UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

Misure Vettoriali e Proprietà di Radon-Nikodym

Relatore: **Prof. Pietro Majer**

Candidato: **Matteo Gori**

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Abstract

L'obiettivo della tesi è quello di introdurre gli strumenti principali dell'integrazione a valori vettoriali, ponendo particolare attenzione sull'*integrale di Bochner*. Grazie a tali strumenti è possibile approfondire alcune proprietà geometriche degli spazi di Banach.

Il nucleo centrale dello studio è la **proprietà di Radon-Nikodym** (RNP), naturale estensione del teorema di Radon-Nikodym a misure vettoriali. Più precisamente, date una misura ν a valori in uno spazio di Banach X, una misura di variazione $|\nu|$ opportunamente definita e una misura reale positiva μ tale che $|\nu|$ sia assolutamente continua rispetto ad essa, ci chiediamo se ν ammette una densità vettoriale rispetto a μ.

Per rispondere a tale quesito, introdurremo alcuni strumenti probabilistici, come le *martingale vettoriali*, e ne studieremo le proprietà principali.

Scopriremo che la risposta dipende strettamente dallo spazio in cui ν assume i valori, in particolare vedremo delle comode proprietà geometriche equivalenti alla RNP, da cui dedurremo che molti spazi, ad esempio i *riflessivi*, soddisfano la RNP. È bene però notare che ci sono molti spazi concreti in cui questa proprietà fallisce, ad esempio c_0 e L^1.

Infine discuteremo alcune questioni attualmente meno comprese, come la *proprietà di Krein-Milman* (KMP) e la sua connessione con la RNP.

Indice

Capitolo 1

Misure Vettoriali

L'oggetto principale della tesi saranno le cosiddette *misure vettoriali*, di cui procediamo a dare una definizione precisa, seguendo principalmente [DU77].

Osservazione. In seguito X sarà uno spazio di Banach (reale) e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura con μ reale non negativa.

Definizione 1.0.1. *Dato uno spazio di Banach X e uno spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, una **misura vettoriale** è una funzione $\nu\colon \mathcal{F} \to X$ σ-additiva, ossia tale che per ogni successione di insiemi disgiunti $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right).$$

Osservazione. Tale somma è chiaramente invariante per permutazioni, ma ciò non è equivalente all'assoluta convergenza quando X non ha dimensione finita. È però equivalente alla sommabilità dell'insieme $\{\nu(E_n) : n \in \mathbb{N}\}$ nel senso dei limiti su insiemi filtranti, ossia esiste un $x \in X$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $F \subset \mathbb{N}$ finito tale che per ogni $F \subset E \subset \mathbb{N}$ finito

$$\left\| \sum_{n\in E} \nu(E_n) - x \right\| \leq \varepsilon.$$

Ci sarebbe molto da dire anche sulle misure finitamente additive, ma per i nostri scopi è sufficiente limitarsi al caso σ-additivo. Per approfondire si veda [DU77].

In seguito ν sarà una misura vettoriale.

Definizione 1.0.2. *La **variazione** di ν è la misura reale $|\nu|$ tale che*

$$|\nu|(E) = \sup_{\pi} \sum_{F\in\pi} \|\nu(F)\|$$

*per ogni $E \in \mathcal{F}$, dove π varia tra tutte le partizioni numerabili misurabili di E. Inoltre la **variazione totale** di ν è $\|\nu\| = |\nu|(\Omega)$.*

Osservazione. Chiaramente $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.

Vediamo alcuni esempi:

- Per una misura reale la variazione consiste nel cambiare segno a tutti i contributi negativi. Ad esempio se abbiamo una $f \in L^1(\mathbb{R})$, questa induce la misura reale $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}x$ ed è facile dimostrare che $|\nu|$ è la misura indotta da $|f|$;

- Una misura *solo* finitamente additiva: sia $c \subset l^\infty$ il sottospazio chiuso delle successioni convergenti. Il funzionale $x \mapsto \lim_n x_n$ definito su c ha norma 1, quindi si estende ad un funzionale $L \in (l^\infty)^*$ di norma 1. Si verifica facilmente che L è positivo e quindi $\mu(E) = L(\mathbb{1}_E)$ al variare di $E \subset \mathbb{N}$ è una misura finitamente additiva. Non può essere σ-additiva poiché i singoletti sono trascurabili e $\mathbb{N}$ ha misura 1.

- Una misura σ-additiva: dato un operatore limitato $T\colon L^1(\mu) \to X$ con μ finita, la misura tale che $\nu(E) = T(\mathbb{1}_E)$ al variare di E boreliano è σ-additiva. Inoltre $|\nu| \leq \|T\| \, \mu(E)$ e in particolare $\|\nu\| \leq \|T\| \, \mu(\Omega)$, ovvero ν ha variazione totale finita.

- Posto $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ una misura ν a valori in X è univocamente caratterizzata da una successione $(\nu(\{n\})) \subset X$ sommabile nel senso discusso precedentemente. Considerando la partizione in singoletti di $\mathbb{N}$ si verifica che la variazione totale di ν è $\sum_{n=1}^\infty \|\nu(\{n\})\|$.

- Una misura non limitata: nel contesto dell'esempio precedente poniamo $\nu(E) = \sum_{n\in E} \frac{e_n}{n} \in c_0$, allora ν è σ-additiva (se non avessi messo il coefficiente $\frac{1}{n}$ sarebbe stata solo finitamente additiva). La sua variazione totale è $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|\nu(\{n\})\| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = \infty$.

Osservazione. Saremo interessati principalmente a misure con variazione finita.

Chiamiamo $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$ l'insieme delle misure a valori in X di variazione totale finita, che risulta essere uno spazio di Banach con la norma della variazione totale $\|\nu\|$. Lo rivedremo quando parleremo della RNP.

Come nel caso reale ci alcune delle definizioni equivalenti di assoluta continuità. Diciamo che ν è **μ-assolutamente continua**, o $\nu \ll \mu$, se vale una delle condizioni della seguente proposizione.

Teorema 1.0.1 (Pettis)**.** *Le seguenti affermazioni su ν e μ sono equivalenti:*

1. $|\nu| \ll \mu$;

2. $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$ *per ogni* $E \in \mathcal{F}$;

3. $\lim_{\mu(E)\to 0} \nu(E) = 0$, *ossia per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che* $\mu(E) < \delta \implies \|\nu(E)\| < \varepsilon$ *per ogni* $E \in \mathcal{F}$.

Dimostrazione. Vediamo che 1 e 2 sono equivalenti: Se vale 1 $\mu(E) = 0$ implica che $|\nu(E)| = 0$, ma $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$, quindi $\nu(E) = 0$; d'altra parte se $\mu(E) = 0$ allora $\mu(F) = 0$ per ogni $F \subset E$ misurabile, quindi per definizione di $|\nu|$ si ha $|\nu|(E) = 0$. Inoltre assumendo 1, sappiamo che vale 3 con $|\nu|(E)$ al posto di $\nu(E)$, da cui ricordando che $\|\nu(E)\| \leq |\nu|(E)$ otteniamo che 1 $\implies$ 3. Infine 3 $\implies$ 2 è ovvia. $\square$

Infine ritroviamo anche per le misure vettoriali una versione adattata del classico teorema di decomposizione di Lebesgue. Come potremo dedurre in seguito, questo risultato è particolarmente significativo negli spazi in cui vale la RNP.

Teorema 1.0.2 (di Decomposizione di Lebesgue)**.** *Date una misura vettoriale ν e una misura reale μ non negativa e σ-finita, allora esistono due misure vettoriali ν_c e ν_s tali che*

- $\nu = \nu_c + \nu_s$;
- $\nu_c \ll \mu$;
- $x^* \circ \nu_s$ *e* μ *sono mutualmente singolari per ogni* $x^* \in X^*$.

Capitolo 2

Integrale di Bochner

In questa sezione ci poniamo come obiettivo di definire un integrale per funzioni a valori in uno spazio di Banach, analizzando la definizione di integrale di Bochner, che è la più forte tra quelle attualmente in uso (in appendice introduco la definizione più debole e generale di integrale di Dunford). Scopriremo strada facendo che questa è un'operazione molto più misteriosa del classico integrale di Lebesgue. Ho seguito principalmente [DU77], [Pis16] e [HvNVW16].

Come nel primo capitolo X sarà uno spazio di Banach (reale) e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura con μ reale non negativa.

2.1 Questioni tecniche

Iniziamo con una sezione di carattere tecnico per motivare alcune scelte che faremo in seguito. In particolare vogliamo confrontare tre possibili definizioni di funzione misurabile per una $f \colon \Omega \to X$. Per farlo ci serve la definizione preliminare di **funzione semplice**, ossia una $f : \Omega \to X$ della forma $f = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i} x_i$ con $x_i \in X$ e $E_i \in \mathcal{F}$. Ora possiamo passare alle definizioni:

1. f è detta **fortemente misurabile** se esiste una successione (f_n) di funzioni semplici tale che $f_n \to f$ puntualmente;

2. f è detta **misurabile** se per ogni $B \subset X$ boreliano $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$;

3. f è detta **debolmente misurabile** se $x^* \circ f$ è misurabile per ogni $x^* \in X^*$.

Lemma 2.1.1. *Se X è separabile i boreliani (forti) coincidono con i boreliani della topologia debole.*

Dimostrazione. Dato un insieme normante numerabile $S \subset X^*$ e un $\delta > 0$, per definizione abbiamo

$$\bigcap_{x^* \in S} (x^*)^{-1}([-\delta, \delta]) = \overline{B}(0, \delta)$$

e quindi $\overline{B}(0, \delta)$ è un boreliano debole. Inoltre poiché X è separabile ogni aperto (forte) si può realizzare come unione numerabile di palle chiuse, perciò anche gli aperti (forti) sono boreliani deboli e le due σ-algebre coincidono. □

Corollario 2.1.1. *In generale se f è misurabile è anche debolmente misurabile. Inoltre se X è separabile misurabilità e misurabilità debole coincidono.*

Dimostrazione. La prima affermazione segue banalmente osservando che i funzionali di X^* sono limitati e quindi misurabili. La seconda è ovvia per il lemma. □

Sebbene la misurabilità forte implichi la misurabilità debole, vediamo che si riesce comunque a recuperare la prima dalla seconda ponendo un'ipotesi aggiuntiva.

