} = -sq_{2k-1} + cq_{2k},$$

dove  $c = \cos \omega t$  e  $s = \sin \omega t$ . Vogliamo completare la trasformazione puntuale scritta a una trasformazione canonica  $\Psi$ . Per farlo scegliamo la funzione generatrice

$$w = w(\mathbf{q}, \mathbf{y}, t) = \sum_{k=1}^3 [(cq_{2k-1} + sq_{2k}) y_{2k-1} + (-sq_{2k-1} + cq_{2k}) y_{2k}],$$

e le relazioni di trasformazione saranno

$$p_j = w_{q_j} \quad \text{e} \quad x_j = w_{y_j}.$$

Verifichiamo che  $w$  soddisfa la condizione di non degenerazione: la matrice delle derivate seconde

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{q} \partial \mathbf{y}} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & R_{-\omega t} & & \\ & 0 & & & R_{-\omega t} & \\ & & & & & R_{-\omega t} \\ \hline R_{\omega t} & & & & & \\ & R_{\omega t} & & & & \\ & & R_{\omega t} & & 0 & \end{array} \right)$$

ha determinante 1 e quindi la condizione è soddisfatta. Se indichiamo con  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  l'hamiltoniana nelle vecchie variabili e con  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  quella nelle nuove, dalla teoria delle trasformazioni canoniche sappiamo che

$$F = E \circ \Psi^{-1} + w_t,$$

dove

$$w_t = \omega \sum_{k=1}^3 (x_{2k} y_{2k-1} - x_{2k-1} y_{2k}).$$

Le nuove equazioni di Hamilton, cioè le equazioni di Hamilton per  $F$ , sono

$$\begin{cases} \dot{y}_{2k-1} = -E_{x_{2k-1}} + \omega y_{2k} \\ \dot{y}_{2k} = -E_{x_{2k}} - \omega y_{2k-1} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x}_{2k-1} = E_{y_{2k-1}} + \omega x_{2k} \\ \dot{x}_{2k} = E_{y_{2k}} - \omega x_{2k-1} \end{cases}. \quad (4.1)$$

Dato che ci serviranno, calcoliamo le derivate di  $E$  che ci occorrono:

$$E_{x_k} = -U_{x_k}, \quad E_{y_{2k-1}} = m_k^{-1}y_{2k-1} \quad \text{e} \quad E_{y_{2k}} = m_k^{-1}y_{2k}.$$

Gli equilibri del sistema di equazioni di Hamilton (4.1) soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} U_{x_{2k-1}} + \omega y_{2k} = 0 \\ U_{x_{2k}} - \omega y_{2k-1} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} m_k^{-1}y_{2k-1} + \omega x_{2k} = 0 \\ m_k^{-1}y_{2k} - \omega x_{2k-1} = 0 \end{cases}.$$

**Lemma 4.1.** *Le soluzioni di equilibrio nel sistema rotante sono tali che il centro di massa dei tre corpi rimane fisso nell'origine.*

*Dimostrazione.* Eliminando  $y_k$  dalle precedenti equazioni si ottengono le due equazioni

$$m_k \omega^2 x_{2k-1} = -U_{x_{2k-1}} \quad \text{e} \quad m_k \omega^2 x_{2k} = -U_{x_{2k}}. \quad (4.2)$$

Osserviamo inoltre che  $\sum_{k=1}^3 U_{q_{2k-1}} = \sum_{k=1}^3 U_{q_{2k}} = 0$ , in quanto queste sono le due componenti della risultante delle forze interne (che è nulla). Così nelle nuove variabili

$$U_{x_{2k}} = -sU_{q_{2k-1}} + cU_{q_{2k}} \quad \text{e} \quad U_{x_{2k-1}} = cU_{q_{2k-1}} + sU_{q_{2k}},$$

e dunque si ha

$$\omega^2 \sum_{k=1}^3 m_k x_{2k} = - \sum_{k=1}^3 U_{x_{2k}} = s \sum_{k=1}^3 U_{q_{2k-1}} - c \sum_{k=1}^3 U_{q_{2k}} = 0,$$

e analogamente  $\sum_{k=1}^3 m_k x_{2k-1} = 0$ . Questo ci dice che il centro di massa è fisso nell'origine del sistema di riferimento.  $\square$

**Osservazione 4.2.** È da notare che finora abbiamo sempre assunto come ipotesi che il centro di massa sia fisso nell'origine, mentre adesso è una conseguenza delle assunzioni iniziali sulla periodicità.

I tre corpi formano in generale un triangolo (benché possano essere anche tutti allineati): potrebbero formare un triangolo equilatero, e studieremo dopo questo caso, ma mostriamo adesso che se la configurazione non è triangolare equilatera allora i tre corpi devono essere allineati.

**Lemma 4.3.** *Se il triangolo formato dai tre corpi non è equilatero allora i tre corpi sono collineari.*

*Dimostrazione.* Se il triangolo non è equilatero possiamo assumere ad esempio che  $r_{13} \neq r_{23}$ . Con la numerazione delle particelle appena introdotta possiamo anche assumere che la particella 3 giaccia sempre sull'asse  $x$ , ossia che  $x_6 = 0$ : dato che cerchiamo soluzioni circolari con velocità angolare  $\omega$ , questo può essere fatto aggiungendo una fase  $\varphi$  ad  $\omega t$  in modo che all'istante iniziale la particella  $P_3$  giaccia sull'asse  $x$ . Si ha quindi

$$U_{x_6} = \frac{m_1 m_3}{r_{13}^3} (x_2 - x_6) + \frac{m_2 m_3}{r_{23}^3} (x_4 - x_6),$$

e del resto questa derivata deve essere nulla in quanto  $U_{x_6} = 0$  è una delle condizioni necessarie per avere un equilibrio. Dunque si ottiene

$$m_1x_2r_{13}^{-3} + m_2x_4r_{23}^{-3} = 0. \quad (4.3)$$

Abbiamo  $m_1x_2 + m_2x_4 + m_3x_6 = 0$  e  $x_6 = 0$ , da cui  $m_1x_2(r_{13}^{-3} - r_{23}^{-3}) = 0$ , da cui  $x_2 = 0$ , e questo a sua volta implica che  $x_4 = 0$ . Dunque i tre corpi giacciono sempre sull'asse  $x$ , ossia sono allineati.  $\square$

Vediamo dunque di studiare i due soli casi, che a questo punto sono quello con la configurazione equilatera e quello collineare.

**Caso equilatero.** Sia dunque  $r = r_{12} = r_{23} = r_{13}$ . La prima relazione di (4.2) dà

$$m_k\omega^2x_{2k-1} = -U_{x_{2k-1}} = -\frac{m_k}{r^3} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^3 m_l(x_{2l-1} - x_{2k-1}) = -\frac{m_k}{r^3} \sum_{l=1}^3 m_l(x_{2l-1} - x_{2k-1})$$

ossia

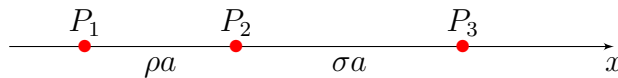
$$\omega^2x_{2k-1} = r^{-3} \sum_{l=1}^3 m_l(x_{2k-1} - x_{2l-1}) = r^{-3} \sum_{l=1}^3 m_lx_{2k-1} = r^{-3}Mx_{2k-1},$$

dove  $M = m_1 + m_2 + m_3$  è la massa complessiva dei tre corpi. I tre corpi non sono allineati e quindi gli  $x_{2k-1}$  non sono tutti nulli, e allora

$$\omega = \pm\sqrt{Mr^{-3}}.$$

Questo ci dice che sono possibili infinite configurazioni equilatera, e che queste configurazioni hanno velocità angolare tanto più bassa quanto più sono ampie. Inoltre non è detto che il lato del triangolo equilatero formato dai tre corpi sia sempre lo stesso, anzi questo può variare purché i tre corpi disegnano sempre un triangolo equilatero.

**Caso collineare.** In questo caso si può assumere che  $x_{2k} = 0$  ( $k = 1, 2, 3$ ) per tutti i tempi. Sia  $a$  la distanza tra  $P_1$  e  $P_3$ , e  $\rho a$  e  $\sigma a$  come in Figura 4.1, con  $\rho + \sigma = 1$ .



**Figura 4.1.** Il caso collineare.

Sulla base di questi documenti il fabbricante redige la dichiarazione di conformità UE, che deve accompagnare ogni prodotto, o in formato cartaceo o con un rimando ad unsito

web nelle istruzioni d'uso, dove poterla consultare. Si ha

$$\begin{aligned} m_1\omega^2x_1 &= -U_{x_1} = -m_1\left(\frac{m_2}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{13}^2}\right), \\ m_2\omega^2x_1 &= -U_{x_3} = -m_2\left(-\frac{m_1}{r_{12}^2} + \frac{m_3}{r_{23}^2}\right), \\ m_3\omega^2x_1 &= -U_{x_5} = m_3\left(\frac{m_1}{r_{13}^2} + \frac{m_2}{r_{23}^2}\right). \end{aligned}$$

Il fatto che il centro di massa sia fermo nell'origine ci dice che

$$m_1x_1 + m_2x_3 + m_3x_5 = 0,$$

e manipolando tale equazioni si ottengono facilmente le due equazioni

$$Mx_1 + m_2\rho a + m_3a = 0 \quad \text{e} \quad Mx_5 - m_2\sigma a - m_1a = 0.$$

Da qui si possono ricavare  $x_1$  e  $x_5$  da sostituire poi nelle tre equazioni precedenti; quello che si ottiene sono le equazioni

$$\begin{aligned} m_2\rho^{-2} + m_3 &= -a^2\omega^2x_1 = \omega^2a^3M^{-1}(m_2\rho + m_3), \\ m_2\sigma^{-2} + m_1 &= a^2\omega^2x_5 = \omega^2a^3M^{-1}(m_2\sigma + m_1). \end{aligned}$$

Da queste si ricava che

$$M^{-1}\omega^2a^3 = \frac{m_2\rho^{-2} + m_3}{m_2\rho + m_3} = \frac{m_2(1-\rho)^{-2} + m_1}{m_2(1-\rho) + m_1}.$$

Cerchiamo dunque gli zeri di  $f(\rho)$ , ossia della funzione differenza tra le due funzioni al secondo e terzo membro nell'intervallo  $0 < \rho < 1$ : si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 1^-} f(\rho) = -\infty,$$

e inoltre si può mostrare che  $f'(\rho) < 0$ ; queste condizioni implicano l'esistenza di un unico  $\bar{\rho} \in (0, 1)$  tale che  $f(\bar{\rho}) = 0$ . Tali soluzioni collineari sono dette anche *soluzioni di Eulero*, per il fatto che Eulero stesso qualche anno prima le aveva già trovate.

