Misure Vettoriali e Proprietà di Radon-Nikodym

Matteo Gori

Relatore: Prof. Pietro Majer

Teorema di Radon-Nikodym

Il seguente teorema di analisi è ben noto.

Teorema di Radon-Nikodym

Dato uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$ e due misure ν e μ non-negative con ν finita, μ σ-finita e tali che $\nu \ll \mu$, esiste una $f \in L^1(\mu)$ tale che $\nu = f \cdot \mu$, ossia

$$\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{F}$.

L'obiettivo della tesi è investigare una generalizzazione di questo risultato al contesto di misure a valori in uno spazio di Banach X.

Misure vettoriali

Definizione

Dato uno spazio di Banach X e uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, una **misura vettoriale** è una funzione $\nu \colon \mathcal{F} \to X$ σ-additiva, ossia tale che per ogni successione di insiemi disgiunti $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right).$$

La **variazione** di ν è la misura reale $|\nu|$ tale che

$$|\nu|(E) = \sup_\pi \sum\nolimits_{F\in\pi} \|\nu(F)\|$$

dove π varia tra tutte le partizioni numerabili misurabili di E.
Inoltre la **variazione totale** di ν è $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$.

Esempi di misure vettoriali

Vediamo alcuni esempi di misure vettoriali:

- Data una $f \in L^1(\mathbb{R})$, abbiamo la misura reale $\nu(E) = \int_E f \, dx$ e $|\nu|$ è la misura indotta da $|f|$;
- Una misura a variazione totale infinita: su $\mathbb{N}$ definiamo $\nu(E) = \sum_{n \in E} \frac{e_n}{n} \in c_0$, la sua variazione totale è $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\nu(\{n\})\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$.

Assoluta continuità

In seguito ν e μ saranno rispettivamente una misura vettoriale e una misura reale non negativa sullo stesso spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$.

Diciamo che ν è μ-**assolutamente continua**, o $\nu \ll \mu$, se vale una delle condizioni della seguente proposizione.

Teorema di Pettis

Le seguenti affermazioni su ν e μ sono equivalenti:

1. $|\nu| \ll \mu$;
2. $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{F}$;
3. $\lim_{\mu(E)\to 0} \nu(E) = 0$, ossia per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che $\mu(E) < \delta \implies \|\nu(E)\| < \varepsilon$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

Funzioni misurabili

Definizione

Una **funzione semplice** è una $f : \Omega \to X$ della forma $f = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} x_i$ con $x_i \in X$ e $E_i \in \mathcal{F}$.

Definizione

Una funzione $f : \Omega \to X$ è detta μ-**misurabile** se esiste una successione (f_n) di funzioni semplici tale che $f_n \to f$ μ-q.o..

Ci sono altre possibili definizioni di funzione misurabile, che però non risultano equivalenti a questa, a meno che X non sia separabile.

Integrale di Bochner

Preliminarmente diciamo che una funzione semplice $f = \sum_{i=1}^{n} 1_{E_i} x_i$ è *integrabile* se $\mu(E_i) < \infty$ per ogni i e in tal caso definiamo il suo integrale come

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) x_i.$$

In generale diciamo che una f μ-misurabile è integrabile secondo Bochner se e solo se esiste una successione di funzioni semplici integrabili f_n tali che $\int \|f - f_n\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$; in tal caso poniamo

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Spazi L^p

Lemma

Una funzione μ-misurabile f è integrabile se e solo se $\int \|f\| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

Questo ci suggerisce di dare la seguente definizione.

Definizione

Dato un $p \in [1, \infty)$ o spazio $L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ è l'insieme delle f μ-misurabili tali che $\int \|f\|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$, quozientato per la relazione $f = g$ μ-q.o.. Con la norma $\|f\|_p = (\int \|f\|^p \, d\mu)^{1/p}$ risulta essere uno spazio di Banach.

Si definisce come al solito anche $L^\infty(\mu, \mathcal{F}; X)$ e risulta essere anch'esso uno spazio di Banach.

Proprietà dell'integrale

Data una $f \in L^1(\mu; X)$, la misura $\nu = f \cdot \mu$ tale che per ogni $E \in \mathcal{F}$

$$\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

è σ-additiva e ha variazione totale $\int \|f\| \, \mathrm{d}\mu < \infty$, quindi $L^1(\mu; X)$ si immerge *isometricamente* nello spazio delle misure a variazione totale finita $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$.