Teorema 2.1.1 (di Misurabilità di Pettis)**.** *Una funzione $f\colon \Omega \to X$ è fortemente misurabile se e solo se è debolmente misurabile e $\mathrm{Im}(f)$ è separabile.*

Dimostrazione. Se f è fortemente misurabile è anche debolmente misurabile per il lemma precedente, inoltre data una successione di funzioni semplici (f_n) tali che $f_n \to f$, si ha che $\bigcup_n \mathrm{Im}(f_n)$ e $\mathrm{Im}(f) \subset \overline{\bigcup_n \mathrm{Im}(f_n)}$, perciò $\mathrm{Im}(f)$ è separabile.
Passiamo ora all'altra implicazione. Sia $V \subset X$ un sottospazio separabile chiuso che contiene $\mathrm{Im}(f)$ con una successione densa $(x_n) \subset V$ con $x_1 = 0$ e $S \subset V^*$ un insieme normante numerabile per V che per il teorema di Hahn-Banach si può estendere ad un $\tilde{S} \subset X^*$ che è normante per V. Osserviamo che per un $x \in V$ qualsiasi si ha $\|f - x\| = \sup_{x^* \in \tilde{S}} |x^* \circ (f - x)|$ e le funzioni a destra sono misurabili, perciò anche $\|f - x\|$ è misurabile. Definiamo allora le funzioni $f_n\colon \Omega \to X$ tali che per ogni $\omega \in \Omega$ $f_n(\omega) = x_i$ con i il più piccolo indice $1 \leq j \leq n$ tale che $\|x_j\| \leq \|f(\omega)\|$ e $\|f(\omega) - x_j\|$ è minimo (tra i j tali che $\|x_j\| \leq \|f(\omega)\|$); queste sono semplici e misurabili poiché lo è $\|f - x\|$ con $x \in V$ e convergono puntualmente a f, quindi f è fortemente misurabile. □

Questo teorema ha delle semplici ma illuminanti conseguenze.

Corollario 2.1.2. *Se f è fortemente misurabile, esiste una successione di funzioni di semplici (f_n) tale che $f_n \to f$ e $\|f_n\| \leq \|f\|$ per ogni n.*

Corollario 2.1.3. *Se f è fortemente misurabile, allora è anche misurabile.*

Dimostrazione. Sfruttiamo il teorema di Pettis: se f è debolmente misurabile e $V \subset X$ è un sottospazio separabile chiuso che contiene $\mathrm{Im}(f)$, f è anche debolmente misurabile rispetto a V per il teorema di Hahn-Banach, perciò è anche misurabile rispetto a V e quindi rispetto a X. □

Osservazione. Le implicazioni opposte in generale sono false. Si veda [HvNVW16] per approfondire, in particolare per vedere alcuni possibili controesempi.

Corollario 2.1.4. *Se X è separabile le tre definizioni coincidono.*

Concludiamo questa sezione anticipando che la classica nozione di funzione misurabile a livello pratico è troppo debole per definire l'integrale di Bochner e troppo forte per sfruttare a pieno la definizione più generale di integrale di Dunford. Perciò in seguito non la nomineremo più e la misurabilità forte diventerà la definizione principale.

2.2 μ-misurabilità e integrazione

Definizione 2.2.1. *Una **funzione semplice** è una $f\colon \Omega \to X$ della forma $f = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i} x_i$ con $x_i \in X$ e $E_i \in \mathcal{F}$. Chiamiamo $F(\Omega, \mathcal{F}; X)$ lo spazio di tali funzioni.*

Definizione 2.2.2. *Una funzione $f\colon \Omega \to X$ è detta **μ-misurabile** se esiste una successione (f_n) di funzioni semplici tale che $f_n \to f$ μ-q.o..*

Definizione 2.2.3. *Una funzione $f\colon \Omega \to X$ è detta **debolmente μ-misurabile** se $x^* \circ f$ è μ-misurabile per ogni $x^* \in X^*$.*

Il teorema di misurabilità visto precedentemente in questo contesto ha una chiara formulazione analoga.

Teorema 2.2.1 (di Misurabilità di Pettis)**.** *Una funzione $f\colon \Omega \to X$ è μ-misurabile se e solo se è debolmente μ-misurabile e f è a valori μ-essenzialmente separabili, ossia esiste un $E \in \mathcal{F}$ trascurabile tale che $f(\Omega \setminus E)$ è separabile.*

Osservazione. Valgono tutte le conseguenze ottenute precedentemente, ad esempio la seguente.

Corollario 2.2.1. *Se X è separabile le due definizioni di μ-misurabilità sono equivalenti.*

Osservazione. Vediamo un esempio di funzione debolmente μ-misurabile ma non μ-misurabile: posto $X = l^2([0,1])$ (che non è separabile) e $f\colon [0,1] \to l^2([0,1])$ tale che $f(t) = e_t$ è il vettore t-esimo della base canonica. Dal teorema di rappresentazione di Riesz deduciamo che, dato un $x^* \in X^*$, $x^* \circ f$ ha supporto numerabile, ossia $x^* \circ f = 0$ μ-q.o., perciò f è debolmente misurabile. D'altra parte dato un $E \in \mathcal{F}$, $f(E)$ è un insieme discreto di cardinalità $|E|$, perciò è separabile solo se E è conumerabile, ma in tal caso $\mu(E) = 1$, quindi f non è a valori μ-essenzialmente separabili.

Adesso siamo pronti per definire le funzioni integrabili secondo Bochner e il loro **integrale di Bochner**. Preliminarmente diciamo che una funzione semplice $f = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i} x_i$ è *integrabile* se $\mu(E_i) < \infty$ per ogni i e in tal caso definiamo il suo integrale come

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) x_i.$$

In generale diciamo che una f μ-misurabile è integrabile secondo Bochner se e solo se esiste una successione di funzioni semplici integrabili f_n tali che $f_n \to f$ μ-q.o. (facoltativo) e $\int \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu \to 0$; in tal caso poniamo

$$\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu.$$

Osservazione. La definizione è ben posta e lineare in f, inoltre è chiaro come estenderla definizione a quella di integrale su un $E \in \mathcal{F}$ qualsiasi.

Lemma 2.2.1. *Una f μ-misurabile è integrabile se e solo se $\int \|f\| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.*

Dimostrazione. Se f è integrabile e (f_n) è una successione di funzioni semplici tali che $f_n \to f$ μ-q.o. e $\int \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu \to 0$, allora $\int \|f\| \, \mathrm{d}\mu \leq \int \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu + \int \|f_n\| \, \mathrm{d}\mu < \infty$. D'altra parte se $\int \|f\| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ sappiamo che esiste una successione di funzioni semplici (f_n) tale che $f_n \to f$ μ-q.o. e $\|f_n\| \leq \|f\|$ per ogni n. Ma allora osservando che $\|f - f_n\| \leq 2\|f\|$ e $\|f - f_n\| \to 0$, per il teorema di convergenza dominata (reale) $\int \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. □

Osservazione. In alternativa possiamo considerare una qualsiasi successione di funzioni semplici (f_n) tale che $f_n \to f$ e applicare il teorema di convergenza dominata (reale) alla successione $g_n = f_n \mathbb{1}_{\{\|f_n\| \leq 2\|f\|\}}$.

Gli spazi L^p sono un oggetto fondamentale in analisi funzionale. Anche in questo contesto li possiamo definire e risultano avere un ruolo altrettanto importante.

Definizione 2.2.4. *Dato un $p \in [1, \infty)$ o spazio $L^p(\mu; X)$ è l'insieme delle f μ-misurabili tali che $\int \|f\|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty$, quozientato per la relazione $f = g$ μ-q.o.. Con la norma $\|f\|_p = (\int \|f\|^p \, \mathrm{d}\mu)^{1/p}$ risulta essere uno spazio di Banach.*

Osservazione. Si definisce come al solito anche $L^\infty(\mu; X)$ e risulta essere anch'esso uno spazio di Banach.

Osservazione. Come nel caso reale, dimostrando la completezza scopriamo anche che una successione che converge in $L^p(\mu; X)$ ha una sottosuccessione che converge μ-q.o. allo stesso limite.

Vediamo ora alcuni risultati fondamentali dell'analisi reale che restano veri in questo contesto, iniziando da alcune semplici proprietà relative ad una funzione integrabile f:

1. $\left\| \int f \mathrm{d}\mu \right\| \leq \int \|f\| \, \mathrm{d}\mu$;
2. $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E f \mathrm{d}\mu = 0$;
3. Data una partizione misurabile e numerabile π di un $E \in \mathcal{F}$, $\int_E f \mathrm{d}\mu = \sum_{F\in\pi} \int_F f \mathrm{d}\mu$;
4. $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ è una misura vettoriale tale che $|\nu|(E) = \int_E \|f\| \, \mathrm{d}\mu$.

Dimostrazione. Dimostriamoli in ordine:

1. Se f è semplice la disuguaglianza è banale, in generale sia (f_n) una successione di funzioni semplici tali che $f_n \to f$ μ-q.o. e $\int \|f_n - f\| \, \mathrm{d}\mu \to 0$, allora la disuguaglianza passa chiaramente al limite a sinistra e anche a destra poiché $| \, \|f\| - \|f_n\| \, | \leq \|f - f_n\|$.

2. Sappiamo che l'enunciato è vero per la misura reale $\|f\| \cdot \mu$ e quindi per il punto 1 è vera anche per $f \cdot \mu$ (ma non sappiamo ancora che è una misura σ-additiva).

3. Per il punto 1 la serie è assolutamente convergente e quindi ha senso sommare a meno dell'ordine. Inoltre enumerando $\pi = (F_n)$ si ha
$$\left\| \int_E f \mathrm{d}\mu - \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} f \mathrm{d}\mu \right\| = \left\| \int_{E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} F_i} f \mathrm{d}\mu \right\|$$
e quindi tende a 0 per il punto 2.