### 4.1.1 Generalizzazione a $N$ corpi

Vogliamo generalizzare la costruzione fatta al problema degli  $N$  corpi piano: cerchiamo dunque soluzioni piane periodiche e tali che la configurazione degli  $N$  corpi resti simile a se stessa durante il moto.

Siano  $(x_k, y_k)$  lo coordinate di  $P_k$ , il  $k$ -esimo corpo. Identifichiamo il piano del moto con il piano complesso e poniamo

$$x_k + iy_k = z_k = \zeta_k q,$$

con  $\zeta_k \in \mathbb{C}$  costanti e  $q$  è una funzione complessa della variabile reale  $t$ . Le distanze sono  $r_{kl} = |z_k - z_l| = |q||\zeta_k - \zeta_l|$  e le equazioni del moto sono

$$\ddot{z}_k = \sum_{l \neq k} m_l \frac{z_l - z_k}{|z_l - z_k|^3} = \sum_{l \neq k} m_l \frac{z_l - z_k}{r_{kl}^3}.$$

Per  $q \neq 0$  queste si riscrivono come

$$\zeta_k \ddot{q} = q|q|^{-3} \sum_{l \neq k} \frac{\zeta_l - \zeta_k}{|\zeta_l - \zeta_k|^3}.$$

Gli  $\zeta_k$  non sono tutti nulli (in quanto escludiamo collisioni totali), l'espressione

$$c = \ddot{q} q^{1/2} \bar{q}^{3/2} \tag{4.4}$$

non dipende dal tempo, e inoltre

$$\zeta_k c = \sum_{l \neq k} m_l \frac{\zeta_l - \zeta_k}{|\zeta_l - \zeta_k|^3}. \tag{4.5}$$

A questo punto il problema è ridotto a risolvere l'equazione differenziale (4.4), che è indipendente dal numero di corpi, e il sistema di equazioni algebrice (4.5).

- (i) Nel caso  $N = 2$  dalla prima equazione abbiamo che  $q(t)$  è la soluzione del problema dei due corpi. Dato che  $m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 = 0$  si ha  $\zeta_1 = m_2 \zeta$  e  $\zeta_2 = -m_1 \zeta$  per un qualche  $\zeta \neq 0$ , e così dalla (4.5) si ottiene

$$c = -(m_1 + m_2)^{-2} |\zeta|^{-3},$$

ossia che  $c$  è una costante reale negativa.

- (ii) Nel caso  $N = 3$  possiamo le soluzioni con  $c$  reale e negativa ci sono già note. Infatti il sistema di equazioni precedente corrisponde alle (4.2) con  $\omega^2 = -c$  e  $x_{2k-1} + ix_{2k} = \zeta_k$ , e dunque porta a soluzioni  $\zeta_1, \zeta_2$  e  $\zeta_3$  vertici di un triangolo equilatero o collineari.

## 4.2 Metodi di continuazione

Un'osservazione sulla notazione che adotteremo di seguito. Avremo variabili definite su varietà (che potrebbero anche essere  $\mathbb{R}^n$ ) ma eviteremo il grassetto per non appesantire eccessivamente la scrittura. Consideriamo un sistema differenziale autonomo

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

definito su una varietà  $M$  e dipendente da un parametro  $\mu$ . Assumiamo anche che tale sistema abbia una soluzione periodica  $p(t)$  di periodo  $T > 0$  per il parametro  $\mu = 0$ . Quello

che vogliamo fare è cercare di capire quando, per piccoli valori di  $\mu$  (ossia variandolo di poco dal valore  $\mu = 0$ ), si hanno ancora orbite periodiche “vicine” a  $p(t)$ .

Sia  $\Phi^t(x, \mu)$  il flusso del precedente sistema. Dato che il campo vettoriale del sistema è autonomo abbiamo la validità della legge di semigrupp

$$\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t.$$

Il fatto che l’orbita  $p(t)$  sia periodica ci dice che  $\Phi^T(p, 0) = p$  con  $p \in p(t)$  un qualsiasi punto dell’orbita periodica. Cerchiamo un’orbita periodica del tipo

$$\Phi^T(x, \mu) = x$$

tentando di invertire la relazione precedente. Per poter applicare il teorema delle funzioni implicite vorremmo che  $d\Phi_p^T - I$  abbia determinante non nullo; in generale questo non si verifica.

**Lemma 4.4.** *La mappa  $d\Phi_p^T - I$  è singolare.*

*Dimostrazione.* Iniziamo derivando rispetto ad  $s$  la relazione di semigrupp

$$\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{t+s}.$$

Derivando il primo membro si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Phi^t(\Phi^s(x, \mu), \mu) &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi^t(\Phi^s(x, \mu), \mu) \frac{\partial}{\partial s} \Phi^s(x, \mu) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \Phi^t(\Phi^s(x, \mu), \mu) f(\Phi^s(x, \mu), \mu) = [d\Phi^t f](\Phi^s(x, \mu), \mu), \end{aligned}$$

mentre derivando il secondo

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi^s(\Phi^t(x, \mu), \mu) = f(\Phi^{s+t}(x, \mu), \mu).$$

Valutando l’uguaglianza per  $\mu = 0$ ,  $s = 0$  e  $t = T$  si ha

$$[d\Phi^T f](\Phi^0(x, 0), 0) = f(\Phi^T(x, 0), 0);$$

inoltre se  $x = p$  un punto qualsiasi dell’orbita periodica, allora  $\Phi^0(p, 0) = p$  e dunque si ottiene

$$[d\Phi^T f](p, 0) = f(p, 0).$$

Ciò si può riscrivere come  $(d\Phi_p^T - I)f(p, 0) = 0$  e dunque questo dimostra che  $d\Phi_p^T$  ha autovalore 1.  $\square$

Osserviamo che nel corso della dimostrazione precedente abbiamo dimostrato che  $d\Phi_p^T$  ha autovalore 1 e che un autovettore per l’autovalore 1 è

$$f(p, 0),$$

ossia il vettore del campo vettoriale nel punto  $p$  dell’orbita periodica.

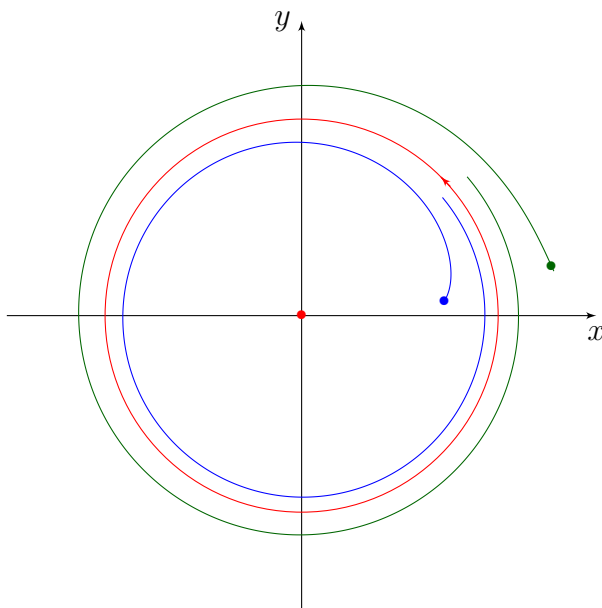
**Esempio 4.5.** Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 + \mu)y + (1 - x^2 - y^2)x \\ \dot{y} = -(1 + \mu)x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}.$$

Passiamo a coordinate polari:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{\rho}(x\dot{x} + y\dot{y}) = \rho(1 - \rho^2) \quad \text{e} \quad \dot{\vartheta} = \frac{1}{\rho}(x\dot{y} - y\dot{x}) = -(1 + \mu).$$

Dunque per  $\mu = 0$  abbiamo un'orbita periodica circolare di raggio 1 con periodo  $T = 2\pi$ , e le orbite con condizioni iniziali non su questa orbita e non nell'origine (che è un equilibrio del sistema) hanno l'orbita circolare come ciclo limite. Il ritratto di fase è mostrato nella Figura 4.2.



**Figura 4.2.** Ritratto di fase del sistema.

Per  $\mu \neq 0$  abbiamo ancora un'orbita periodica circolare ma di periodo

$$T_\mu = \frac{2\pi}{1 + \mu},$$

e dunque l'orbita ottenuta per  $\mu = 0$  non può essere continuata ad un'orbita con lo stesso periodo della precedente.

Abbiamo visto che in generale non si trovano orbite periodiche con periodo  $T$  vicino a  $p(t)$ , dunque passiamo a cercare orbite periodiche le cui condizioni iniziali  $x$  soddisfino l'equazione

$$\Phi^{\tau(x,\mu)}(x, \mu) = x.$$

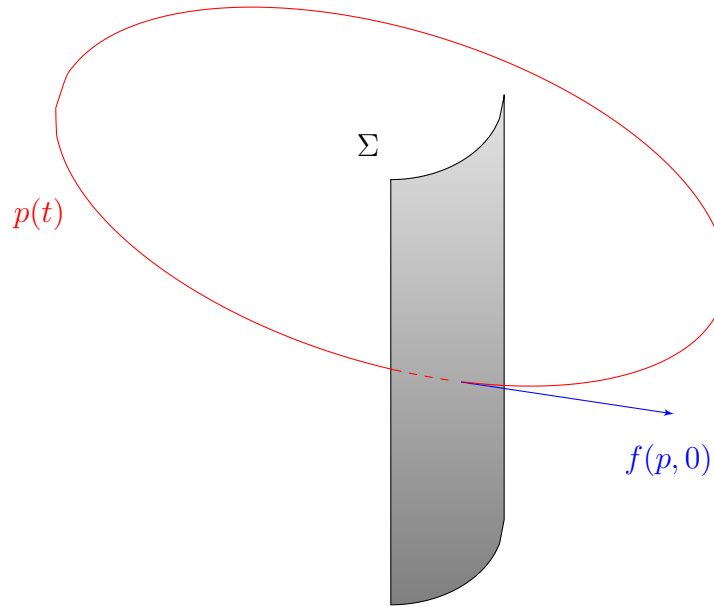


Sia  $\Sigma$  una sottovarietà di  $M$  di codimensione 1 e trasversale al flusso in un punto  $p$  dell'orbita periodica. Definiamo la *mappa del primo ritorno*  $\Psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  come

$$\Psi(x, \mu) = \Phi^{\tau(x, \mu)}(x, \mu),$$

con  $\tau(x, \mu)$  il tempo del primo ritorno su  $\Sigma$ . Ovviamente vale che  $\tau(p, 0) = T$ .