Speranza condizionale

L'unica applicazione lineare $\iota\colon L^p(\mu) \otimes X \to L^p(\mu; X)$ tale che $f \otimes x \mapsto f \cdot x$ risulta essere *iniettiva*. Perciò possiamo identificare $L^p(\mu) \otimes X$ con la sua immagine in $L^p(\mu; X)$. Inoltre $L^p(\mu) \otimes X$ è *denso* in $L^p(\mu; X)$ per $p \in [1, \infty)$.

Definizione

Data una sotto-σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, la **speranza condizionale vettoriale** è l'unico operatore limitato $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}\colon L^1(\mu, \mathcal{F}; X) \to L^1(\mu, \mathcal{G}; X)$ che estende $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} \otimes Id_X$.

Non è difficile verificare che la definizione è ben posta e che questo operatore ha norma pari a 1.

Proprietà della speranza condizionale

Lemma

Data una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ continua e convessa e una $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ tale che $\varphi \circ f \in L^1(\mu)$, si ha

$$\varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\varphi \circ f).$$

Dalla convessità di $\|\cdot\|^p$ si ottiene allora il seguente risultato, analogo al caso reale.

Corollario

Dato $p \in [1, \infty]$, se $f \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ allora $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\|_p \leq \|f\|_p$. In altre parole l'operatore $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} : L^p(\mu, \mathcal{F}; X) \to L^p(\mu, \mathcal{G}; X)$ è ben definito e ha norma pari a 1.

Proprietà della speranza condizionale

Infine scopriamo che la proprietà che caratterizza la speranza condizionale è vera anche in questo contesto, grazie ad argomenti di densità e alla disuguaglianza di Hölder.

Lemma

Date $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ e $g \in L^1(\mu, \mathcal{G}; X)$, allora $g = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)$ se e solo se

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{G}$.

Martingale vettoriali

Definizione

Una **martingala vettoriale** a valori in X è una successione $(M_n) \subset L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ con una filtrazione associata $(\mathcal{F}_n)$ tale che $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1})$ per ogni n.

Per il lemma sulle funzioni convesse se $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ è una martingala vettoriale, $(\|M_n\|) \subset L^1(\mu, \mathcal{F})$ è una submartingala.

Uniforme integrabilità

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset L^1(\mu; X)$ si dice **uniformemente integrabile** se è limitato in $L^1(\mu; X)$ e

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \left(\sup_{f \in S} \int_E \|f\| \, d\mu \right) = 0.$$

Nel caso reale gli insiemi uniformemente integrabili sono molto più belli, infatti vale il seguente risultato.

Teorema di Dunford-Pettis

Un sottoinsieme $S \subset L^1(\mu)$ è uniformemente integrabile se e solo se è relativamente sequenzialmente w-compatto.

Proprietà delle martingale

Con argomenti di densità si ottiene la seguente convergenza.

Teorema

Data una funzione $M \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ con $p \in [1, \infty)$ e una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ con $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N})$, la successione $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M)$ è una martingala tale che $M_n \to \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(M)$ in $L^p(\mu; X)$.

Sfruttando la disuguaglianza di Doob applicata alle opportune submartingale otteniamo anche un altro risultato ben noto su $\mathbb{R}$.

Teorema di Convergenza delle Martingale

Una martingala $(M_n) \subset L^p(\mu; X)$ con $p \in [1, \infty]$ che converge in $L^p(\mu; X)$, converge anche μ-q.o. allo stesso limite.

Proprietà delle martingale

Inoltre usando alcuni risultati relativi ai tempi d'arresto dimostriamo una proposizione particolarmente utile per studiare la RNP.

Lemma

Per uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, uno spazio X e una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ fissati le due affermazioni seguenti sono equivalenti:

1. Ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ relativa a $(\mathcal{F}_n)$ limitata in $L^1(\mu)$ è convergente μ-q.o.;
2. Ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ relativa a $(\mathcal{F}_n)$ uniformemente integrabile è convergente μ-q.o..

Risultati nel caso reale

Applicando il teorema di Dunford-Pettis e i lemmi appena visti otteniamo i seguenti risultati nel contesto di $X = \mathbb{R}$.

Lemma

Ogni martingala $(M_n) \subset L^p(\mu)$ limitata in $L^p(\mu)$ se $p \in (1, \infty)$ e uniformemente integrabile se $p = 1$ converge μ-q.o. e in $L^p(\mu)$.

Lemma

Ogni (sub)martingala $(M_n) \subset L^1(\mu)$ limitata in $L^1(\mu)$ converge μ-q.o..