4. Senza perdita di generalità poniamo $E = \Omega$, data una partizione di Ω numerabile e misurabile π abbiamo
$$\sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f \mathrm{d}\mu \right\| \leq \sum_{E \in \pi} \int_E \|f\| \, \mathrm{d}\mu = \int \|f\| \, \mathrm{d}\mu,$$
quindi $\|\nu\| \leq \int \|f\| \, \mathrm{d}\mu$. D'altra parte per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $g = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{E_i} x_i$ tale che $\int \|g - f\| \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$ e possiamo assumere che $\pi = \{E_1, \ldots, E_n\}$ sia una partizione di Ω. Vale chiaramente che $\sum_{E \in \pi} \left\| \int_E g \mathrm{d}\mu \right\| = \int \|g\| \, \mathrm{d}\mu$ e inoltre $| \int \|g\| \, \mathrm{d}\mu - \int \|f\| \, \mathrm{d}\mu | \leq \int | \, \|g\| - \|f\| \, | \mathrm{d}\mu \leq \int \|g - f\| \, \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$. Mettendole insieme otteniamo
$$\left| \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f \mathrm{d}\mu \right\| - \int \|f\| \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \left| \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f \mathrm{d}\mu \right\| - \int \|g\| \, \mathrm{d}\mu \right| + \varepsilon =$$
$$\left| \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E f \mathrm{d}\mu \right\| - \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E g \mathrm{d}\mu \right\| \right| + \varepsilon \leq \sum_{E \in \pi} \left\| \int_E (f - g) \mathrm{d}\mu \right\| + \varepsilon \leq$$
$$\sum_{E \in \pi} \int_E \|f - g\| \, \mathrm{d}\mu + \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$
Poiché ε può essere arbitrariamente piccolo abbiamo la tesi.

□

Osservazione. Queste proprietà equivalentemente affermano che $L^1(\mu; X)$ è naturalmente immerso isometricamente in $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$ tramite l'integrale di Bochner, e in particolare è chiuso in esso. Questo punto di vista sarà utile quando parleremo della RNP.

Corollario 2.2.2. *Date $f, g \in L^1(\mu; X)$, se $\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$ per ogni $E \in \mathcal{F}$, allora $f = g$ μ-q.o..*

Dimostrazione. Semplicemente la misura $(f - g) \cdot \mu$ ha variazione totale nulla, perciò per le proprietà dimostrate $\int \|f - g\| \, \mathrm{d}\mu = 0$ e quindi $f = g$ μ-q.o.. $\square$

Teorema 2.2.2 (di Convergenza Dominata)**.** *Date una successione $(f_n) \subset L^1(\mu; X)$ e una $g \in L^1(\mu)$ tali che esiste una f μ-misurabile per cui $f_n \to f$ μ-q.o. e $\|f_n\| \leq g$ μ-q.o. per ogni n, allora $\int \|f_n - f\| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. In particolare $\int f_n \mathrm{d}\mu \to \int f \mathrm{d}\mu$.*

Dimostrazione. Poiché $\|f - f_n\| \leq 2 \|g\|$ la prima affermazione segue dal teorema di convergenza dominata reale. La seconda affermazione segue dal fatto che $\left\| \int (f - f_n) \mathrm{d}\mu \right\| \leq \int \|f - f_n\| \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Vediamo ora un utile risultato sulla linearità dell'integrale di Bochner.

Lemma 2.2.2. *Dato un operatore limitato $T \colon X \to Y$ e una $f \in L^1(\mu; X)$ tali che anche $T \circ f \in L^1(\mu; Y)$, si ha*

$$T \left(\int f \mathrm{d}\mu \right) = \int (T \circ f) \mathrm{d}\mu.$$

Dimostrazione. L'identità è chiara per le funzioni semplici, invece per una f qualsiasi osserviamo che

$$\left\| T \left(\int f \mathrm{d}\mu \right) \right\| \leq \|T\| \left\| \int f \mathrm{d}\mu \right\| \leq \|T\| \, \|f\|_1$$

e analogamente

$$\left\| \int (T \circ f) \mathrm{d}\mu \right\| \leq \int \|T \circ f\| \, \mathrm{d}\mu \leq \int \|T\| \, \|f\| \, \mathrm{d}\mu = \|T\| \, \|f\|_1 .$$

Perciò l'identità passa al limite in $L^1(\mu; X)$. $\square$

Osservazione. La tesi resta vera anche se T è definito su un sottospazio di X ed è chiuso (se il sottospazio è chiuso ciò è equivalente alla limitatezza per il teorema del grafico chiuso), ma la dimostrazione è più complicata e il risultato è noto come teorema di Hille.

Lemma 2.2.3. *Se f e g sono μ-misurabili e tali che $x^* \circ f = x^* \circ g$ μ-q.o. per ogni $x^* \in X^*$, allora $f = g$ q.o..*

Dimostrazione. f e g sono a valori μ-essenzialmente separabili, quindi a meno di trascurabili possiamo considerare un sottospazio separabile chiuso $V \subset X$ che contiene sia $\mathrm{Im}(f)$ che $\mathrm{Im}(g)$. Possiamo prendere un insieme normante numerabile $S \subset V^*$ relativo a V e estenderlo per il teorema di Hahn-Banach ad un $\tilde{S} \subset X^*$. Allora $x^* \circ f = x^* \circ g$ per ogni $x^* \in \tilde{S}$ μ-q.o. e quindi $f = g$ μ-q.o.. $\square$

Osservazione. In alternativa se μ è finita possiamo prendere una successione $(E_n) \subset \mathcal{F}$ crescente tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$ e che f e g sono integrabili su ogni E_n. Allora per i due lemmi precedenti $\mathbb{1}_{E_n} f = \mathbb{1}_{E_n} g$ μ-q.o. per ogni n e abbiamo la tesi.

Lemma 2.2.4. *Se μ è finita, data una $f \in L^1(\mu; X)$ abbiamo*

$$\frac{1}{\mu(\Omega)} \int f \mathrm{d}\mu \in \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Im}(f)).$$

Dimostrazione. Se per assurdo non avviene, detto I tale valore, per i risultati sulla separazione dei convessi esistono un $x^* \in X^*$ e un $\alpha \in \mathbb{R}$ che separano $\{I\}$ e $\overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Im}(f))$, ossia in particolare $x^*(I) < \alpha \leq x^* \circ f(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$. Ricordando che $x^*(I) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int (x^* \circ f)\mathrm{d}\mu$ per il lemma 2.2.2 e integrando su Ω otteniamo $\int (x^* \circ f)\mathrm{d}\mu < \alpha\mu(E) \leq \int (x^* \circ f)\mathrm{d}\mu$, assurdo. □

Osservazione. Oppure con un argomento analogo alla dimostrazione del teorema di misurabilità di Pettis si può approssimare f con funzioni semplici a valori in $\mathrm{Im}(f)$, che quindi hanno le medie integrali in $\mathrm{conv}(\mathrm{Im}(f))$.

Osservazione. Tale affermazione si può anche invertire: se per un sottoinsieme convesso chiuso $C \subset X$ si ha $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \mathrm{d}\mu \in C$ per ogni $E \in \mathcal{F}$ con $\mu(E) > 0$, allora $\mathrm{Im}(f) \subset C$ a meno di insiemi trascurabili.

Osservazione. Valgono anche la classica formula di sostituzione, la disuguaglianza di Jensen e il teorema di Fubini per una coppia (μ, ν) con μ reale e ν vettoriale.

Scopriamo che per i punti di Lebesgue vale la stesso risultato del caso reale. Ci farà comodo quando parleremo delle conseguenze della RNP.

Teorema 2.2.3 (di differenziazione di Lebesgue)**.** *Data una $f \in L^1([0,1]; X)$, per quasi ogni $t \in [0,1]$ abbiamo*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(y) - f(t)\| \,\mathrm{d}\mu = 0$$

e quindi in particolare

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(y)\mathrm{d}\mu = f(t).$$

Dimostrazione. Sia $(x_n) \subset \mathrm{Im}(f)$ una successione densa in $\mathrm{Im}(f)$, applicando il teorema di differenziazione di Lebesgue alla funzione $\|f - x_n\|$ otteniamo che per quasi ogni t

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(y) - x_n\| \,\mathrm{d}\mu = \|f(t) - x_n\|$$

per ogni n. Ma allora

$$\limsup_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(y) - f(t)\| \, d\mu \leq \limsup_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(y) - x_n\| \,\mathrm{d}\mu + \|x_n - f(t)\|$$

e il secondo membro per quanto detto è pari a $2\|x_n - f(t)\|$, che è arbitrariamente piccolo per densità di (x_n) e quindi abbiamo la tesi. □

Osservazione. In alternativa si può dimostrare la disuguaglianza massimale di Hardy-Littlewood in modo analogo al caso reale.

Capitolo 3

Martingale Vettoriali

In questa sezione introduciamo le martingale a valori in uno spazio di Banach, che sono la naturale generalizzazione delle martingale reali. Per far questo sarà necessario studiare come si generalizza la speranza condizionale. Ho seguito principalmente [Pis16] e [DU77].

In seguito X sarà uno spazio di Banach (reale) e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità.

3.1 Speranza condizionale

Dati gli spazi $L^p(\mu)$ con $p \in [1, \infty]$ e X consideriamo l'unica applicazione lineare $\iota \colon L^p(\mu) \otimes X \to L^p(\mu; X)$ tale che $f \otimes x \mapsto f \cdot x$. Si verifica facilmente che è iniettiva: infatti preso un elemento $v = \sum f_i \otimes x_i$ nel nucleo, in cui senza perdita di generalità gli x_i sono linearmente indipendenti, si ha $\sum f_i \cdot x_i = 0$ e quindi $f_i = 0$ per ogni i. Inoltre $\mathrm{Im}(\iota)$ contiene le funzioni semplici e quindi è densa in $L^p(\mu; X)$ per $p \in [1, \infty)$: infatti data una $f \in L^p(\mu; X)$ abbiamo visto che esiste una successione di funzioni semplici (f_n) tale che $f_n \to f$ μ-q.o. e che $\|f_n\| \leq f$, e quindi $f_n \to f$ in $L^p(\mu; X)$ per il teorema di convergenza dominata. In seguito identificheremo $L^p(\mu) \otimes X$ con la sua immagine in $L^p(\mu; X)$, in modo puramente algebrico.

Osservazione. Se $p = \infty$ le funzioni semplici non sono dense, ma è facile vedere che lo diventano se consideriamo funzioni semplici numerabili.

Osservazione. Ci sono varie possibili definizioni di prodotto tensore tra spazi di Banach, ognuna con diverse proprietà universali. Adesso però vediamo solo le proprietà che ci serviranno senza appesantire l'esposizione. per approfondire si vedano [DU77] e [Rya02].