**Definizione 4.6.** Le mappe  $\Psi$  (che dipendono dalla varietà  $\Sigma$ ) sono dette *sezioni di Poincaré*.



**Figura 4.3.** Una sezione di Poincaré.

**Proposizione 4.7.** *Gli autovalori di  $d\Psi_p$  non dipendono dalla sezione.*

*Dimostrazione.* Siano  $\Psi_1$  e  $\Psi_2$  due mappe di sezione, relative alle sottovarietà  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Mostriamo che esiste  $\chi$  un diffeomorfismo locale da  $\Sigma_1$  a  $\Sigma_2$  tale che  $\chi \circ \Psi_1 = \Psi_2 \circ \chi$ . Supponendo che  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$ , il diffeomorfismo si costruisce semplicemente seguendo il flusso integrale del sistema: da  $\Sigma_1$  si applica la mappa di primo ritorno e poi si segue il flusso; oppure da  $\Sigma_1$  si segue il flusso fino a  $\Sigma_2$  e poi si applica la mappa del primo ritorno.  $\square$

Adesso sarà chiara l'importanza delle sezioni di Poincaré. Definiamo

$$\Phi = d\Phi_p^T : T_p M \rightarrow T_p M$$

e mostriamo il seguente risultato.

**Proposizione 4.8.** *Per  $\mu = 0$  si ha*

$$\det(\lambda I - \Phi) = (\lambda - 1) \det(\lambda I - d\Psi_p).$$

*Dimostrazione.* Che compaia  $\lambda - 1$  lo sappiamo già in quanto 1 è un autovalore di  $\Phi$ . Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x, \mu) &= \frac{\partial}{\partial x}(\Phi^{\tau(x, \mu)}(x, \mu)) = \\ &= \frac{\partial\Phi^{\tau(x, \mu)}}{\partial x}(x, \mu) + \frac{\partial\Phi^{\tau(x, \mu)}}{\partial t}(x, \mu)\frac{\partial\tau}{\partial x}(x, \mu) = \\ &= \frac{\partial\Phi^{\tau(x, \mu)}}{\partial x}(x, \mu) + f(\Phi^{\tau(x, \mu)}, \mu)\frac{\partial\tau}{\partial x}(x, \mu).\end{aligned}$$

Valutando la relazione precedente in  $x = p$  e  $\mu = 0$  si ottiene

$$d\Psi(p, 0) = d\Phi^T(p, 0) + f(\Phi^T(p, 0), 0) d\tau(p, 0),$$

ossia  $d\Psi_p = d\Phi_p^T + f(p, 0)d\tau_p$ . Per ogni  $\xi \in T_p\Sigma$  si ha dunque

$$(d\Psi_p)\xi = (d\Phi_p^T)\xi + f(p, 0)(d\tau_p)\xi = \Phi\xi - f(p, 0)l(\xi),$$

dove  $l(\xi) = -(d\tau_p)\xi$ . Decomponiamo ora  $T_pM = \langle f(p, 0) \rangle \oplus T_p\Sigma$ : nella base scritta a secondo membro la matrice che rappresenta l'operatore  $\Phi$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & d\Psi_p \end{pmatrix},$$

e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Definizione 4.9.** Gli autovalori di  $\Phi$  sono detti *moltiplicatori di Floquet*.

**Teorema 4.10.** *Assumiamo che il sistema*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

*abbia per  $\mu = 0$  la soluzione periodica  $p(t)$  di periodo  $T > 0$ . Se 1 è moltiplicatore di Floquet semplice di questa soluzione periodica, allora per  $\mu$  piccolo esiste un'unica soluzione periodica  $p(t, \mu)$  con periodo  $T(\mu)$  vicino a  $T$ . Inoltre puntualmente  $p(t, \mu) \rightarrow p(t)$  e  $T(\mu) \rightarrow T$  per  $\mu \rightarrow 0$ .*

*Dimostrazione.* Le ipotesi ci consentono di applicare il teorema delle funzioni implicite.  $\square$

**Esempio 4.11.** Consideriamo l'equazione

$$\ddot{x} + \sin x = \mu F(t, x, \dot{x}),$$

con  $F$  funzione periodica in  $t$  di periodo  $T > 0$ . Il sistema non è autonomo, dunque per renderlo tale utilizziamo un procedimento standard: introduciamo nuove variabili  $x_0, x_1$  e  $x_2$  e scriviamo l'equazione precedente come

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = 1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 + \mu F(x_0, x_1, x_2) \end{cases}.$$

L'iperpiano  $\{x_0 = 0\}$  ci dà una sezione trasversale al flusso del sistema. Per  $\mu = 0$  si ha

$$\begin{cases} x_0 = t \pmod{T} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0 = t \pmod{T} \\ x_1 = \pi \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

che sono due orbite periodiche di periodo  $T$  entrambe. Vogliamo calcolare  $\Phi = d\Phi_p^T$ , dove  $\Phi^T$  è il flusso integrale del sistema, soluzione dell'equazione alle variazioni

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi^t}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi^t) \frac{\partial \Phi^t}{\partial x}.$$

Indicando con  $(y_0, y_1, y_2)$  l'incognita  $\frac{\partial \Phi^t}{\partial x}$ , per  $\mu = 0$  l'equazione precedente diventa

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Nel caso delle orbite periodiche si ha dunque

$$\dot{y}_0 = 0, \quad \dot{y}_1 = y_2 \quad \text{e} \quad \dot{y}_2 = \mp y_1,$$

che sono due sistemi lineari con matrice rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per risolverlo, essendo lineare, è sufficiente costruire l'esponenziale delle due matrici precedenti, e dunque le matrici che rappresentano  $d\Phi_p^t$  nel caso delle due orbite sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Per  $t = T$  gli autovalori delle due matrici sono rispettivamente

$$1, e^{\pm iT} \quad \text{e} \quad 1, e^{\pm T}.$$

Dunque il metodo di continuazione funziona se l'autovalore 1 è semplice, ossia se  $T \neq 2k\pi$  nel primo caso e se  $T \neq 0$  nel secondo.

In certi casi è già sicuro che l'autovalore 1 non sia semplice: la presenza di integrali primi, infatti, porta a degli altri autovalori 1 nella mappa  $\Phi$ , e dunque ad un'ulteriore degenerazione (oltre a quella lungo la direzione del campo  $f(p, 0)$ ). Siano  $\{G_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, r}$  degli integrali primi indipendenti: integrali primi significa che per ogni  $t$

$$G_\alpha(\Phi^t(x)) = G_\alpha(x),$$

mentre l'indipendenza si traduce nel fatto che i gradienti  $dG_\alpha$  sono linearmente indipendenti, e noi richiediamo ciò non globalmente ma in un intorno della soluzione periodica  $p(t)$ .

**Teorema 4.12.** *Se il sistema  $\dot{x} = f(x, \mu)$  ha  $r < n$  integrali primi  $G_\alpha(x)$  indipendenti intorno a una soluzione periodica  $p(t)$ , allora  $r + 1$  moltiplicatori di Floquet sono 1. I rimanenti moltiplicatori sono gli autovalori di  $d\Psi_p$ , dove  $\Psi$  è una mappa di una sezione  $\sigma \subseteq S$ , dove  $S$  è una superficie di livello di  $(G_\alpha(x))_{\alpha=1, \dots, r}$ . In altri termini abbiamo*

$$\det(\lambda I - \Phi) = (\lambda - 1)^{r+1} \det(\lambda I - d\Psi_p).$$

*Dimostrazione.* Definiamo la varietà di livello

$$S_c = \{x \in M : G_\alpha(x) = c_\alpha \forall \alpha\}.$$

Se  $x \in S_c$  abbiamo una descrizione dello spazio tangente a  $S_c$  in  $x$  data da

$$T_x S_c = \{\xi \in T_x M : dG_\alpha(\xi) = 0 \forall \alpha\}.$$

Se  $\Phi = d\Phi_p^T$  si ha  $dG_\alpha(\Phi\xi) = dG_\alpha(\xi)$  per ogni  $\xi \in T_p M$ . Da questa relazione segue che  $\Phi(T_p S_c) = T_p S_c$ : infatti  $\xi \in T_p S_c$  se e solo se  $dG_\alpha(\xi) = 0$  per ogni  $\alpha$ , se e solo se  $dG_\alpha(\Phi\xi) = 0$  per ogni  $\alpha$  e questo se e solo se  $\Phi\xi \in T_p S_c$ .

