Risoluzione esercizi su Classi di funzioni notevoli di Marco Pozzetta

Matteo Del Vecchio

November 12, 2019

Esercizio 3

Punto 1

Traccia Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$f \in Lip(I),\ I\ limitato \implies f \in C^{0,\alpha}(I)\ \forall \alpha \in (0,1)$$

Dimostrazione

$$I\ \ limitato \implies \exists \sup I,\, \inf I\ \in \bar{I}$$

$$\forall x,\, y \in I, \quad a, b \in (\inf(I),\ \sup(I)) \implies |x-y| \leq \sup(I) - \inf(I)$$

Sia L la costante di lipschitzianità di f, poniamo $C = L \cdot [\sup(I) - \inf(I)]^{1-\alpha}$ con $\alpha \in (0,1)$
Dimostriamo ora che f è $\alpha - Holderiana$ di costante C.
Osserviamo innanzitutto che C è effettivamente una costante positiva, perché $L > 0$ è fissato, mentre $\sup(I) > \inf(I)$ dipendono esclusivamente dal dominio I. Per lipschitzianità,

$$\forall x, y \in I,\ \ |f(x) - f(y)|\ \leq\ L|x-y|\ =\ L|x-y|^{\alpha}\, |x-y|^{1-\alpha}$$

Poiché $\sup(I) - \inf(I)$ è il massimo valore possibile di $|x-y|$,

$$|x-y|^{1-\alpha}\ \leq\ [\sup(I) - \inf(I)]^{1-\alpha}$$

$$f(x) - f(y) \ \leq \ L \cdot [\sup(I) - \inf(I)]^{1-\alpha} \cdot |x-y|^{\alpha}$$

Ma ricordando la nostra definizione di C,

$$f(x) - f(y) \ \leq \ C \cdot |x-y|^{\alpha}$$

che è proprio la condizione di $\alpha - \textit{holderianità}$ di f.

Controesempio per I non limitato

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Questa funzione è 1-lipschitziana. Infatti

$$\forall x,\, y \ \in \mathbb{R}, \ \ |f(x) - f(y)| \ = \ |x-y| \ \leq \ 1 \cdot |x-y|.$$

Tuttavia, non è $\alpha - \textit{holderiana}$ per nessun $\alpha \in (0,1)$. Supposto per assurdo che lo sia per un certo α, allora

$$\exists\, C \ \in \mathbb{R}^{+} \ : \ \forall x,\, y \ \in \mathbb{R}, \ \ |x-y| \ \leq \ C \cdot |x-y|^{\alpha}$$

Se $x = y$, la disuguaglianza è vera per ogni scelta di C. Possiamo quindi supporre $x \neq y$. Risolvendo la disequazione per C si ottiene

$$C \geq \frac{|x-y|}{|x-y|^{\alpha}} = |x-y|^{1-\alpha}$$

Osserviamo che, con α fissato, $|x-y|\, con\, x\,,y \in \mathbb{R}$ è arbitrariamente grande.
Non è quindi possibile scegliere C che soddisfi questa proprietà.
In particolare, per $\alpha = \frac{1}{2}$, $C \ \geq \ |x-y|^{1/2}\, \forall x,\, y \in \mathbb{R}$. Ma questo è impossibile.
Siano ad esempio $x > 0, y = -x$. La condizione da rispettare diventa

$$C > (2x)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ma

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{2x} = +\infty$$

da cui $C \notin \mathbb{R}$ che è assurdo.

Punto 2

Traccia Sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$f \in C^{0,\alpha}(I), \;\; I \; limitato \;\; \Longrightarrow \;\; f \in C^{0,\beta}(I) \;\;\; \forall \beta \in (0, \alpha]$$

Dimostrazione Per definizione,

$$f \in C^{0,\alpha}(I) \;\Leftrightarrow\; \exists C \in \mathbb{R}^+ : \;\; |f(x) - f(y)| \;\leq\; C \cdot |x-y|^\alpha \;\; \forall x, y \in I$$