Lemma 3.1.1. *Dato un operatore $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu))$, l'operatore $T \otimes \mathrm{Id}_X$ si estende ad un operatore limitato $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L^1(\mu; X))$ tale che $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Dimostrazione. Basta verificare che $T \otimes \mathrm{Id}_X$ è limitato con norma $\|T\|$ sul sottospazio denso $F(\mu) \otimes X = F(\mu; X)$: sia $f = \sum \mathbb{1}_{E_i} x_i$ con gli $E_i \in \mathcal{F}$ disgiunti, allora

$$\|(T \otimes \mathrm{Id}_X)(f)\| = \left\| \sum T(\mathbb{1}_{E_i}) x_i \right\| \leq \|T\| \sum \mu(E_i) \|x_i\| = \|T\| \|f\| .$$

Infine per vedere che le norme sono uguali basta prendere una successione $(f_n) \subset L^1(\mu)$ che realizza $\|T\|$, un $x \in X$ non nullo e considerare $(f_n \otimes x) \subset F(\mu; X)$. $\square$

Osservazione. Con argomenti di densità si dimostra facilmente che $x^* \circ \tilde{T}(f) = T(x^* \circ f)$ per ogni $f \in L^1(\mu; X)$ e $x^* \in X^*$: infatti è banalmente vero per $f \in L^1(\mu) \otimes X$ e l'identità passa al limite per continuità di x^*, T e $\tilde{T}$.

Detta $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}$ la classica speranza condizionale reale in $L^1(\mu)$, da quanto visto segue che la prossima definizione è ben posta.

Definizione 3.1.1. *Data una sotto-σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, la* ***speranza condizionale vettoriale*** *è l'unico operatore limitato $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} \colon L^1(\mu, \mathcal{F}; X) \to L^1(\mu, \mathcal{G}; X)$ che estende $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} \otimes \mathrm{Id}_X$.*

Osservazione. Per quanto detto $x^* \circ \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(x^* \circ f)$ per ogni $x^* \in X^*$ e $f \in L^1(\mu; X)$.

Ora mostriamo un risultato sulla convessità fondamentale per studiare le martingale, che richiederà un lemma preliminare.

Lemma 3.1.2. *Data una funzione $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ inferiormente semi-continua e convessa, detto $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni affini continue $a \colon X \to \mathbb{R}$ tali che $a \leq \varphi$, allora*

$$\varphi = \sup_{a \in \mathcal{A}} a.$$

Dimostrazione. Il sopragrafico $S = \{(x, p) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq p\} \subset X \times \mathbb{R}$ è chiuso e convesso per ipotesi, quindi dato un punto $(y, q) \notin S$ per i lemmi sulla separazione di convessi esiste un funzionale $f \in (X \times \mathbb{R})^*$ tale che per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ $f(y, q) < \alpha$ e $f(x, p) \geq \alpha$ per ogni $(x, p) \in S$. f è della forma $f_1 + f_2$ con $f_1 \in X^*$ e $f_2 \in \mathbb{R}^*$ con f_2 invertibile per la condizione di separazione, allora la funzione affine continua $a = f_2^{-1} \circ (\alpha - f_1)$ è tale che $a \leq \varphi$ e $q \leq a(y) \leq f(y)$. Prendendo una tale funzione per ogni $(y, q) \notin S$ otteniamo la tesi. $\square$

Osservazione. Per approfondire queste questioni si può consultare il [RV73].

Lemma 3.1.3. *Data una funzione $\varphi : X \to \mathbb{R}$ continua e convessa e una $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ tale che $\varphi \circ f \in L^1(\mu)$, si ha $\varphi(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\varphi \circ f)$.*

Dimostrazione. Come al solito possiamo assumere che X sia separabile. Detto $\mathcal{A}$ l'insieme delle funzioni $a \colon X \to \mathbb{R}$ affini e continue tali che $a \leq \varphi$, sappiamo che $\varphi = \sup_{a \in \mathcal{A}} a$ e per la separabilità di X possiamo sostituire $\mathcal{A}$ con un qualche suo sottoinsieme numerabile (per la dimostrazione del lemma precedente). Inoltre per un $a \in \mathcal{A}$ abbiamo visto che $a \circ \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f) = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(a \circ f)$ per ogni $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$, perciò $a \circ \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\varphi \circ f)$, da cui prendendo il sup si ottiene la tesi. $\square$

Osservazione. Poiché $\|\cdot\|$ è convessa, $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\|f\|)$ per ogni $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$.

Corollario 3.1.1. *Dato $p \in [1, \infty]$, se $f \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ allora $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\|_p \leq \|f\|_p$. In altre parole l'operatore $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} : L^p(\mu, \mathcal{F}; X) \to L^p(\mu, \mathcal{G}; X)$ è ben definito e ha norma pari a 1.*

Dimostrazione. Per $p \in [1, \infty)$ iniziamo osservando che $\|\cdot\|^p : X \to \mathbb{R}$ è convessa: infatti dati $x, y \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$ abbiamo $\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^p \leq (\lambda \|x\| + (1-\lambda) \|y\|)^p \leq \lambda \|x\|^p + (1-\lambda) \|y\|^p$, dove l'ultima passaggio segue dalle disuguaglianze tra le medie p-esime. Perciò $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\|^p \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\|f\|^p)$ per ogni $f \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ e quindi integrando otteniamo

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\|_p \leq \left(\int \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\|f\|^p) \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\int \|f\|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \|f\|_p .$$

Invece per $p = \infty$ ricordiamo che $\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\|f\|)$ e quindi

$$\left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)\right\|_\infty \leq \left\|\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\|f\|)\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty .$$

$\square$

Osservazione. In alternativa si può dimostrare che ogni operatore positivo tra spazi $L^p(\mu)$ è tale che $T \otimes \mathrm{Id}_X$ è limitato e che quindi si estende a $L^p(\mu; X)$.

Lemma 3.1.4. *Date $f \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ e $g \in L^q(\mu, \mathcal{G})$ con p e q coniugati, si ha $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(gf) = g\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che l'affermazione è vera quando $X = \mathbb{R}$, quindi in generale è vera anche per $f \in L^p(\mu) \otimes X$. Infine passa alla chiusura per la disuguaglianza di Hölder. $\square$

Lemma 3.1.5. *Date $f \in L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ e $g \in L^1(\mu, \mathcal{G}; X)$, allora $g = \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)$ se e solo se*

$$\int_E f \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{G}$.

Dimostrazione. La condizione è necessaria per il lemma precedente ed è anche sufficiente per il lemma 2.2.2. $\square$

3.2 Martingale

Ora possiamo definire una martingala a valori in X allo stesso modo delle martingale reali. Svilupperemo anche alcuni risultati che riguardano solo le martingale reali perché hanno delle conseguenze importanti nel caso vettoriale e perché così facendo capiremo quali problemi abbiamo in questo contesto.

Definizione 3.2.1. *Una* ***martingala vettoriale*** *a valori in X è una successione $(M_n) \subset L^1(\mu, \mathcal{F}; X)$ con una filtrazione associata $(\mathcal{F}_n)$ tale che $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1})$ per ogni n.*

Osservazione. Si può dare la definizione più generale ma analoga di martingala definita su un insieme filtrante. Interpretando i limiti come limiti su insiemi filtranti, i risultati di cui parleremo si estendono facilmente a questo contesto.

Osservazione. Una martingala M_n è una martingala anche rispetto alla filtrazione $\mathcal{M}_n = \sigma(M_1, \dots, M_n)$.

Osservazione. Dal lemma sulle funzioni convesse segue che per una martingala vettoriale (M_n) e una funzione continua e convessa $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(M_n) \in L^1(\mu; X)$ per ogni n, la successione $(\varphi(M_n))$ è una submartingala (reale). In particolare $\|M_n\|$ è una submartingala.

Definizione 3.2.2. *Un sottoinsieme $S \subset L^1(\mu; X)$ si dice* ***uniformemente integrabile*** *se è limitato in $L^1(\mu; X)$ e*

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \left(\sup_{f \in S} \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu \right) = 0.$$

In generale gli insiemi uniformemente integrabili non sono sempre riconoscibili e sono strettamente correlati alla RNP.

Lemma 3.2.1. *Un sottoinsieme $S \subset L^1(\mu; X)$ è uniformemente integrabile se e solo se*

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{f \in S} \int_{\{\|f\| > t\}} \|f\| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Dimostrazione. Se S è uniformemente integrabile è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{f \in S} \mu(\{\|f\| > t\}) = 0.$$

Detta $M = \sup_{f \in S} \|f\|_1 < \infty$, per la disuguaglianza di Markov $\mu(\{\|f\| > T\}) \leq M/t$, da cui si ha la tesi. Se invece vale la proprietà dell'enunciato, per un $E \in \mathcal{F}$ e un $t > 0$ abbiamo

$$\int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu = \int_{E \cap \{\|f\| > t\}} \|f\| \,\mathrm{d}\mu + \int_{E \cap \{\|f\| \leq t\}} \|f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\{\|f\| > t\}} \|f\| \,\mathrm{d}\mu + t\mu(E)$$

da cui segue la tesi. □

Vediamo ora un paio di risultati sugli spazi L^p reali che ci saranno utili per confrontare il caso reale e il caso vettoriale.