Procediamo adesso al calcolo degli autovalori di  $\Phi$ . Siano  $x_1, \dots, x_n$  delle coordinate in un intorno di  $p$  e tali che  $G_\alpha(x) = x_\alpha$  per  $\alpha = 1, \dots, r$ . Decomponiamo il vettore  $x = (x', x'')$  dove

$$x' = (x_1, \dots, x_r) \quad \text{e} \quad x'' = (x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Per la scelta delle coordinate, il flusso  $\Phi^t$  è del tipo

$$\Phi^t \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \Phi''(x) \end{pmatrix},$$

e dunque  $\Phi = d\Phi_p^T$  è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & \widehat{\Phi} \end{pmatrix},$$

dove  $\widehat{\Phi} = \Phi|_{T_p S_c}$ . Restringiamoci a  $S_c$ , così  $\widehat{\Phi}f(p) = f(p)$  e allora decomponiamo

$$T_p S_c = \langle f(p) \rangle \oplus T_p \sigma,$$

dove  $\sigma \subseteq S_c$  è una sezione di Poincaré. Grazie a tutti i risultati ottenuti in precedenza abbiamo che la matrice di  $\widehat{\Phi}$  è data da

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & d\Psi_p \end{pmatrix},$$

e questo completa la dimostrazione. □

**Teorema 4.13.** *Sia*

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

*un sistema di equazioni differenziali autonome con  $r$  integrali primi  $G_\alpha(x, \mu)$  indipendenti vicino all'orbita periodica  $p(t)$  di periodo  $T$ . Supponiamo che  $p(t)$  abbia esattamente  $r + 1$  moltiplicatori di Floquet uguali a 1. Allora per  $\mu$  sufficientemente piccolo esiste un'unica famiglia a  $r$  parametri  $p(t, c, \mu)$  di orbite periodiche con periodo  $T(c, \mu)$  vicino a  $T$ , che stanno sulle superfici  $S_c$ , ovvero  $G_\alpha(p(t, c, \mu), \mu) = c_\alpha$  per ogni  $\alpha$ . Inoltre  $p(t, c, \mu) \rightarrow p(t)$  puntualmente e  $T(c, \mu) \rightarrow T$  per  $c, \mu \rightarrow 0$ . Infine le orbite  $p(t, c, \mu)$  sono regolari quanto  $f$  e  $G_\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Introduciamo delle coordinate  $x_1, \dots, x_n$  in un intorno di un punto  $p$  dell'orbita periodica tali che  $G_\alpha(x, \mu) = x_\alpha$  per  $\alpha = 1, \dots, r$  e  $\Sigma = \{x_n = 0\}$  sia una sezione trasversale al flusso. Scriviamo la mappa di sezione  $\Psi$  in queste coordinate ponendo

$$\Psi \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \Phi''(x', x'', \mu) \end{pmatrix},$$

dove stavolta  $x'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$ . Cerchiamo punti fissi di  $\Psi$ , che ci daranno orbite periodiche: tali punti verificano  $\Psi''(x', x'', \mu) = x''$ . Con questa scelta abbiamo che  $d\Psi_p$  si rappresenta con

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & \frac{\partial \Psi''}{\partial x''} \end{pmatrix}.$$

Le ipotesi ci dicono che  $\frac{\partial \Psi''}{\partial x''}$  non ha più autovalori 1: infatti la matrice che rappresenta  $\Phi$  avrebbe un autovalore 1 in alto a sinistra (dato dalla direzione normale alla sezione) e poi ci sarebbe la matrice precedente che ha  $r$  autovalori 1 dati dalla matrice identità  $I_r$ . Così

$$\det \left( \frac{\partial \Psi''}{\partial x''} - I_{n-r-1} \right) \neq 0,$$

e allora per il teorema delle funzioni implicite esiste un'unica soluzione  $(x', \mu) \rightarrow x''(x', \mu)$  che soddisfa l'equazione di punto fisso per  $\Psi''$ . Dunque  $x' = c$ ,  $x'' = x''(x', \mu)$  e  $x_n = 0$  sono le condizioni iniziali per un'orbita periodica che soddisfa le condizioni scritte nell'enunciato.  $\square$

### 4.3 Orbite periodiche nel problema dei tre corpi

Consideriamo il problema dei tre corpi ristretto circolare piano: le equazioni sono

$$\ddot{\mathbf{x}}_1 = m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{x}}_2 = m_1 \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3},$$

con  $P_1$  e  $P_2$  che si muovono su orbite circolari in modo che il loro centro di massa sia fermo nell'origine. Osserviamo che abbiamo assunto per comodità  $G = 1$ ; assumiamo inoltre che la somma delle masse sia 1 e scriviamo

$$m_1 = 1 - \mu \quad \text{e} \quad m_2 = \mu$$

per un certo  $\mu$  con  $0 \leq \mu \leq 1$ . Per  $k = 1, 2$  introduciamo la notazione complessa

$$z_k = x_k^1 + ix_k^2,$$

e sia poi  $\zeta = z_2 - z_1$  la posizione relativa, così le equazioni del moto sono

$$\ddot{\zeta} = -\frac{\zeta}{|\zeta|^3}.$$

Il moto dei due corpi (che chiameremo anche *binaria*) è perfettamente noto e assumiamo sia circolare, ossia assumiamo che  $\zeta = ae^{i\alpha t}$  con  $a \in \mathbb{C}$ . Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene la relazione tra  $a$  e  $\alpha$

$$\alpha^2|a|^3 = 1,$$

che sostanzialmente non esprime altro che la terza legge di Keplero. Per  $k = 1, 2$  possiamo scrivere anche

$$z_k = w_k e^{i\alpha t},$$

con  $w_1 = -\mu a$  e  $w_2 = (1 - \mu)a$ : quella appena scritta è la rappresentazione del moto nel sistema di riferimento che ruota con la binaria.

Il problema è di determinare il moto del terzo corpo, che scriviamo come  $z_3 = we^{i\alpha t}$ . Per  $w$  si ricava l'equazione di moto

$$\ddot{w} + 2i\alpha\dot{w} - \alpha^2 w = \frac{\mu(w_2 - w)}{|w_2 - w|^3} + (1 - \mu)\frac{w_1 - w}{|w_1 - w|^3}. \quad (4.6)$$

Studiamo dunque il problema

$$\ddot{w} + 2i\alpha\dot{w} - \alpha^2 w + \frac{w}{|w|^3} = F(w, \bar{w}, \mu),$$

dove il secondo membro è una perturbazione: infatti per  $\mu = 0$  si ha  $F(w, \bar{w}, 0) = 0$ , e questo è un problema di Keplero in un sistema di riferimento rotante. Cerchiamo orbite periodiche *del primo tipo*, ossia orbite ottenute per continuazione a partire da orbite circolari.

**Osservazione 4.14.** Precisiamo che tutto quello che faremo e che troveremo vale nel riferimento rotante, dunque le soluzioni periodiche che troveremo in generale non lo saranno nel sistema di riferimento inerziale.

Vediamo cosa accade per  $\mu = 0$ : abbiamo già detto che il problema è un problema di Keplero in un riferimento rotante e qui cerchiamo soluzioni circolari del tipo

$$w = re^{i\beta t} \text{ con } \beta \neq 0.$$

Tale condizione su  $\beta$  la imponiamo per evitare orbite stazionarie e per ottenere vere orbite circolari. Diamo adesso altre due condizioni su  $\beta$ :

- (i) Esattamente come prima si può ottenere la relazione  $(\beta + \alpha)^2 r^3 = 1$ , in quanto  $\beta + \alpha$  è il moto medio di  $P_3$  (nel sistema inerziale). Questa condizione implica per esempio che  $\beta \neq -\alpha$ .
- (ii) Inoltre vogliamo evitare collisioni tra  $P_2$  e  $P_3$ : dato che i moti medi di queste due particelle sono  $\alpha$  e  $\alpha + \beta$  chiediamo anche che  $\beta \neq -2\alpha$ , altrimenti in questo caso i raggi delle due orbite verrebbero a coincidere.

Dunque le orbite circolari che cerchiamo devono avere la proprietà  $\beta \neq 0, -\alpha, -2\alpha$ . Infine la condizione chiave per ottenere orbite periodiche del primo tipo è che non ci siano risonanze di alcun tipo tra le particelle, ossia che

$$\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}.$$

Da questa condizione abbiamo che esistono delle orbite periodiche del primo tipo per  $\mu$  abbastanza piccolo.

**Teorema 4.15.** *Consideriamo il problema (4.6). Per  $\mu = 0$  esiste sempre un'orbita circolare che può essere continuata per  $\mu$  piccolo ad un'orbita periodica se vale la condizione*

$$\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}.$$

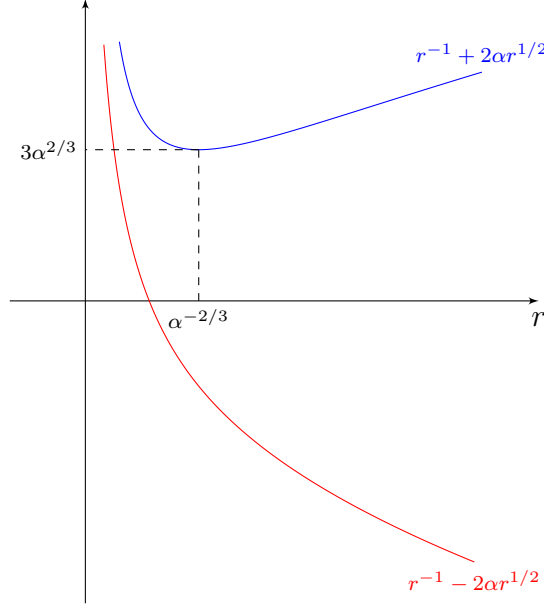
*Dimostrazione.* Nel problema considerato abbiamo l'integrale primo dato dall'hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}|\dot{w}|^2 - \frac{\alpha^2}{2}|w|^2 - V(w, \mu), \quad \text{dove } V = \frac{\mu}{|w_2 - w|} + \frac{1 - \mu}{|w_1 - w|}.$$

Detta  $H_0$  l'hamiltoniana del problema con  $\mu = 0$ , consideriamo la superficie di livello  $H_0 = -\frac{1}{2}C$ , dove  $C$  è detta costante di Jacobi, e facciamo vedere che al variare di  $C$  troviamo almeno un'orbita periodica. Sfruttando la relazione  $(\beta + \alpha)^2 r^3 = 1$  si ha

$$\begin{aligned} C = -2H_0 &= -2 \left[ \frac{1}{2}\beta^2 r^2 - \frac{\alpha^2}{2}r^2 - \frac{1}{r} \right] = -\beta^2 r^2 + \alpha^2 r^2 + \frac{2}{r} = \\ &= r^2 (-\beta^2 + \alpha^2 + 2(\beta + \alpha)^2) = r^2(\beta + \alpha)(3\alpha + \beta) = \\ &= r^2 ((\beta + \alpha)^2 + 2\alpha(\beta + \alpha)) = r^{-1} \pm 2\alpha r^{1/2}. \end{aligned}$$

Tracciando il grafico dell'una o dell'altra funzione che abbiamo appena ottenuto (Figura 4.4) vediamo che per ogni  $C$  riusciamo sempre a trovare (almeno) un  $r$  soluzione dell'equazione, il che ci dà delle soluzioni circolari da cui partire per effettuare la continuazione.