Controesempi nel caso vettoriale

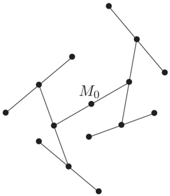
Vediamo un possibile controesempio a valori in c_0 sullo *spazio diadico* $(\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}, p^{\otimes \mathbb{N}})$:

Detta (e_n) la base canonica di c_0, definiamo la martingala $M_n = \sum_{k=1}^{n} \pi_k e_k$. Osserviamo che $\|M_n\|_\infty = 1$ per ogni n, quindi è limitata in $L^1(\mu; c_0)$, ma se $m \neq n$ si ha $\|M_m(\omega) - M_n(\omega)\|_\infty = 1$ per ogni $\omega \in \Omega$, perciò $(M_n(\omega))$ non converge per nessun $\omega \in \Omega$.

Alberi δ-separati

Definizione

Una **martingala δ-separata** è una martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ tale che M_1 è costante, M_n è semplice per ogni n e $\|M_{n+1}(\omega) - M_n(\omega)\| > \delta$ per ogni n e $\omega \in \Omega$. Un **albero δ-separato** è l'immagine di una martingala δ-separata.



Osserviamo che un albero δ-separato qualsiasi può essere realizzato con una martingala δ-separata definita su $[0, 1]$.

Proprietà di Radon-Nikodym

Definizione

Diciamo che X soddisfa la **proprietà di Radon-Nikodym** (RNP) se per ogni spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, per ogni ν misura a valori in X con variazione totale finita e μ misura reale non negativa σ-finita su questo tali che $\nu \ll \mu$, esiste una $f \in L^1(\mu; X)$ tale che $\nu = f \cdot \mu$, ossia $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

Poiché $|\nu| \ll \mu$, ammette una densità in $L^1(\mu)$ per il teorema di Radon-Nikodym, perciò basta verificare il caso $\mu = |\nu|$.

Esempio sulla RNP

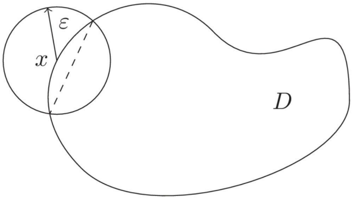
Vediamo una misura che non ammette densità:

Su uno spazio di probabilità *senza atomi* definiamo $\nu(E) = 1_E \in L^1(\mu)$, che ha variazione totale finita. Se ammettesse densità $g \in L^1(\mu, L^1(\mu))$, l'operatore $T_g(f) = \int fg\mathrm{d}\mu$ in generale è compatto, ma ristretto alle funzioni indicatrici è l'identità ed esistono successioni di indicatrici che non ammettono sottosuccessioni convergenti in $L^1(\mu)$, assurdo.

Dentabilità

Definizione

Un sottoinsieme $S \subset X$ si dice **dentabile** se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x \in S$ tale che $x \notin \overline{\text{conv}}(S \setminus B(x, \varepsilon))$. X si dice **dentabile** se ogni suo sottoinsieme limitato è dentabile.



Un esempio di insieme non dentabile è la palla unitaria chiusa di c_0, infatti non ha nemmeno punti estremali.

Teorema principale

Teorema di Rieffel-Maynard-Huff-Davis-Phelps

Dato un $p \in (1, \infty)$, le seguenti affermazioni su X sono equivalenti:

1. X soddisfa la RNP;
2. Ogni martingala (a valori in X) uniformemente integrabile converge q.o. e in L^1;
3. Ogni martingala limitata in L^1 converge q.o.;
4. Ogni martingala limitata in L^p converge q.o. e in L^p;
5. X non contiene alberi δ-separati limitati per alcun $\delta > 0$;
6. X è dentabile.

La dimostrazione che ho svolto verifica le implicazioni in modo circolare, vediamo ora l'idea di quelle più significative.

$1 \implies 2$

L'idea della dimostrazione è quella di definire la misura che corrisponderebbe ad un eventuale limite in $L^1(\mu; X)$. La misura in questione è

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E M_n \mathrm{d}\mu$$

che risulta ben definita proprio perché (M_n) è uniformemente integrabile. Infine la densità $M \in L^1(\mu; X)$ di ν è tale che

$$\int_E M \mathrm{d}\mu = \int_E M_n \mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{F}_n$ e quindi $M_n \to \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(M)$ in $L^1(\mu; X)$ e μ-q.o..