Osservazione. Per $p \in (1, \infty)$ lo spazio $L^p(\mu)$ è riflessivo per il teorema di rappresentazione di Riesz, perciò la sua palla chiusa è sequenzialmente w-compatta. In altre parole una successione $(f_n) \subset L^p(\mu)$ limitata in $L^p(\mu)$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

Teorema 3.2.1 (Dunford-Pettis). *Un sottoinsieme $S \subset L^1(\mu)$ è uniformemente integrabile se e solo se è relativamente sequenzialmente w-compatto.*

Dimostrazione. Se S è relativamente sequenzialmente w-compatto si verifica con un facile argomento per assurdo che è uniformemente integrabile. Per l'altra implicazione dimostriamo che una successione $(f_n) \subset S$ ammette una sottosuccessione debolmente convergente: posto $f_n^k = \mathbb{1}_{\{|f_n| \le k\}} f_n$ con $k, n \in \mathbb{N}$, la successione $(f_n^k)_n \subset L^2(\mu)$ è limitata in $L^2(\mu)$ quindi per w-compattezza sequenziale della palla chiusa in $L^2(\mu)$, tramite un argomento diagonale si trova una una sottosuccessione di indici n_i tale che per ogni k la successione $(f_{n_i}^k)$ ammette un limite debole $g_k \in L^2(\mu)$; quindi anche in $L^1(\mu)$, per il teorema di rappresentazione di Riesz. Inoltre si verifica facilmente che se $(h_n) \subset L^1(\mu)$ converge debolmente ad una $h \in L^1(\mu)$ si ha $\|h\|_1 \le \liminf_{n\to\infty} \|h_n\|_1$, infatti basta scontrare con $g = \operatorname{sgn}(h) \in L^\infty(\mu)$. Perciò $\|g_k - g_h\|_1 \le \liminf_{i\to\infty} \left\| f_{n_i}^k - g_{n_i}^h \right\|_1$ e per l'uniforme integrabilità di (f_n) il secondo membro destro tende a 0, quindi (g_k) è una successione di Cauchy e ammette un limite $g \in L^1(\mu)$. Infine è facile vedere che allora $f_{n_i} \to g$ debolmente in $L^1(\mu)$. □

Osservazione. Dato $p \in (1, \infty)$, ogni sottoinsieme $S \subset L^p(\mu)$ limitato è uniformemente integrabile: infatti data una $f \in L^p(\mu)$ $\int_E |f| \mathrm{d}\mu \le \mu(E)^{1/q} \|f\|_p$ per la disuguaglianza di Hölder applicata a $(\mathbb{1}_E, f)$. Perciò per il teorema di Dunford-Pettis è relativamente sequenzialmente w-compatto in $L^1(\mu)$, che ha duale $L^\infty(\mu)$, che è denso in $L^q(\mu)$ e quindi S è anche relativamente sequenzialmente w-compatto in $L^p(\mu)$. Questo commento però lascia un po' il tempo che trova in quanto per dimostrare il teorema di Dunford-Pettis abbiamo utilizzato la w-compattezza sequenziale in $L^2(\mu)$.

Osservazione. Per approfondire queste questioni nel caso reale si può consultare [Kal21].

Vediamo un primo risultato positivo sulla convergenza delle martingale vettoriali.

Teorema 3.2.2. *Data una funzione $M \in L^p(\mu, \mathcal{F}; X)$ con $p \in [1, \infty)$ e una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ con $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N})$, la successione $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M)$ è una martingala tale che $M_n \to \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(M)$ in $L^p(\mu; X)$.*

Dimostrazione. Per comodità sostituiamo M con $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(M)$. Preliminarmente dimostriamo che $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^p(\mu, \mathcal{F}_n; X)} = L^p(\mu, \mathcal{F}_\infty; X)$: è sufficiente dimostrare che, fissato un x, $\mathbb{1}_E x$ appartiene alla chiusura per ogni $E \in \mathcal{F}_\infty$, ma l'insieme di tali $E \in \mathcal{F}_\infty$ è una σ-algebra per il teorema della classe monotona e contiene tutte le $\mathcal{F}_n$, quindi coincide con $\mathcal{F}_\infty$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un $k \in \mathbb{N}$ e una $M \in L^p(\mu, \mathcal{F}_k; X)$ tali che $\|f - M\|_p < \varepsilon$, perciò se $n \le k$

$$\|M - M_n\|_p \le \|M - f\|_p + \|f - M_n\|_p = \|M - f\|_p + \left\|\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M - f)\right\|_p \le 2\|M - f\|_p < 2\varepsilon.$$

Poiché ε era arbitrario abbiamo la tesi. □

Col prossimo risultato iniziamo a vedere che quando $X = \mathbb{R}$, o comunque quando X è di dimensione finita, le cose vanno molto meglio.

Corollario 3.2.1. *Una martingala $(M_n) \subset L^p(\mu)$ limitata in $L^p(\mu)$ se $p \in (1, \infty)$ e uniformemente integrabile se $p = 1$, converge in $L^p(\mu)$ ad una M tale che $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M)$ per ogni n.*

Dimostrazione. In entrambi i casi esiste una sottosuccessione (M_{n_k}) che converge debolmente ad una $M \in L^p(\mu, \mathcal{F}_\infty)$. In particolare per un qualunque $E \in \mathcal{F}_n$ abbiamo $\int_E M_{n_k} \mathrm{d}\mu \to \int_E M \mathrm{d}\mu$, ma quando $n_k \leq n$ il termine di sinistra è uguale a $\int_E M_n$, perciò $\int_E M_n \mathrm{d}\mu = \int_E M \mathrm{d}\mu$, da cui $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M)$ e la tesi segue dal teorema precedente. □

Introduciamo uno spazio di probabilità e una filtrazione, che chiameremo **diadici**, che daranno luogo a molti controesempi: dato $\{-1, 1\}$ con la probabilità uniforme p, consideriamo lo spazio prodotto $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ con la σ-algebra $\mathcal{F}$ generata dai cilindri e la probabilità prodotto $p^{\otimes \mathbb{N}}$. Consideriamo inoltre le proiezioni sulle coordinate π_n con $n \in \mathbb{N}$, che sono indipendenti, e la filtrazione $\mathcal{F}_n = \sigma(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ di cui notiamo che $|\mathcal{F}_n| = 2^n$ e $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_i : i \in \mathbb{N})$.

Definizione 3.2.3. *Data una filtrazione $\mathcal{F}_n$, un **tempo di arresto** relativo ad essa è una funzione $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tale che $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ per ogni n.*

Lemma 3.2.2. *Per ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$, la successione $(M_{n \wedge T})$ è una martingala rispetto alla stessa filtrazione.*

Dimostrazione. Prima di tutto $M_{n \wedge T} = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{T=k} + \sum M_n \mathbb{1}_{T \geq n}$, quindi appartiene a $L^1(\mu; X)$ per ogni n. Inoltre $M_{(n+1) \wedge T} - M_{n \wedge T} = \mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}}(M_{n+1} - M_n)$ e $\{T \geq n + 1\} = \{T \leq n\}^c \in \mathcal{F}_n$, perciò

$$\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{(n+1) \wedge T} - M_{n \wedge T}) = \mathbb{1}_{\{T \geq n+1\}} \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1} - M_n) = 0.$$

□

Lemma 3.2.3 (Disuguaglianza massimale di Doob)**.** *Data una submartingala (M_k) con $k = 0, \ldots, n$ e posto $M_n^* = \sup M_k$, si ha*

$$t\mu(\{M_n^* > t\}) \leq \int_{\{M_n^* > t\}} M_n \, d\mu$$

per ogni $t > 0$. Inoltre se $M_n^* \geq 0$, per ogni $p, q \in (1, \infty)$ coniugati si ha

$$\|M_n^*\|_p \leq q \, \|M_n\|_p \, .$$

Dimostrazione. Definiamo il tempo di arresto

$$T = \begin{cases} \min\{1 \leq k \leq n : M_k > t\} & \text{se } M_n^* > t \\ \infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

relativo alla filtrazione $\mathcal{F}'_k = \mathcal{F}_{k \wedge n}$. Allora per la prima affermazione abbiamo la serie di disuguaglianze

$$t\mu(\{M_n^* > t\}) = t\mu(\{T \leq n\}) = t\sum_{k=1}^{n}\mu(\{T = k\}) \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\{T=k\}} M_k \mathrm{d}\mu \leq$$
$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\{T=k\}} M_n \mathrm{d}\mu = \int_{\{T \leq n\}} M_n \mathrm{d}\mu = \int_{\{M_n^* > t\}} M_n \mathrm{d}\mu,$$

dove l'ultima disuguaglianza è dovuta alla proprietà delle submartingale. Per la seconda affermazione abbiamo

$$\|M_n^*\|_p^p = \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{M_n^* > t\})\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty pt^{p-2}\int_{\{M_n^* > t\}} M_n \mathrm{d}\mu \mathrm{d}t =$$
$$\int M_n \int_0^{M_n^*} pt^{p-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\mu = q\int M_n (M_n^*)^{p-1}\mathrm{d}\mu \leq q\left\|M_n\right\|_p \left\|M_n^*\right\|_p^{p-1}$$

e otteniamo la tesi dividendo per $\|M_n^*\|_p^{p-1}$. Il primo passaggio è una nota identità che segue dal teorema di Fubini-Tonelli, il secondo segue dall'affermazione precedente e l'ultimo dalla disuguaglianza di Hölder. $\square$

Ricordando che $\|M_n\|$ è una submartingala e passando ai sup si ottiene il seguente corollario.

Corollario 3.2.2. *Data una martingala* $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ *abbiamo*

$$\sup_{t>0} t\mu(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\| > t\}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_1$$

e per $p \in (1, \infty)$ *abbiamo anche*

$$\left\|\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|\right\|_p \leq q\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_p$$

Osservazione. Notiamo un'implicazione di questo enunciato che sarà utile quando parleremo della RNP: data una martingala $(M_n) \subset L^p(\mu; X)$ limitata in $L^p(\mu; X)$, la seconda disuguaglianza implica che è dominata da $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\| \in L^p(\mu; X)$. Perciò se converge μ.q.o. converge anche in $L^p(\mu; X)$ per il teorema di convergenza dominata.

Ora abbiamo gli strumenti per dimostrare un noto risultato nel caso reale, che però scopriamo essere vero anche nel caso vettoriale.

Teorema 3.2.3 (di Convergenza delle Martingale)**.** *Una martingala* $(M_n) \subset L^p(\mu; X)$ *con* $p \in [1, \infty]$ *che converge in* $L^p(\mu; X)$*, converge anche* μ*-q.o. allo stesso limite.*

Osservazione. Poiché $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_p$ e la tesi riguarda una convergenza puntuale, è sufficiente dimostrare il caso $p = 1$.

Dimostrazione. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|M_n - M_k\|_1 \leq \varepsilon$ per $n \geq k$ e definiamo la martingala (M_n') relativa a $(\mathcal{F}_n$ tale che $M_n' = M_n - M_k$ per $n \geq k$ e $M_n' = 0$ altrimenti. Allora per la disuguaglianza di Doob $\sup_{t>0} t\mu(\{\sup_{n\leq k} \|M_n - M_k\| > t\}) \leq \varepsilon$ e inoltre definita la funzione $f = \lim_{k\to\infty} \sup_{n,m\leq k} \|M_n - M_m\|$ abbiamo $f \leq 2\sup_{n\geq k} \|M_n - M_k\|$. Ma allora

$$\sup_{t>0} t\mu(\{f > 2t\}) \leq \sup_{t>0} t\mu(\{\sup_{n\geq k} \|M_n - M_k\| > t\}) \leq \varepsilon$$

e siccome ε è arbitrario $\mu(\{f > 2t\}) = 0$ per ogni $t > 0$, ossia $f = 0$ μ-q.o.. In altre parole converge M_n converge μ-q.o. e siccome ha già un limite in $L_p(\mu; X)$ questi due devono coincidere, ad esempio perché sono entrambe a maggior ragione convergenze in probabilità o perché una successione che converge in $L^p(\mu; X)$ ha una sottosuccessione che converge μ-q.o. allo stesso limite. □

Osservazione. In alternativa è anche possibile fare separatamente in casi $p = 1$ e $p \in (1, \infty)$ sfruttando la rispettiva disuguaglianza di Doob.