**Figura 4.4.** Grafico della funzione  $C(r)$ .

Adesso vediamo che queste soluzioni, grazie alle ipotesi, possono essere continuate. Nel sistema di riferimento rotante consideriamo coordinate polari  $\rho$  e  $\varphi$ . Se scriviamo la lagrangiana del problema in queste coordinate abbiamo

$$L = \frac{1}{2} [\dot{\rho}^2 + \rho^2(\alpha + \dot{\varphi})^2] + \frac{1}{\rho}.$$

I momenti coniugati alle variabili sono  $p_\rho = \dot{\rho}$  e  $p_\varphi = \rho^2(\alpha + \dot{\varphi})$ , da cui si ottiene l'hamiltoniana

$$H = [p_\rho \dot{\rho} + p_\varphi \dot{\varphi} - L] \Big|_{\substack{\dot{\rho}=p_\rho \\ \dot{\varphi}=-\alpha + \frac{p_\varphi}{\rho^2}}} = \frac{1}{2} \left( p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho} - \alpha p_\varphi.$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono dunque

$$\begin{cases} \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi^2}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \\ \dot{p}_\varphi = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = p_\rho \\ \dot{\varphi} = -\alpha + \frac{p_\varphi}{\rho^2} \end{cases}.$$

Consideriamo l'orbita circolare di raggio  $r$ : chiamiamo  $\gamma t$  l'angolo tra l'asse orizzontale del sistema inerziale e l'asse polare della particella  $P_3$ . Su questa orbita abbiamo dunque

$$\rho = r, \quad p_\rho = 0, \quad \dot{\varphi} = \gamma - \alpha \quad \text{e} \quad p_\varphi = \gamma r^2,$$

e infine abbiamo anche  $\gamma^2 r^3 = 1$ . Scriviamo adesso l'equazione alle variazioni: il sistema hamiltoniano si scrive come  $\dot{\mathbf{X}} = J \nabla_{\mathbf{X}} H$  (con  $\mathbf{X} = (p_\rho, p_\varphi, \rho, \varphi)$ ) e dunque l'equazione alle



variazioni ha matrice  $JH''$ , che lungo l'orbita periodica è la matrice

$$A = JH''|_{w(t)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2p_\varphi}{r^3} & -\frac{3p_\varphi^2}{r^4} + \frac{2}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & -\frac{2p_\varphi}{r^3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2p_\varphi}{r^3} & -\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & -\frac{2p_\varphi}{r^3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Procediamo al calcolo degli autovalori della matrice  $A$ , ossia dei moltiplicatori di Floquet: il suo polinomio caratteristico è  $\lambda^2(\lambda^2 + \gamma^2)$ , da cui gli autovalori sono  $\lambda_{1,2} = 0$  e  $\lambda_{3,4} = \pm i\gamma$ . Gli autovalori di  $\exp(AT)$  sono dunque 1 con molteplicità 2 (il primo è dovuto alla solita degenerazione lungo la direzione tangente all'orbita periodica e il secondo è dovuto alla presenza dell'integrale primo  $H$ ) e

$$\exp\left(\pm i\gamma \frac{2\pi}{\gamma - \alpha}\right).$$

Sappiamo che possiamo continuare l'orbita periodica se questi due autovalori non sono 1, e affinché ciò avvenga è sufficiente che

$$\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \notin \mathbb{Z}.$$

Ma dato che  $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + 1$  e che  $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Z}$  si ha la tesi.  $\square$

Un commento finale. Alla riuscita del nostro studio concorre anche la forma della perturbazione del problema di Keplero. Infatti adesso esibiamo un esempio in cui la perturbazione ha una forma diversa da quella del nostro caso (in quanto dipende da  $\dot{w}$  e  $\bar{w}$ ) e che non presenta orbite periodiche:

**Esempio 4.16.** Consideriamo la perturbazione  $F = \mu\dot{w}$ . Dimostriamo che vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left( |\dot{w}|^2 - \frac{\alpha^2}{2} |w|^2 - |w|^{-1} \right) = \mu |\dot{w}|^2.$$

Il primo membro dell'equazione (scrivendo  $|w|^{-1} = (w\bar{w})^{-1/2}$ ) diventa

$$\frac{1}{2} \left[ \ddot{w} + \dot{\bar{w}} + \dot{w}\ddot{\bar{w}} - \alpha^2 (\dot{w}\bar{w} + w\dot{\bar{w}}) \right] - \frac{\dot{w}\bar{w} + w\dot{\bar{w}}}{2(w\bar{w})^{3/2}};$$

dall'equazione del moto per  $\mu = 0$  si ricava  $\ddot{w}$ , si coniuga per ottenere anche  $\ddot{\bar{w}}$  e si inserisce tutto nell'equazione precedente: in questo modo si arriva al risultato voluto. Integrando la relazione ottenuta abbiamo che su un'orbita periodica di periodo  $T$  deve valere

$$0 = \int_0^T \mu |\dot{w}|^2 dt,$$

da cui  $|\dot{w}| = 0$  e quindi non abbiamo orbite periodiche iniziali da poter continuare.

## 4.4 La teoria di Floquet

Consideriamo il sistema differenziale

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x},$$

con  $A$  matrice reale  $n \times n$  e periodica di periodo  $T > 0$ . Sia  $X$  una matrice fondamentale di soluzioni del sistema, ossia tale che  $\det X \neq 0$  e

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Per avere  $\det A(t) \neq 0$  per ogni  $t$  basta che esista  $t_0$  tale che  $\det A(t_0) \neq 0$ . Infatti vale

**Teorema 4.17** (formula di Liouville-Jacobi). *Si ha*

$$\det X(t) = \det X(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \text{Tr } A(\tau) d\tau\right).$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det X) &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dt}x_{i1} & \cdots & \frac{d}{dt}x_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{ij}x_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n A_{ij}x_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{ij}x_{j1} & \cdots & A_{ij}x_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{ii} \det X = \text{Tr } A \cdot \det X. \end{aligned}$$

Basta risolvere l'equazione differenziale per  $\det X$  per ottenere la tesi. □

Osserviamo adesso che

$$\frac{d}{dt}X(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)X(t+T),$$

ossia se  $X(t)$  è un sistema fondamentale di soluzioni del sistema originario allora anche  $X(t+T)$  lo è. Così  $X(t+T) = X(t)C$ , con  $C$  matrice costante data da  $C = X(t)^{-1}X(t+T)$ . Inoltre dalla formula di Binet e valutando in  $t = T$  abbiamo

$$\det C = \exp\left(\int_0^T \text{Tr} A(\tau) d\tau\right).$$

Esiste una matrice  $P$  non singolare che porta  $C$  in forma normale (ossia in forma canonica di Jordan). Mettiamoci nel caso in cui  $C$  abbia  $n$  autovalori distinti, siano essi  $\mu_1, \dots, \mu_n$  (che sono detti *esponenti caratteristici* della matrice). Definiamo poi

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \log \mu_i$$

e costruiamo la matrice  $B = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , che soddisfa banalmente

$$\exp(BT) = C.$$

Definiamo

$$Z(t) = \exp(Bt)X^{-1}(t)$$

e mostriamo che è periodica di periodo  $T$ . Infatti

$$\begin{aligned} Z(t+T) &= \exp B(t+T)X^{-1}(t+T) = \exp(Bt) \exp(BT)X^{-1}(t+T) = \\ &= \exp(Bt) \exp(BT)C^{-1}X^{-1}(t) = Z(t). \end{aligned}$$

Definiamo infine

$$X^* = ZX = \exp(Bt),$$

che è la soluzione fondamentale dell'equazione

$$\frac{dX^*}{dt} = BX^*,$$

che è un sistema lineare a coefficienti costanti. Dunque abbiamo fatto vedere che esiste un cambio di coordinate che permette di portare il sistema a un sistema lineare a coefficienti costanti.

## 4.5 Orbite periodiche con metodi variazionali I

In questa parte seguiremo sostanzialmente l'esposizione dell'articolo [4]. Prendiamo l'equazione del problema degli  $N$  corpi

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = U_{\mathbf{x}_i}, \quad \text{con } i = 1, \dots, N.$$

Queste equazioni sono le equazioni di Eulero-Lagrange per il funzionale di *azione lagrangiana*

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \int_0^T L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) dt,$$

dove la lagrangiana del problema è ovviamente  $L = T + U$  con

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{\mathbf{x}}_i|^2 \quad \text{e} \quad U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}.$$

Dunque le soluzioni dell'equazione degli  $N$ -corpi sono minimi del funzionale azione.

### 4.5.1 Coercività e vincoli

**Definizione 4.18.** Un funzionale  $\mathcal{A}$  si dice *coercivo* su uno spazio normato  $E$  se per ogni successione  $(\mathbf{x}^j)_j$  con  $\|\mathbf{x}^j\|_E \rightarrow \infty$  si ha  $\mathcal{A}(\mathbf{x}^j) \rightarrow \infty$ .

**Definizione 4.19.** Un funzionale  $\mathcal{A}$  si dice *semicontinuo inferiormente* su uno spazio  $E$  se per ogni  $\mathbf{x}_* \in E$  si ha  $\mathcal{A}(\mathbf{x}_*) \leq \liminf_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_*} \mathcal{A}(\mathbf{x})$ .