$5 \implies 6$

Si svolge in due passi:

- Dato un $S \subset X$ limitato e non dentabile per un qualche $\varepsilon > 0$, si verifica che l'insieme $\tilde{S} = S + B_{\varepsilon/2}$ è tale che $x \in \text{conv}(\tilde{S} \setminus B(x, \varepsilon/2))$ per ogni $x \in \tilde{S}$.
- Dato $x_0 \in \tilde{S}$, esistono degli $x_i \in \tilde{S}$ tali che $\|x_0 - x_i\| \geq \varepsilon/2$ e $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ per una qualche combinazione convessa degli x_i. Iterando questa costruzione generiamo (insiemisticamente) un albero $\frac{\varepsilon}{2}$-separato limitato, che è realizzabile tramite una martingala su $[0, 1]$.

$6 \implies 1$

È sufficiente risolvere il caso $\mu = |\nu|$. Per ogni $E \in \mathcal{F}$ tale che $|\nu|(E) > 0$ definiamo $x_E = \frac{\nu(E)}{|\nu|(E)}$ e $C_E = \{x_F : F \in \mathcal{F}, F \subset E\}$. La dimostrazione è composta da due parti:

- Per ogni $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{F}$ con $|\nu|(E) > 0$ esiste un $F \subset E$ misurabile con $|\nu|(F) > 0$ tale che $\operatorname{diam}(C_F) \leq 2\varepsilon$;
- Per ogni $\varepsilon > 0$ si può scrivere $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ con $\operatorname{diam}(C_{E_n}) \leq 2\varepsilon$, allora funzione $g_\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{E_n} 1_{E_n} \in L^\infty(|\nu|; X)$ è tale che

$$\|g_\varepsilon \cdot |\nu| - \nu\|_{M(\Omega,\mathcal{F};X)} \leq 2\varepsilon.$$

Perciò ν ammette densità rispetto a $|\nu|$ per chiusura di $L^1(|\nu|; X)$ in $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$.

Conseguenze del teorema

Corollario

Uno spazio di Banach ha la RNP se e solo se la hanno tutti i suoi sottospazi separabili chiusi.

Corollario

Se X^* è separabile, allora soddisfa la RNP.

Da ciò segue che in particolare ℓ^1 e gli spazi *riflessivi* soddisfano la RNP.

Conseguenze su $[0,1]$

Corollario

Uno spazio di Banach ha la RNP se e solo se ha la RNP rispetto a $[0,1]$ con la misura di Lebesgue.

Teorema

Uno spazio X soddisfa la RNP se e solo se ogni funzione $f : [0,1] \to X$ assolutamente continua è derivabile μ-q.o.. Inoltre in tal caso la derivata è una funzione $g \in L^1([0,1]; X)$ tale che

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(y)\mathrm{d}y$$

per ogni $t \in [0,1]$.

Proprietà di Krein-Milman

Definizione

Diciamo che uno spazio di Banach X ha la **proprietà di Krein-Milman** (KMP) se ogni $C \subset X$ chiuso limitato e convesso è la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti estremali.

Analogamente alla RNP prende il nome dal teorema di Krein-Milman, che afferma che ciò avviene se C è compatto.

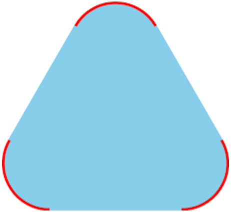
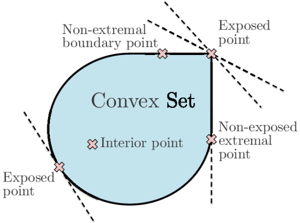


Figura: Punti estremali (in rosso) di un triangolo stondato

Proprietà di Krein-Milman forte

Definizione

Dato un insieme $C \subset X$ e un $x \in S$, diciamo che x è **fortemente esposto** in S se esiste un $x^* \in X^*$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\alpha > 0$ tale che $C \cap \{x^* \geq \alpha\}$ contiene x e ha diametro minore di ε. Diciamo che uno spazio X ha la **proprietà di Krein-Milman forte** (SKMP) se ogni $C \subset X$ chiuso limitato e convesso è la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti fortemente esposti.



Risultati sulla KMP

Teorema di Phelps-Rieffel

Uno spazio X soddisfa la RNP se e solo se soddisfa la SKMP.

In particolare se X soddisfa la RNP, allora soddisfa anche la KMP, mentre l'implicazione opposta è tutt'ora un problema aperto. Invece negli spazi duali le cose vanno meglio.

Teorema di Stegall-Huff-Morris

Lo spazio duale X^* soddisfa la RNP se e solo se soddisfa la KMP.

Riferimenti bibliografici (parziali)

[1] J. Diestel e J.J Uhl. *Vector Measures*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1977.

[2] T. Hytönen et al. *Analysis in Banach Spaces: Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.

[3] G. Pisier. *Martingales in Banach Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.