Questo teorema, unito al risultato precedente sul caso reale, ha un chiaro corollario.

Corollario 3.2.3. *Ogni martingala $(M_n) \subset L^p(\mu)$ limitata in $L^p(\mu)$ se $p \in (1, \infty)$ e uniformemente integrabile se $p = 1$ converge μ-q.o. e in $L^p(\mu)$.*

Adesso vediamo una proposizione che sarà fondamentale quando parleremo della RNP, che richiederà un semplice lemma preliminare.

Lemma 3.2.4. *Data una martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ limitata in $L^1(\mu; X)$, un $t > 0$ e il tempo di arresto $T = \inf\{n \in \mathbb{N} : \|M_n\| > t\}$, abbiamo*

$$\int_{\{T<\infty\}} \|M_T\| \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_1 .$$

Inoltre la martingala $(M_{n\wedge T})$ è uniformemente integrabile.

Dimostrazione. Dati due indici $1 \leq k \leq m$, poiché $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k$ abbiamo $\int_{\{T=k\}} \|M_k\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\{T=k\}} \|M_m\| \,\mathrm{d}\mu$, perciò

$$\int_{\{T\leq m\}} \|M_T\| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_{\{T=k\}} \|M_k\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_{\{T\leq m\}} \|M_m\| \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|_1 .$$

Dunque passando al sup in m otteniamo la prima affermazione e in particolare $\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} M_T \in L^1(\mu; X)$. Per la seconda affermazione basta notare che

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_{n\wedge T}\| \leq \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \|M_T\| + t.$$

Infatti se $T = \infty$ allora $\|M_n\| \leq t$ per ogni n e altrimenti $\|M_n\| \leq t$ per ogni $n < T$ e $\|M_T\| > t$. Poiché $\mathbb{1}_{\{T<\infty\}} \|M_T\| + t \in L^1(\mu)$ per la prima affermazione, abbiamo la tesi. □

Lemma 3.2.5. *Per uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, uno spazio X e una filtrazione $(\mathcal{F}_n)$ fissati le due affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. *Ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ relativa a $(\mathcal{F}_n)$ limitata in $L^1(\mu)$ è convergente μ-q.o.;*

2. *Ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ relativa a $(\mathcal{F}_n)$ uniformemente integrabile è convergente μ-q.o..*

Dimostrazione. L'implicazione $1 \implies 2$ è banale, poiché una martingala uniformemente integrabile in particolare è limitata. Per l'altra sia T il tempo di arresto del lemma precedente. Come abbiamo visto $(M_{n\wedge T})$ è uniformemente integrabile, quindi converge in $L^1(\mu; X)$ e μ-q.o.. Ciò significa che (M_n) converge μ-q.o. in $\{T < \infty\}$, perciò basta dimostrare che al variare di $t > 0$ $\mu(\{T < \infty\})$ diventa arbitrariamente piccolo: per il corollario 3.2.2

$$\mu(\{T < \infty\}) = \mu(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\| > t\}) \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|M_n\|}{t}$$

e abbiamo la tesi per $t \to \infty$. □

Anche questo risultato, unito al risultato precedente sul caso reale, ha una ovvia conseguenza ben nota nel caso reale.

Corollario 3.2.4. *Ogni martingala $(M_n) \subset L^1(\mu)$ limitata in $L^1(\mu)$ converge q.o..*

Quindi nel caso reale questa convergenza avviene, mentre nel caso vettoriale non è detto. In particolare più avanti scopriremo che succede se e solo X ha la RNP. Ora ci limitiamo a vedere un paio di controesempi sullo *spazio diadico*, rispettivamente in c_0 e $L^1(\mu)$:

- Detta (e_n) la base canonica di c_0, definiamo la martingala $M_n = \sum_{k=1}^n \pi_k e_k$. $\|M_n\|_\infty = 1$ per ogni n, quindi è anche limitata in $L^1(\mu; c_0)$, ma se $m \neq n$ $\|M_m(\omega) - M_n(\omega)\|_\infty = 1$ per ogni $\omega \in \Omega$, perciò $(M_n(\omega))$ non converge per nessun $\omega \in \Omega$.

- La martingala $M_n(\omega) = \prod_{k=1}^n (1 + \pi_k(\omega)\pi_k)$ è tale che $\|M_n(\omega)\|_1 = 1$ per ogni n e ω, quindi è anche limitata in $L^1(\mu; L^1(\mu))$, ma similmente a prima si ha $\|M_{n+1}(\omega) - M_n(\omega)\|_1 \geq 1$ per ogni n e ω.

Per le submartingale vale un risultato analogo.

Lemma 3.2.6. *Una submartingala $(M_n) \subset L^1(\mu)$ limitata in $L^1(\mu)$ converge q.o.. Se inoltre è uniformemente limitata converge anche in $L^1(\mu)$.*

Dimostrazione. Possiamo esprimere (M_n) (con $n \geq 0$ per comodità) tramite la cosiddetta *decomposizione di Doob*: definiamo $\Delta_n = M_n - M_{n-1}$, $d_n = \Delta_n - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta_n)$ (con $d_0 = \Delta_0$), $\tilde{M}_n = \sum_{k=0}^n d_k$ e $A_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{k-1}}(\Delta_k)$, allora $M_n = \tilde{M}_n + A_n$.

Osserviamo che $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(d_n) = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta_n) - \mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta_n) = 0$, ossia che $\tilde{M}_n$ è una martingala, e che $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_{n-1}}(\Delta_n) \geq 0$ per ogni n, ossia (A_n) una successione positiva e (puntualmente) crescente. Inoltre $\|A_n\|_1 = \int M_n \mathrm{d}\mu - \int M_0 \mathrm{d}\mu$ e quindi (A_n) è limitata in $L^1(\mu)$, perciò converge μ-q.o. e in $L^1(\mu)$ ad una $A \in L^1(\mu)$. Da questo segue che $|\tilde{M}_n| \leq |M_n| + A_n \leq |M_n| + A$ e quindi $\left\|\tilde{M}_n\right\|_1 \leq \|M_n\|_1 + \|A\|_1$, perciò $\tilde{M}_n$ è una martingala limitata in $L^1(\mu)$ e per il corollario 3.2.4 converge μ-q.o.. Infine se (M_n) è uniformemente integrabile lo è anche $\tilde{M}_n$, che quindi converge anche in $L^1(\mu)$. Ricordando che $M_n = \tilde{M}_n + A_n$ otteniamo la tesi. □

Osservazione. Quindi per una martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$, $\|M_n\|$ converge μ-q.o..

Introduciamo infine una classe di martingale che sarà centrale nello studio della RNP.

Definizione 3.2.4. *Una **martingala δ-separata** è una martingala $(M_n) \subset L^1(\mu; X)$ tale che M_1 è costante, M_n è semplice per ogni n e $\|M_{n+1}(\omega) - M_n(\omega)\| > \delta$ per ogni n e $\omega \in \Omega$. Un **albero δ-separato** è l'immagine di una martingala δ-separata.*

Una tale martingala è adattata rispetto alla filtrazione $\mathcal{M}_n = \sigma(M_1, \ldots, M_n)$, che è finita. In generale una σ-algebra finita è generata da una partizione finita di Ω e quindi una filtrazione finita è tale che questa partizione diventa più fine al crescere di n, ovvero ogni insieme di una partizione si scinde in finiti insiemi di quella successiva.
Detto questo un albero δ-separato si può effettivamente descrivere come un albero: data $\{E_1, \ldots, E_k\}$ la partizione che genera $\mathcal{M}_n$, possiamo scrivere $M_n = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{E_i} x_i$ per certi $x_i \in X$. La proprietà delle martingale in questo contesto si esprime equivalentemente affermando che per un E_i, che nella partizione $(n+1)$-esima si scinderà a sua volta in $\{F_1, \ldots, F_h\}$ su cui M_{n+1} assumerà i valori $y_1, \ldots, y_h$, abbiamo $\mu(E_i)x_i = \sum_{j=1}^{h} \mu(F_j) y_j$. Ossia x_i è una combinazione convessa degli y_j (cioè i suoi figli) e inoltre $\|y_j - x_i\| \geq \delta$ per ogni j.

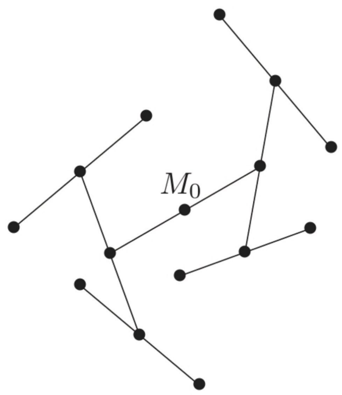

Figura 3.1: 4 passi di un albero δ-separato diadico

Lemma 3.2.7. *Un albero δ-separato qualsiasi può essere realizzato con una martingala δ-separata definita su $[0,1]$ con la misura di Lebesgue.*

Dimostrazione. Per realizzare un albero δ-separato è sufficiente riuscire a realizzare una filtrazione finita $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{B}([0,1])$ isomorfa a $\mathcal{M}_n$, ossia tale che date le rispettive partizioni che generano π'_n e π_n esista una successione di bigezioni $\pi_n \leftrightarrow \pi'_n$ che rispettino le inclusioni e la misura. Ma per una qualsiasi martingala δ-separata si realizza facilmente una filtrazione su $[0,1]$ isomorfa a $\mathcal{M}_n$: è sufficiente partizionare $[0,1]$ in intervalli con lunghezze uguali alle misure degli insiemi di π_1, poi procedere partizionando ognuno di questi intervalli in altri intervalli di lunghezza opportuna secondo π_2 e proseguire così ricorsivamente. $\square$

Capitolo 4

Proprietà di Radon-Nikodym e Dentabilità

Come abbiamo visto generalizzare le nozioni di teoria della misura al caso vettoriale porta con sé numerose complicazioni e richiede dei compromessi. A questo proposito approfondiamo una proprietà che diamo per scontata per misure reali, ma che in dimensione infinita può fallire anche in alcuni degli spazi più belli, come L^1. Ho seguito principalmente [DU77] e [Pis16].