Vediamo adesso un classico risultato del calcolo delle variazioni che ci sarà utile per garantire l'esistenza di minimi di un funzionale:

**Teorema 4.20.** *Sia  $X$  uno spazio di Banach riflessivo e  $\mathcal{A} : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale. Se  $\mathcal{A}$  è limitato dal basso, coercivo su  $X$  e semicontinuo inferiormente su  $X$  allora ammette un minimo.*

*Dimostrazione.* Sia  $(\mathbf{x}_i)_i$  una successione in  $X$  tale che

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}_i) \rightarrow \mathcal{A}_0 = \inf_X \mathcal{A} < \infty,$$

dove l'estremo inferiore di  $\mathcal{A}$  esiste finito perché il funzionale è limitato dal basso. Siccome  $\mathcal{A}$  è coercivo abbiamo che  $(\mathbf{x}_i)_i$  è limitata; dal fatto che  $X$  è riflessivo abbiamo l'esistenza di una sottosuccessione  $(\mathbf{x}_{i_h})_h$  tale che

$$\mathbf{x}_{i_h} \rightharpoonup \mathbf{x}_* \in X.$$

Così dalla semicontinuità inferiore

$$\mathcal{A}_0 \leq \mathcal{A}(\mathbf{x}_*) \leq \liminf_h \mathcal{A}(\mathbf{x}_{i_h}) = \mathcal{A}_0,$$

e dunque  $\mathbf{x}_*$  è il minimo di  $\mathcal{A}$ . □

Dobbiamo adesso introdurre lo spazio in cui cercheremo i minimi del funzionale azione. Innanzitutto introduciamo lo spazio di Sobolev

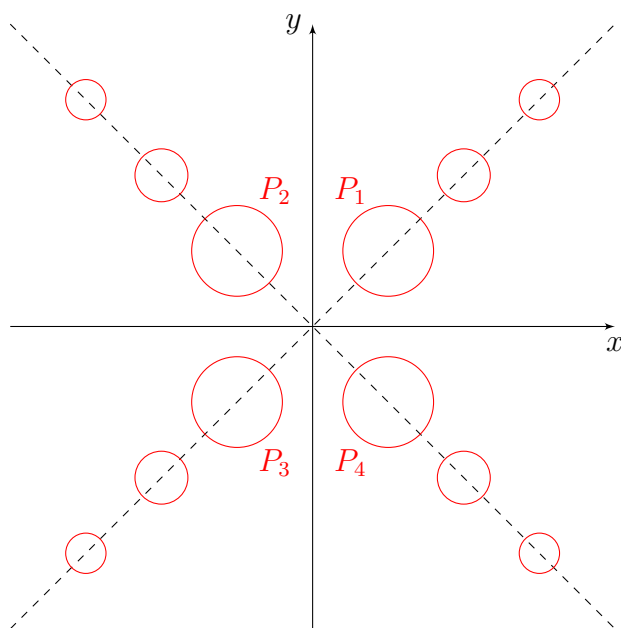
$$H^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3N}) = W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3N});$$

questo è lo spazio delle funzioni  $f \in L^2$  (misurabili e a quadrato sommabile) che ammettono una derivata debole, ossia una funzione  $f'$  tale che per ogni  $\varphi \in C_0^\infty$  vale  $\int_{\mathbb{R}} f \varphi' = - \int_{\mathbb{R}} f' \varphi$ . Tale spazio è uno spazio di Hilbert riflessivo. Noi stiamo cercando minimi del funzionale azione che però siano anche soluzioni periodiche: fissiamo un periodo  $T > 0$  e consideriamo lo spazio  $H_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3N})$ , ossia lo spazio delle orbite chiuse e periodiche di periodo  $T$ , che siano anche funzioni in  $H^1$ .

**Osservazione 4.21.** Le funzioni di  $H^1$  sono definite quasi ovunque, ma la regolarità delle funzioni in  $H^1$  fa sì che esista sempre un rappresentante continuo di ogni funzione in  $H^1$ : dunque ha senso richiedere la periodicità.

Quello appena introdotto sarebbe lo spazio ideale nel quale ricercare i minimi del funzionale azione: però sullo spazio  $H_T^1$  il funzionale di azione non è coercivo.

**Esempio 4.22.** Mostriamo che nel caso  $N = 4$ , il funzionale azione lagrangiana non è coercivo. Osserviamo il grafico seguente:



Consideriamo orbite periodiche  $\mathbf{x}^j \in H^1$  tali che i centri di queste orbite siano sempre più distanti dall'origine e i raggi invece siano infinitesimi. Dato che  $\|\mathbf{x}^j\|_{L^\infty} \rightarrow \infty$  avremo anche che  $\|\mathbf{x}^j\|_{H^1} \rightarrow \infty$ . Però  $\mathcal{A}(\mathbf{x}^j) \rightarrow 0$  in quanto sia il termine potenziale che quello cinetico tendono a zero.

Come si recupera la coercività del funzionale azione? In letteratura ci sono sostanzialmente due modi per fare ciò: si introducono dei vincoli che possono essere *vincoli di simmetria* o *vincoli topologici*. Vediamo subito un esempio di questi ultimi.

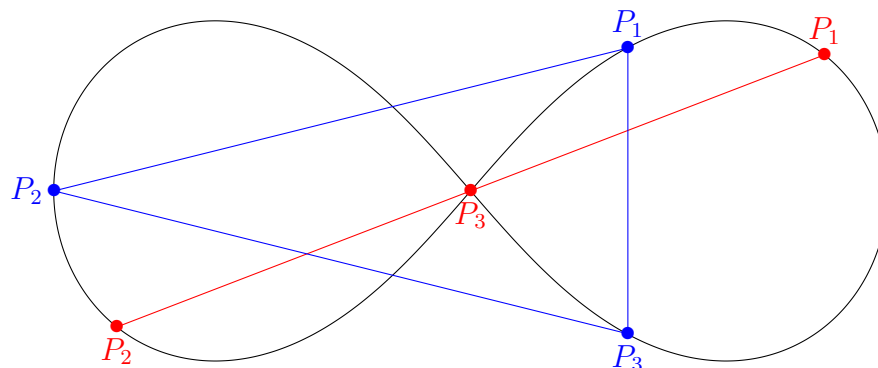
**Esempio 4.23.** Nel 1977 W. Gordon dimostrò il seguente risultato sul problema di Keplero: tra tutte le curve chiuse che racchiudono l'origine e che compiono un solo giro attorno ad essa, quelle che realizzano il minimo dell'azione lagrangiana sono esattamente le orbite kepleriane, incluse quelle con collisione. Perché in questo caso si riesce a dimostrare l'esistenza del minimo? Grazie al fatto che abbiamo imposto alle orbite periodiche la condizione di racchiudere l'origine; infatti stavolta il controesempio precedente non funziona, in quanto se prendiamo una successione di loop che va all'infinito in norma  $L_\infty$ , tali loop devono sempre racchiudere l'origine e dunque il termine dato dall'energia cinetica stavolta diventa infinito.

## 4.5.2 Esclusione delle collisioni

Supponiamo di avere  $\Lambda \subseteq H_T^1$  tale che  $\mathcal{A}|_\Lambda$  sia coercivo. Vediamo in generale come escludere le soluzioni di minimo che hanno delle collisioni. Anche qui i metodi sono sostanzialmente due: il metodo delle stime di livello e quello delle perturbazioni locali.

Iniziamo dal metodo delle *stime di livello*. Supponiamo di avere stime del tipo  $\mathcal{A}(\mathbf{x}_*) \geq a$  (con  $a \in \mathbb{R}$ ) per ogni  $\mathbf{x}_*$  soluzione di collisione. Se si riesce a determinare un elemento  $\bar{\mathbf{x}} \in \Lambda$  tale che  $\mathcal{A}(\bar{\mathbf{x}}) < a$  questo esclude che una soluzione di minimo per l'azione sia di collisione.

**Esempio 4.24.** Vediamo un'applicazione di questo metodo. La *figure eight* è un'orbita periodica per il problema dei tre corpi con tre masse uguali e unitarie, trovata da Moore nel 1993 (Figura 4.5). Chenciner e Montgomery, grazie alla tecnica delle stime di livello, sono riusciti a dimostrare alcune proprietà di questa particolare orbita: la figure eight ha simmetria diedrale  $D_6$  e si può vedere che esiste una configurazione in cui le particelle sono allineate (*configurazione Euleriana  $E_3$* ), dopo  $\frac{1}{12}$  di periodo le tre particelle hanno una configurazione a triangolo isoscele, e dopo ancora  $\frac{1}{12}$  di periodo le tre particelle assumono nuovamente una configurazione allineata (stavolta  $E_1$ ) e così via.



**Figura 4.5.** Figure eight: in evidenza la configurazione  $E_3$  (rosso) e quella isoscele (blu).

Le configurazioni delle particelle che si muovono sull'orbita figure eight possono essere identificate con i punti di una sfera, vediamo perché. Consideriamo un triangolo di lati  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  e  $\sqrt{c}$  formato dalle particelle, sia  $S$  l'area del triangolo e sia  $s$  il semiperimetro del triangolo. Vale la formula di Erone

$$S^2 = s(s - \sqrt{a})(s - \sqrt{b})(s - \sqrt{c}).$$

Svolgendo un po' di calcoli si ottiene la relazione

$$\frac{1}{16}(2ab + 2ac + 2bc - a^2 - b^2 - c^2) = S^2 \geq 0.$$

Si può anche verificare che la relazione

$$a + b + c = 3$$

fissa il momento di inerzia rispetto al centro di massa al valore  $I = 1$ . Nello spazio delle  $a$ ,  $b$  e  $c$ , la disequazione fornisce un cono, mentre l'equazione fornisce un piano: dunque la loro intersezione è un disco. Qui non abbiamo terminato però: infatti data una certa configurazione triangolare possiamo lasciare invariato il triangolo ma scambiare i nomi delle particelle. Dunque il disco ha bisogno di un'identificazione: i punti da identificare sono proprio quelli del bordo del disco, dove  $S = 0$ , ossia dove due delle particelle si scambiano o dove le particelle si allineano; quanto ottenuto è proprio una sfera.

Vediamo adesso il metodo delle *perturbazioni locali*. Sia  $\mathbf{x}_*$  una soluzione con collisione che supponiamo essere un minimo di  $\mathcal{A}$  su  $\Lambda$ ; se si riesce ad ottenere un  $\bar{\mathbf{x}} \in \Lambda$  variazione di  $\mathbf{x}_*$  con  $\mathcal{A}(\bar{\mathbf{x}}) < \mathcal{A}(\mathbf{x}_*)$  abbiamo di nuovo un assurdo contro la proprietà di minimalità. Vediamo un esempio in cui si applica questa tecnica:

**Esempio 4.25.** Prendiamo il problema di Keplero con centro di attrazione in  $O$  e consideriamo la soluzione con collisione  $\mathbf{x}_*$  che parte da un punto  $A$ , collide con  $O$  e poi arriva ad un punto  $B \neq A$ . La costruzione della perturbazione locale in questo caso è esplicita e dovuta a Marchal: si dimostra che esistono (e sono unici) un arco diretto e uno inverso, isocroni e che danno luogo ad un valore minore dell'azione rispetto alla soluzione con collisione<sup>1</sup>. Sempre Marchal ha effettuato anche una costruzione differente da quella appena introdotta: si considera una famiglia di sfere concentriche al centro di attrazione da utilizzare (percorrendole) per variare l'orbita di collisione; Marchal ha dimostrato che

$$\iint_{S^2} \mathcal{A} d\Sigma < \mathcal{A}(x_*),$$

da cui segue che esiste una variazione dell'orbita con collisione su cui l'azione ha valore minore rispetto all'orbita con collisione.