Come discusso nel punto 1, I limitato $\Longrightarrow$ $|x-y| \leq \sup(I) - \inf(I)$. Fissato $\beta \in (0, \alpha]$, sia

$$\tilde{C} = C \cdot [\sup(I) - \inf(I)]^{\alpha - \beta}$$

Vogliamo dimostrare che f è $\beta - holdeniana$ di costante $\tilde{C}$. Notiamo ancora che $\tilde{C}$ è costante e positivo, quindi è un valore assumibile come costante holderiana. Inoltre, $\forall x, y \in I$, si ha

$$\tilde{C} \cdot |x-y|^\beta \;=\; C \cdot [\sup(I) - \inf(I)]^{\alpha-\beta} \;\geq\; C \cdot |x-y|^{\alpha-\beta} \cdot |x-y|^\beta$$

Quindi

$$\tilde{C} \cdot |x-y|^\beta \;\geq\; C \cdot |x-y|^\alpha \;\geq\; |f(x) - f(y)|$$

che è proprio la condizione di $\beta - holderianità$.

Controesempio con I non limitato

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \;\; &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Dimostriamo che questa funzione è $\frac{1}{2} - holderiana$, ma non $\frac{1}{4} - holderiana$. Possiamo ancora assumere $x \neq y$, quindi supponiamo senza perdita di generalità $x > y$. Allora

$$f(x) - f(y) \;=\; \sqrt{x} - \sqrt{y} \;\leq\; \sqrt{x-y}$$

che deve essere vero perché abbiamo preso per ipotesi $y \in (0, x)$. Il caso $y > x$ è analogo. Quindi

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; |x-y|^{\frac{1}{2}}$$

cioè f è $\frac{1}{2}-holderiana$. Supponiamo per assurdo che sia anche $\frac{1}{4}-holderiana$. Allora senz'altro

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ :\;\; f(x) - f(y) \;\leq\; C \cdot |x-y|^{\frac{1}{4}}$$

Continuando a supporre $x > y$,

$$C \cdot (x-y)^{\frac{1}{4}} \;=\; C \cdot (\sqrt{x-y})^{\frac{1}{2}} \;\geq\; C \cdot (\sqrt{x} - \sqrt{y})^{\frac{1}{2}} \;=\; C \cdot \sqrt{f(x) - f(y)}$$

A questo punto possiamo esaminare i due casi $f(x)-f(y) \leq C \cdot \sqrt{f(x) - f(y)}$ e $f(x) - f(y) > C \cdot \sqrt{f(x) - f(y)}$

Se $f(x) - f(y) \leq C \cdot \sqrt{f(x) - f(y)}$, allora

$$C \;\geq\; \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}} \;=\; \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Osserviamo però che $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ è arbitrariamente grande. Infatti, per $y = 0,\;\; \nexists C \in \mathbb{R}^+ : \; C > x^{\frac{1}{4}}\; \forall x$.

Quindi rimane il secondo caso:

$$f(x) - f(y) > C \cdot \sqrt{f(x) - f(y)} \implies C < \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

Ma questa differenza è arbitrariamente piccola.

$$\lim_{y \to x} \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 0$$

Quindi l'unica scelta di C che rispetta la condizione è $C = 0$, ma ciò non è possibile per definizione di holderianità. Quindi f non è $\frac{1}{4} - holderiana$.

Punto 3

Traccia Dimostrare che

$$f \in Lip(I) \quad\implies\quad f \in AC(I) \quad\implies\quad f \in UC(I) \quad\implies\quad f\; continua$$

e trovare un controesempio per ogni implicazione inversa.

Dimostrazioni

- $$f \in Lip(I) \implies f \in AC(I)$$

  Ricordando che

  $$f \in Lip(I) \Leftrightarrow \exists L > 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \;\; \forall x, y \in I$$

  Allora, fissati x_0, ..., x_n si ha che

  $$|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq L \cdot |x_{i-1} - x_i| \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}$$

  e in particolare

  $$\sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i| \geq \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(y)|$$

  Dato $\epsilon > 0$, sia $\delta = \frac{\epsilon}{L}$.

  $$\sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i| < \delta \implies \frac{1}{L} \cdot \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(y)| < \delta$$

  $$\sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(y)| < L\delta = \epsilon$$

  che era quello che volevamo dimostrare.

- $$f \in AC(I) \implies f \in UC(I)$$

  Ricordando che

  $$f \in AC(I) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 :$$

  $$\forall x_1 < x_2 < ... < x_n, \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i| < \delta \implies \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \epsilon$$

  Ma prendendo $N = 1$, $x_0 = y$, $x_1 = x$, la relazione richiesta diventa

  $$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

  che è la definizione di funzione uniformemente continua.

- $$f \in UC(I) \implies f continua$$