In seguito X sarà uno spazio di Banach (reale) e $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile con μ reale non negativa σ-finita e ν a valori in X.

Definizione 4.0.1. *Diciamo che X soddisfa la **proprietà di Radon-Nikodym** (RNP) se per ogni spazio misurabile $(\Omega, \mathcal{F})$, per ogni ν misura a valori in X con variazione totale finita e μ misura reale non negativa σ-finita su questo tali che $\nu \ll \mu$, esiste una $f \in L^1(\mu; X)$ tale che $\nu = f \cdot \mu$, ossia $\nu(E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.*

Il teorema di Radon-Nikodym afferma che $X = \mathbb{R}$ soddisfa la RNP: infatti afferma questo risultato per misure ν reali non negative e finite, però una misura ν reale come nella definizione si può scrivere come $\nu = |\nu| - (|\nu| - \nu)$ dove $|\nu|$ e $|\nu| - \nu$ sono misure non negative finite ancora μ-assolutamente continue.

Osservazione. Analogamente al caso reale ci possiamo ridurre al caso con μ finita: presa una partizione numerabile in insiemi misurabili finiti di Ω, possiamo restringerci ad ognuno di questi. Abbiamo ancora la condizione di assoluta continuità e se ammettono una densità, allora la ammette anche $|\nu|$ rispetto a μ. Alternativamente sfruttando il teorema di Radon-Nikodym (reale) possiamo ridurci al caso $\mu = |\nu|$: infatti $|\nu|$ ammette densità rispetto a μ e $\nu \ll |\nu|$.

Per iniziare vediamo due esempi di misure vettoriali che non ammettono densità, rispettivamente su c_0 e $L^1(\mu)$:

- Dato $[0,1]$ con la misura di Lebesgue, definiamo $\nu(E) = (\int_E \sin(2^n \pi t) \mathrm{d}t)_n$, ovvero i coefficienti di Fuorier 2^n-esimi della funzione $\mathbb{1}_E$. Per il lemma di

Riemann-Lebesgue $\nu(E)$ è effettivamente in c_0 e inoltre $\|\nu(E)\| \leq \mu(E)$, quindi $|\nu| \leq \mu$ e in particolare $|\nu|$ ha variazione totale finita. Assumiamo per assurdo che ammetta una densità $g \in L^1(\mu; c_0)$, allora detta π_n la proiezione all'n-esima coordinata $\int_E \sin(2^n\pi t)\mathrm{d}\mu = \pi_n(\nu(E)) = \int_E g_n \mathrm{d}\mu$ (gli operatori limitati commutano con l'integrale di Bochner), da cui segue che $g_n(t) = \sin(2^n\pi t)$ μ-q.o.. Tale g però non è a valori in c_0: infatti detto $E_n = \{t \in [0,1] : |\sin(2^n\pi t)| \geq \sqrt{2}/2\}$ abbiamo $\mu(E_n) = 1/4$ per ogni n, da cui si verifica facilmente che $\mu(\limsup_n E_n) \geq 1/4$, ma su questo insieme la successione non tende a 0.

- Su uno spazio di probabilità qualsiasi $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ con μ *senza atomi* definiamo $\nu(E) = \mathbb{1}_E \in L^1(\mu)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$. Si verifica facilmente che $|\nu| = \mu$ e quindi ν ha variazione totale finita. Assumiamo per assurdo che ammetta densità $g \in L^1(\mu, L^1(\mu))$. In generale l'operatore $T_g \colon L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)$ tale che $T_g(f) = \int fg\mathrm{d}\mu$ è compatto: infatti se g è una funzione semplice l'operatore ha rango finito e quindi è compatto, mentre in generale data una successione di funzioni semplici (g_n) tale che $g_n \to g$ in $L^1(\mu; X)$ si ha $T_{g_n} \to T_g$ in norma operatoriale, quindi anche T_g è compatto. Ma nel nostro caso ristretto alle funzioni indicatrici è l'identità ed è facile creare una successione di indicatrici che non ha sottosuccessioni convergenti in $L^1(\mu)$: ad esempio esiste una successione $(E_n) \subset \mathcal{F}$ tale che $\mu(E_n) = 1/2$ per ogni n e $E_n \Delta E_m = 1/4$ per $n \neq m$.

Osservazione. Vale la RNP rispetto ad una misura se e solo se vale rispetto al suo completamento. Si verifica facilmente estendendo o restringendo opportunamente le misure a propria disposizione. L'unico dettaglio delicato è che è necessario osservare che, dette $\mathcal{F}$ e $\overline{\mathcal{F}}$ le due σ-algebre, una funzione $\overline{\mathcal{F}}$-misurabile è μ-q.o. uguale (chiaramente rispetto a $\overline{\mathcal{F}}$) ad una funzione $\mathcal{F}$-misurabile.

Osservazione. La RNP è invariante per isomorfismi lineari. Inoltre se X soddisfa la RNP, la soddisfano anche tutti i suoi sottospazi chiusi.

Prima di approfondire la RNP menzioniamo un altro teorema di grande importanza in analisi funzionale, che in questo contesto risulta equivalente ad essa.

Definizione 4.0.2. *Un operatore $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu); X)$ si dice **rappresentabile secondo Riesz** se esiste una $g \in L^\infty(\mu; X)$ tale che $T(f) = \int fg\mathrm{d}\mu$ per ogni $f \in L^1(\mu)$.*

Vediamo un esempio di operatore non rappresentabile: Sia μ una misura di probabilità senza atomi e consideriamo l'operatore $\mathrm{Id}_{L^1(\mu)}$. Se fosse rappresentabile tramite una $g \in L^\infty(\mu)$, avremmo anche una densità per la misura a valori in $L^1(\mu)$ citata precedentemente, ma come abbiamo visto ciò è impossibile.

Non è un caso se i controesempi a queste due proprietà sono così affini, infatti vale la seguente proposizione.

Lemma 4.0.1. *Uno spazio X soddisfa la RNP rispetto a una misura finita μ se e solo se ogni operatore $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu); X)$ è rappresentabile.*

Dimostrazione. Se X ha la RNP, definiamo la misura $\nu(E) = T(\mathbb{1}_E)$ per ogni $E \in \mathcal{F}$. Questa è μ-assolutamente continua, quindi esiste una $f \in L^1(\mu;X)$ tale che $T(\mathbb{1}_E) = \int_E f \mathrm{d}\mu$, inoltre $f \in L^\infty(\mu;X)$, infatti $\|\nu(E)\| \leq \|T\| \mu(E)$ e quindi $\int_E \|f\| \mathrm{d}\mu = |\nu|(E) \leq \|T\| \mu(E)$, da cui $\|f\|_\infty \leq \|T\|$ (in realtà sono uguali). Infine T è rappresentato da f per la densità delle semplici in $L^1(\mu)$.
Per l'altra implicazione se ho una misura ν a valori in X, con variazione totale finita e μ-assolutamente continua, $|\nu|$ ammette una densità $g \in L^1(\mu;X)$ e considerando gli insiemi della forma $\{n-1 \leq g < n\}$ otteniamo una partizione misurabile $(E_n) \subset \mathcal{F}$ di Ω tale che $(n-1)\mu(E) \leq |\nu|(E) \leq n\mu(E)$ per ogni $E \subset E_n$ misurabile. Definiamo allora gli operatori $T_n \in \mathcal{L}(L^1(\mu);X)$ che corrispondono a integrare nella misura $\nu \llcorner E_n$, che chiaramente soddisfano $\|T_n\| \leq n$. Ognuno di questi è rappresentabile da una $f_n \in L^\infty(\mu;X)$ e ora resta da verificare che la funzione $f = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{1}_{E_n} f_n$ è una densità in $L^1(\mu;X)$ per ν: infatti

$$\int_{\bigcup_{i=1}^n E_i} \|f\| \mathrm{d}\mu = |\nu| \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \leq |\nu|(\Omega) < \infty$$

per ogni n e quindi $f \in L^1(\mu;X)$ per il teorema di convergenza monotona (reale). Inoltre per ogni $E \in \mathcal{F}$

$$\nu(E) = \sum_{i=1}^\infty \nu(E \cap E_i) = \lim_{n \to \infty} \int_{E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)} f \mathrm{d}\mu = \int_E f \mathrm{d}\mu$$

dove l'ultimo passaggio vale per il teorema di convergenza dominata (vettoriale) e quindi $\nu = f \cdot \mu$. □

La RNP è apparentemente molto misteriosa, ma in realtà è strettamente correlata ad alcune proprietà geometriche dello spazio X. Procediamo allora introducendo una di queste.

Definizione 4.0.3. *Un sottoinsieme $S \subset X$ si dice* ***dentabile*** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $x \in S$ tale che $x \notin \overline{\mathrm{conv}}(S \setminus B(x,\varepsilon))$. X si dice* ***dentabile*** *se ogni suo sottoinsieme limitato è dentabile.*

Osservazione. S è dentabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un funzionale $x^* \in X^*$ e un $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $S \cap \{x^* > \alpha\}$ non è vuoto e $\mathrm{diam}(S \cap \{x^* > \alpha\}) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Se S è dentabile consideriamo un $x \in X$ ed un $\varepsilon > 0$ come nella definizione di dentabilità. $\{x\}$ e $\overline{\mathrm{conv}}(S \setminus B(x,\varepsilon))$ sono due convessi di cui il primo è compatto e il secondo è chiuso, quindi è una nota conseguenza del teorema di Hahn-Banach che esiste un $x^* \in X^*$ che li separa, ovvero che per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$ $\{x^* > \alpha\}$ e $\{x^* < \alpha\}$ sono due loro intorni aperti che li separano. Ma allora $S \cap \{x^* > \alpha\} \subset B(x,\varepsilon)$ e quindi ha diametro al più 2ε. Se invece vale l'altra condizione, per degli $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, preso un $x \in S \cap \{x^* > \alpha\}$ qualsiasi, vale la condizione di dentabilità per ε: infatti $S \setminus B(x,\varepsilon) \subset \{x^* \leq \alpha\}$ e essendo il secondo insieme convesso e chiuso, vale anche che $\overline{\mathrm{conv}}(S \setminus B(x,\varepsilon)) \subset \{x^* \leq \alpha\}$ e quindi non contiene x. □

Osservazione. Se $C = \overline{\mathrm{conv}}(S)$ è dentabile, anche S è dentabile. Quindi uno spazio X è dentabile se e solo se lo sono tutti i suoi sottoinsiemi limitati chiusi e convessi.