---

<sup>1</sup>Arco diretto significa che il suo involucro convesso non contiene  $O$ .

## 4.6 Orbite periodiche con metodi variazionali II

Cerchiamo soluzioni periodiche del problema degli  $N$  corpi (con masse unitarie) e tali che  $N = |\mathcal{R}|$  dove  $\mathcal{R}$  è il gruppo di simmetria di uno dei solidi platonici. I solidi platonici sono cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. In realtà noi considereremo i gruppi di rotazione del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro; tali gruppi di simmetrie sono rispettivamente  $\mathfrak{A}_4$ ,  $\mathfrak{S}_4$  e  $\mathfrak{A}_5$ .

**Osservazione 4.26.** Perché non consideriamo tutti e cinque i solidi platonici? Il cubo e l'ottaedro sono *duali*: infatti ad ogni cubo corrisponde uno e un solo ottaedro (dove i vertici dell'ottaedro sono i centri delle facce del cubo) e viceversa, dunque il gruppo di rotazioni (e anche di simmetrie) del cubo è lo stesso di quello dell'ottaedro. Si può vedere che anche il dodecaedro e l'icosaedro sono duali e dunque è sufficiente considerare uno solo dei due solidi.

Sia  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{3N}$  il moto di tutte le particelle. Invece di indicizzare le particelle con gli interi da 1 a  $N$ , indicizzeremo le particelle con le rotazioni del gruppo  $\mathcal{R}$ . In particolare scegliamo una particella da indicizzare con la matrice identità: tale particella avrà come mappa del moto  $\mathbf{u}_I$  e sarà detta *particella generatrice*. Imponiamo le condizioni di simmetria

$$\mathbf{u}_R = R\mathbf{u}_I \quad \text{per ogni } R \in \mathcal{R}, \quad (4.7)$$

che ci dicono che il moto delle particelle è determinato univocamente dal moto della particella generatrice; in particolare il moto di tutte le particelle è quello della particella generatrice a cui viene applicata una delle rotazioni del gruppo  $\mathcal{R}$ .

La ricerca di soluzioni del problema degli  $N$  corpi con i vincoli appena introdotti è effettuata in [4]. Fissiamo un periodo  $T > 0$  e cerchiamo orbite periodiche come minimi del funzionale

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \int_0^T \left( \frac{1}{2} \sum_{h=1}^N m_h |\dot{\mathbf{u}}_h|^2 + \sum_{1 \leq h < k \leq N} \frac{m_h m_k}{|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_k|} \right) dt$$

sullo spazio  $H_T^1$ . Abbiamo fatto vedere che il funzionale  $\mathcal{A}$  non è coercivo su  $H_T^1$ , e dunque è necessario aggiungere dei vincoli. Introduciamo le condizioni sul centro di massa

$$\chi = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{3N} : \sum_{h=1}^n m_h \mathbf{x}_h = \mathbf{0} \right\}$$

e restringiamo la ricerca allo spazio

$$H_T^1(\mathbb{R}, \chi) \subseteq H_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{3N}).$$

Vediamo adesso come possiamo riscrivere il funzionale di azione grazie ai vincoli di simmetria.

**Proposizione 4.27.** *Nel caso di masse unitarie si ha*

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \frac{N}{2} \int_0^T \left( |\dot{\mathbf{u}}_I|^2 + \sum_{R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}} \frac{1}{|(R - I)\mathbf{u}_I|} \right) dt.$$



*Dimostrazione.* L'unica parte non banale dell'enunciato è la scrittura del termine del potenziale. Per questo termine si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{h \neq k} \frac{1}{|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_k|} &= \frac{1}{2} \sum_{h \neq k} \frac{1}{|R_h \mathbf{u}_I - R_k \mathbf{u}_I|} = \frac{1}{2} \sum_{h \neq k} \frac{1}{|(R_k^{-1} R_h - I) \mathbf{u}_I|} = \\ &= \frac{N}{2} \sum_{R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}} \frac{1}{|(R - I) \mathbf{u}_I|}, \end{aligned}$$

e abbiamo concluso.  $\square$

Per concludere vediamo dove può avvenire una collisione binaria.

**Lemma 4.28.** *Un moto  $\mathbf{u}$  che soddisfa le condizioni (4.7) è libero da collisioni se e solo se*

$$\mathbf{u}_I(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \emptyset,$$

dove  $\Gamma$  è l'unione degli assi di simmetria delle rotazioni di  $\mathcal{R} \setminus \{I\}$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{u}_{R_1} = \mathbf{u}_{R_2}$  per  $R_1 \neq R_2$ , abbiamo  $R_2^{-1} R_1 \mathbf{u}_I = \mathbf{u}_I$ ; dunque se c'è una collisione binaria al tempo  $t_c$  allora  $\mathbf{u}_I(t_c)$  appartiene all'asse di rotazione della rotazione  $R = R_2^{-1} R_1$ , che denotiamo con  $a(R)$ . Definito dunque

$$\Gamma = \bigcup_{R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}} a(R),$$

abbiamo che un moto  $\mathbf{u}$  con simmetrie ha collisioni se e solo se esiste  $t_c$  tale che  $\mathbf{u}_I(t_c)$  sta su un asse  $r(R)$  di una qualche rotazione  $R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}$ .  $\square$

### 4.6.1 Una condizione di coercività

Dato un gruppo finito  $G$  consideriamo tre rappresentazioni ortogonali di  $G$  date dalle mappe

$$\rho : G \rightarrow O(3), \quad \tau : G \rightarrow O(2), \quad \sigma : G \rightarrow \mathfrak{S}_n.$$

La mappa  $\rho$  riguarda le isometrie della posizione: infatti possiamo applicare una matrice di  $O(3)$  a ciascuna delle componenti  $\mathbf{u}_j(t) \in \mathbb{R}^3$ . La mappa  $\tau$  è relativa al tempo e rappresenta le isometrie di  $\mathbb{R}^2$ , nel quale è immersa la circonferenza che rappresenta il tempo (infatti le mappe sono periodiche). Infine la mappa  $\sigma$  dà la possibilità di scambiare il ruolo delle particelle. A questo punto l'azione di  $G$  su  $H_T^1$  è definita da

$$(g \cdot \mathbf{u})_i = \rho(g) \mathbf{u}_{\sigma(g^{-1})(i)}(\tau(g^{-1})(t)).$$

**Definizione 4.29.** Un loop  $\mathbf{u}$  è detto *equivariante* rispetto all'azione di  $G$  se per ogni  $g \in G$ , per ogni  $t$  e per ogni  $i = 1, \dots, N$  vale

$$\rho(g) \mathbf{u}_{\sigma(g^{-1})(i)}(t) = \mathbf{u}_i(\tau(g)(t)).$$

Definiamo poi  $\Lambda_G \subseteq H_T^1$  come l'insieme dei loop  $T$ -periodici equivarianti rispetto all'azione di  $G$ .

Sia infine

$$\chi^G = \{\mathbf{x} \in \chi : \rho(g)\mathbf{x}_{\sigma(g^{-1}(i))} = \mathbf{x}_i \forall g \in G \forall i\},$$

ossia l'insieme di tutte le configurazioni fissate da ogni elemento di  $G$ .

**Teorema 4.30.** *Sia  $G$  un gruppo finito e  $\Lambda_G \subseteq H_T^1$  come sopra. Allora  $\mathcal{A}$  è coercivo su  $\Lambda_G$  se e solo se  $\chi^G = \{0\}$ .*

**Corollario 4.31.** *Se  $\mathcal{A}$  è coercivo su  $\Lambda_G$  allora per ogni  $\mathbf{u} \in \Lambda_G$  si ha*

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t) dt = \mathbf{0}.$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\int_0^T \mathbf{u}_i(t) dt = \int_0^T \mathbf{u}_i(\tau(g)(t)) dt = \rho(g) \int_0^T \mathbf{u}_{\sigma(g^{-1}(i))}(t) dt,$$

dove l'ultimo passaggio vale grazie all'equivarianza. Ciò si può esprimere dicendo che per ogni  $i$  e per ogni  $g \in G$  si ha

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \rho(g)\bar{\mathbf{u}}_{\sigma(g^{-1}(i))},$$

ovvero  $\bar{\mathbf{u}}_i \in \chi^G$ , e dunque è nullo grazie al teorema precedente.  $\square$

Ricollegiamoci a quanto esposto precedentemente; sia  $\Lambda \subseteq H_T^1$  l'insieme dei loop che verificano le condizioni di simmetria (4.7).

**Proposizione 4.32.** *Esiste un gruppo  $G$  tale che  $\Lambda_G = \Lambda$ .*

*Dimostrazione.* Considerato uno dei solidi platonici, sia  $C$  il centro di una faccia,  $M$  il punto medio di uno degli spigoli della faccia in questione e  $O$  il centro del solido. Il gruppo delle rotazioni attorno ad  $OC$  è ciclico, così come il gruppo delle rotazioni attorno ad  $OM$ : siano  $R_C$  e  $R_M$  i generatori dei due gruppi ciclici. Tali rotazioni definiscono anche due permutazioni delle particelle, che denotiamo con  $R_C \cdot$  e  $R_M \cdot$ . Queste sono definite da

$$R_C \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_{R_C R} \quad \text{e} \quad R_M \mathbf{u}_R = \mathbf{u}_{R_M R}.$$

Consideriamo adesso il gruppo  $O(2) \times O(3) \times \mathfrak{S}_N$  e consideriamo il sottogruppo  $G$  generato dai due elementi

$$g_1 = (I, R_C, R_C \cdot) \quad \text{e} \quad g_2 = (I, R_M, R_M \cdot).$$

Affermiamo che questo è il gruppo che cercavamo. Si ha  $\mathbf{u}_R = R\mathbf{u}_I$  se e solo se per ogni  $R_1 \in \mathcal{R}$  vale  $R_1 \mathbf{u}_{R_1^{-1}R} = R\mathbf{u}_I = \mathbf{u}_R$ , e quest'ultima è proprio la condizione di equivarianza.  $\square$

**Proposizione 4.33.** *Il funzionale  $\mathcal{A}|_{\Lambda_G}$  non è coercivo.*

*Dimostrazione.* Prendiamo la particella generatrice su uno degli assi. Le rotazioni relative all'asse a cui appartiene la particella generatrice fissano la particella generatrice e quindi fissano tutte le altre. Pertanto la configurazione detta è non nulla e appartiene a  $\chi_G$ .  $\square$

## 4.6.2 Recupero della coercività

Indichiamo con  $\mathfrak{S} \subseteq \Lambda$  l'insieme dei loop con collisioni, cioè

$$\mathfrak{S} = \{\mathbf{u} \in \Lambda : \exists t_c \in \mathbb{R}, h \neq k \in \{1, \dots, N\} \text{ tali che } \mathbf{u}_h(t_c) = \mathbf{u}_k(t_c)\}.$$

Cerchiamo dei coni aperti  $\mathcal{K} \subseteq \Lambda$  tali che  $\partial\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{S}$  (dove il bordo  $\partial\mathcal{K}$  è rispetto alla topologia  $\mathcal{C}^0$ ). Restringere l'azione ai coni  $\mathcal{K}$  corrisponde all'introduzione di vincoli topologici, oltre ai vincoli di simmetria già introdotti con le condizioni (4.7).

Denotiamo con  $\tilde{\mathcal{R}}$  il gruppo di simmetrie di un solido platonico, in modo che per uno stesso solido platonico si abbia  $|\tilde{\mathcal{R}}| = 2|\mathcal{R}|$ . Sia  $\Pi$  l'unione dei piani di simmetria del solido platonico, e sia  $\mathcal{S}$  l'unione delle componenti connesse di  $\Pi \setminus \Gamma$ . Allora

$$\mathbb{R}^3 \setminus \Pi = \bigcup_{\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{R}}} \tilde{R}D \quad \text{e} \quad S^2 \setminus \Pi = \bigcup_{\tilde{R} \in \tilde{\mathcal{R}}} \tilde{R}\tau, \quad (4.8)$$

dove  $D$  è un aperto fondamentale per l'azione di  $\tilde{\mathcal{R}}$  su  $\mathbb{R}^3$  e  $\tau = S^2 \cap D$  è il cosiddetto triangolo di Möbius. Le scritture (4.8) corrispondono al fatto che  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$  è diviso in  $|\tilde{\mathcal{R}}|$  camere disgiunte, che coincidono con gli elementi dell'orbita di  $D$  sotto l'azione di  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Similmente  $S^2 \setminus \Pi$  è tassellata dall'orbita del triangolo  $\tau$ .

Consideriamo un moto  $\mathbf{u}_I$  della particella generatrice che sia libero da collisioni, ossia tale che

$$\mathbf{u}_I(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \emptyset.$$

Sia poi  $[\mathbf{u}_I]$  la classe di omotopia libera di  $\mathbf{u}_I$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ . La condizione (4.7) induce una bigezione

$$[\mathbf{u}_I] \leftrightarrow \mathcal{K}(\mathbf{u}) \subseteq \Lambda,$$

che associa a  $[\mathbf{u}_I]$  una classe  $\mathcal{K}(\mathbf{u})$  di loop equivarianti senza collisioni. Restringendoci a queste classi, però, non ce la facciamo ancora ad ottenere la coercività in quanto se prendiamo come moto per la particella generatrice un loop che gira attorno ad un solo asse, possiamo far sì che i centri vadano all'infinito e che i raggi vadano a zero (come fatto per l'Esempio 4.22) e dunque violare la condizione di coercività. Allora in [4] viene introdotta una condizione, che esprime che  $\mathbf{u}_I$  non deve essere un loop omotopo ad alcun loop che gira 0, 1 o più volte attorno ad un solo asse di rotazione; inoltre viene denotata con  $\mathcal{U}$  l'insieme delle classi  $\mathcal{K}(\mathbf{u})$  che soddisfano la condizione appena detta. Questa è una condizione sufficiente alla coercività.

**Proposizione 4.34.** *Ogni cono  $\mathcal{K} \in \mathcal{U}$  soddisfa la condizione  $\partial\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{S}$  e inoltre  $\mathcal{A}|_{\mathcal{K}}$  è coercivo.*

*Dimostrazione.* Si ha che  $\mathbf{u} \in \partial\mathcal{K}$  se e solo se esiste  $\bar{t} \in \mathbb{R}$  ed esiste  $R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}$  tali che  $\mathbf{u}_I(\bar{t}) \in a(R)$ , e dunque la soluzione ha una collisione. La condizione introdotta per l'insieme  $\mathcal{U}$  implica che esiste  $c_{\mathcal{K}} > 0$  tale che per ogni  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$

$$\max_{t_1, t_2 \in [0, T]} |\mathbf{u}_I(t_1) - \mathbf{u}_I(t_2)| \geq c_{\mathcal{K}} \min_{t \in [0, T]} |\mathbf{u}_I(t)|.$$

Se  $t_m$  soddisfa  $|\mathbf{u}_I(t_m)| = \min_{t \in [0, T]} |\mathbf{u}_I(t)|$ , si ha allora per ogni  $t$

$$|\mathbf{u}_I(t)| \leq |\mathbf{u}_I(t_m)| + |\mathbf{u}_I(t) - \mathbf{u}_I(t_m)| \leq \left( \frac{1}{c_{\mathcal{K}}} + 1 \right) \max_{t_1, t_2 \in [0, T]} |\mathbf{u}_I(t_1) - \mathbf{u}_I(t_2)|.$$

□

Esiste un punto  $\mathbf{q}$  sul lato opposto all'angolo retto tale che se prendiamo  $\tilde{\mathcal{R}}_{\mathbf{q}}$  otteniamo  $|\mathcal{R}|$  punti sulla sfera che formano un poligono regolare. Unendo tutti si ottengono i cosiddetti poliedri archimedei, i quali hanno la proprietà che da ogni loro faccia passa un solo asse di simmetria del solido platonico. Dunque è naturale scegliere come rappresentante della classe di omotopia libera di  $\mathbf{u}_I$  una successione  $\nu = (\nu_k)$  di vertici del poliedro archimedeo e si può anche richiedere che  $\nu_{k-1} \neq \nu_{k+1}$  e che  $\nu$  non sia contenuta nella chiusura di un'unica faccia. Ad ogni cono si può associare una stringa  $\sigma$  di spicchi.

**Definizione 4.35.** Un cono  $K \in \mathcal{U}$  si dice *semplice* se la sequenza  $\sigma$  associata non contiene una stringa  $D_k, \dots, D_{k+2o}$  tale che

$$\left\langle \bigcap_{j=0}^{2o} \overline{D_{k+j}} \right\rangle = r(R)$$

per qualche  $R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}$  con  $o$  l'ordine del polo determinato da  $r(R)$ .

La definizione appena data significa che non facciamo un giro completo attorno ad un asse sforando in un triangolo già percorso. Possiamo anche chiedere che esista una rotazione  $R \in \mathcal{R} \setminus \{I\}$  tale che

$$\mathbf{u}_I(t + T/M) = R\mathbf{u}_I(t)$$

per  $M = \frac{k\nu}{k}$ , dove  $k\nu$  è il periodo minimo della sequenza  $k\nu$  e  $k > 0$ . Stavolta il gruppo  $\tilde{G}$  rispetto al quale le orbite che soddisfano le condizioni sono equivarianti è generato anche da

$$\left( \left( \begin{array}{cc} \cos \frac{2\pi}{M} & -\sin \frac{2\pi}{M} \\ \sin \frac{2\pi}{M} & \cos \frac{2\pi}{M} \end{array} \right), I, R^{-1} \right).$$

Sia  $(\mathbf{u}^h)_h$  una successione minimizzante, ossia tale che

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}^h) \rightarrow a = \inf_{\mathbf{u} \in K} \mathcal{A}(\mathbf{u}) < \infty.$$

Grazie alla coercività, allora (almeno definitivamente) abbiamo  $\|\mathbf{u}^h\|_{H^1} \leq C$ . Dunque, essendo  $H^1$  riflessivo, esiste una sottosuccessione  $\mathbf{u}^{h_k}$  che converge debolmente a  $\mathbf{u}_* \in H^1$ . Mostriamo adesso che  $\mathbf{u}_* \in H^1 \cap \overline{K}$  (chiusura per la topologia  $C^0$ ). Abbiamo visto che le  $\mathbf{u}^h$  sono equilimitate. Inoltre sono equihölderiane con esponente  $1/2$ , poiché

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}^h(t_1) - \mathbf{u}^h(t_2)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{u}}^h(t) dt \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{u}}^h(t)| dt \right| \leq \\ &\leq |t_2 - t_1|^{1/2} \left( \left| \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{u}}^h(t)|^2 dt \right| \right)^{1/2} \leq |t_2 - t_1| \|\mathbf{u}^h\|_{H^1} \leq \\ &\leq C|t_2 - t_1|^{1/2}. \end{aligned}$$

Questo implica l'equicontinuità e dunque abbiamo la convergenza in norma uniforme di una sottosuccessione grazie al teorema di Ascoli-Arzelà. Nello stesso articolo viene mostrata la proposizione seguente.

**Proposizione 4.36.** *Il funzionale  $\mathcal{A}$  è semicontinuo inferiormente debolmente su  $H^1$ .*

Dopodiché vengono effettuate stime sul funzionale  $\mathcal{A}(\mathbf{u})$  che permettono di trattare tutti i casi con le collisioni e trovare le soluzioni periodiche di cui abbiamo discusso inizialmente.



# Bibliografia

- [1] Siegel C.L., Moser J., *Lectures in Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, 1970
- [2] McGehee R., *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics*, *Expositiones Mathematicae* **4**, 1986
- [3] McGehee R., *Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem*, *Inventiones Mathematicae* **27**, 1974
- [4] Fusco G., Gronchi G.F., Negrini P., *Platonic polyhedra, topological constraints and periodic solutions of the classical  $N$ -body problem*, *Inventiones Mathematicae* **185**, 2011
- [5] Conley C., Easton R., *Isolated Invariant Sets and Isolating Blocks*, *Transactions of the American Mathematical Society* **158**(1), 1969
- [6] Ferrario D.L., Terracini S., *On the existence of collisionless equivariant minimizers for the classical  $n$ -body problem*, *Inventiones Mathematicae* **155**, 2004