Dimostrazione. Dati degli $x^* \in X^*$, $\alpha, \varepsilon \in \mathbb{R}$ relativi a C come nell'osservazione precedente, $C \cap \{x^* \leq \alpha\}$ è chiuso e convesso, quindi se per assurdo $S \subset C \cap \{x^* \leq \alpha\}$ anche $C \subset C \cap \{x^* \leq \alpha\}$. Perciò esiste un $S \cap \{x^* > \alpha\}$ non è vuoto e ha diametro al più ε. □

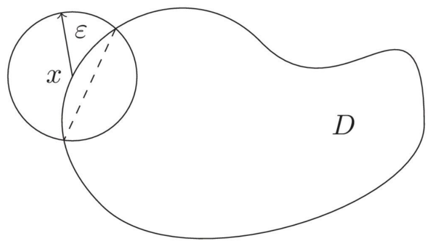

Figura 4.1: Un insieme con un punto ε-dentabile

In dimensione finita è facile vedere che ogni insieme limitato è dentabile, mentre per spazi qualsiasi non è detto. A questo proposito mostriamo un esempio di insieme non dentabile: sia B la palla unitaria (chiusa) di c_0, allora dato un $x \in S$ questo si può scrivere come $x = \frac{y+z}{2}$ tali che $\|x - y\| = \|x - z\| = 1/2$ per altri $y, z \in B$, ad esempio prendendo un n tale che $|x_n| < 1/2$ e ponendo $y = x + \frac{e_n}{2}$ e $z = x - \frac{e_n}{2}$. Perciò B non è $\frac{1}{2}$-dentabile.
Inoltre la stessa costruzione funziona analogamente con $L^1(\mu)$.

Adesso dimostriamo un lemma sulla dentabilità che ci sarà molto utile a breve.

Lemma 4.0.2. *Se per un $S \subset X$ e un $\varepsilon > 0$ vale che $x \in \overline{\mathrm{conv}}(S \setminus B(x, \varepsilon))$ per ogni $x \in S$, allora posto $\tilde{S} = S + B_{\varepsilon/2}$ si ha $x \in \mathrm{conv}(\tilde{S} \setminus B(x, \varepsilon/2))$ per ogni $x \in \tilde{S}$.*

Dimostrazione. Dato un $x \in \tilde{S}$, esiste un $y \in S$ tale che $\|x - y\| = \delta < \varepsilon/2$, allora fissato un $\tau > 0$ tale che $\tau + \delta < \varepsilon/2$, per ipotesi esistono degli $x_i \in S$ tali che $\|x_i - y\| \geq \varepsilon$ e che c'è una combinazione convessa di essi tale che $\left\| y - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| < \tau$. Ma allora posto $d = y - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ abbiamo $\sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + d + (x - y)) = y$ e per ogni i si ha

$$\|d + (x - y)\| \leq \|d\| + \|x - y\| < \varepsilon/2 \implies x_i + d + (x - y) \in \tilde{S}$$

e

$$\|x_i + d + (x - y) - x\| = \|(x_i - y) + d\| \geq \|x_i - y\| - \|d\| \geq \varepsilon - \tau \geq \varepsilon/2,$$

ovvero $x_i + d + (x - y) \notin B(x, \varepsilon/2)$, come volevamo. □

Passiamo ora al risultato più importante di questo capitolo, che come accennato gioverà molto dall'aggiunta delle martingale al nostro arsenale. Nella sua versione più grezza è dovuto a Rieffel, Maynard, Huff, Davis e Phelps.

Teorema 4.0.1. *Dato un $p \in (1, \infty)$, le seguenti affermazioni su X sono equivalenti:*

1. *X soddisfa la RNP;*
2. *Ogni martingala vettoriale uniformemente integrabile converge q.o. e in L^1;*
3. *Ogni martingala vettoriale limitata in L^1 converge q.o.;*
4. *Ogni martingala vettoriale limitata in L^p converge q.o. e in L^p;*
5. *X non contiene alberi δ-separati limitati per alcun $\delta > 0$;*
6. *X è dentabile.*

Dimostrazione. Dimostriamo le implicazioni in ordine:

- $1 \implies 2$: Si svolge in tre passi:
  - La misura *finitamente* additiva $\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \int_E M_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_E M_n \mathrm{d}\mu$ con $E \in \mathcal{F}$ è ben definita: dato un $E \in \mathcal{F}$ qualsiasi poniamo $x_n = \int_E M_n \mathrm{d}\mu$ e $\varphi_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(\mathbb{1}_E)$, allora per quanto detto $(\varphi)_n \to \mathbb{E}^{\mathcal{F}_\infty}(\mathbb{1}_E)$ in $L^1(\mu)$ e inoltre $x_n = \int \varphi_n M_n \mathrm{d}\mu$. Dimostriamo che il limite esiste: notiamo che per $n < m$ si ha $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(\varphi_n M_m) = \varphi_n M_n$ e quindi $x_n - x_m = \int M_m(\varphi_n - \varphi_m)\mathrm{d}\mu$, perciò, ricordando che $\|\varphi_n\|_\infty \le 1$ per ogni n, otteniamo
  $$\|x_n - x_m\| \le \|M_m(\varphi_n - \varphi_m)\|_1 \le 2 \int_{\{\|M_m\| > t\}} \|M_m\| \,\mathrm{d}\mu + t \,\|\varphi_n - \varphi_m\|_1$$
  per ogni $t > 0$. Allora (x_n) è di Cauchy e ammette limite, poiché (M_n) è uniformemente integrabile e (φ_n) è di Cauchy in $L^1(\mu)$.
  - ν è σ-additiva, ha variazione totale finita e $|\nu| \ll \mu$: ricordiamo che $(\|M_n\|)$ è una submartingala limitata in $L^1(\mu)$, perciò ammette un limite N in $L^1(\mu)$ per il lemma 3.2.6. Allora $\|\nu(E)\| \le \lim_{n\to\infty} \int_E \|M_n\| \,\mathrm{d}\mu = \int_A N \mathrm{d}\mu$ e questo implica facilmente che ν è σ-additiva e che $|\nu| \le N \cdot \mu$, quindi in particolare ν ha variazione totale limitata e $|\nu| \ll \mu$.
  - La densità $M \in L^1(\mu; X)$ di ν rispetto a μ è il limite μ-q.o. e in $L^1(\mu; X)$ di (M_n): dato un $E \in \mathcal{F}_k$ per qualche k, x_n è pari alla costante $\int_E M_k \mathrm{d}\mu$ per $n \ge k$, quindi $\int_E M \mathrm{d}\mu = \int_E M_k \mathrm{d}\mu$, perciò $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M)$ e quindi $M_n \to M$ μ-q.o. e in $L^1(\mu; X)$ per i teoremi 3.2.2 e 3.2.3.
- $2 \implies 3$: Questo è un lemma già dimostrato.
- $3 \implies 4$: Una martingala limitata in $L^p(\mu; X)$ è limitata anche in $L^1(\mu; X)$, quindi converge μ-q.o. e quindi anche in $L^p(\mu; X)$ per le osservazioni fatte precedentemente.

- $\neg 5 \implies \neg 4$: Un albero δ-separato limitato è l'immagine di una martingala limitata in $L^\infty(\mu; X)$, quindi in particolare in $L^p(\mu; X)$, che però non converge per nessun $\omega \in \Omega$.

- $\neg 6 \implies \neg 5$: Dato un $S \subset X$ limitato e non dentabile per un qualche $\varepsilon > 0$, consideriamo $\tilde{S} = S + B_{\varepsilon/2}$ come nel lemma precedente, che è ancora limitato. Dato $x_0 \in \tilde{S}$, esistono degli $x_i \in \tilde{S}$ tali che $\|x_0 - x_i\| \geq \varepsilon/2$ e $x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ per una qualche combinazione convessa degli x_i. Iterando questa costruzione per ogni x_i appena ottenuto generiamo (insiemisticamente) un albero $\varepsilon/2$-separato limitato, che per quanto detto è realizzabile tramite una martingala su $[0, 1]$.

- $6 \implies 1$: Come già osservato è sufficiente risolvere il caso $\mu = |\nu|$. Per ogni $E \in \mathcal{F}$ tale che $|\nu|(E) > 0$ definiamo $x_E = \frac{\nu(E)}{|\nu|(E)}$ e $C_E = \{x_F : F \in \mathcal{F}, F \subset E, |\nu|(F) > 0\}$ e notiamo che $\|x_E\| \leq 1$ per ogni $E \in \mathcal{F}$. La dimostrazione è composta da due parti, entrambe risolte con un argomento di esaustione:

  - Per ogni $\varepsilon > 0$ e $E \in \mathcal{F}$ con $|\nu|(E) > 0$ esiste un $F \subset E$ misurabile con $|\nu|(F) > 0$ tale che $\operatorname{diam}(C_F) \leq 2\varepsilon$: assumiamo per assurdo che esista un $\varepsilon > 0$ tale che $\operatorname{diam}(C_F) > 2\varepsilon$ per ogni possibile F. In particolare per ogni tale F e $x \in X$ esiste un $G \subset F$ misurabile tale che $\|x - x_G\| > \varepsilon$. Sia allora (G_n) un insieme massimale di misurabili disgiunti con $|\nu|(G_n) > 0$ in F tali che $\|x_F - x_{G_n}\| > \varepsilon$, che esiste per il lemma di Zorn; si deve avere che $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ (a meno di insiemi trascurabili), altrimenti esisterebbe un $G' \subset F \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ misurabile tale che $\|x_F - x_{G'}\| > \varepsilon$. Ma allora per la σ-additività di ν abbiamo $|\nu|(F)x_F = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\nu|(G_n)x_{G_n}$ con $\|x_F - x_{G_n}\| > \varepsilon$ per ogni n. Siccome questo accade per ogni $F \subset E$ non trascurabile, C_E non è ε-dentabile, assurdo.
  - Esiste una successione $(f_n) \subset L^1(|\nu|; X)$ che converge in $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$ a ν, da cui ν ammette densità poiché $L^1(|\nu|; X)$ è chiuso in $M(\Omega, \mathcal{F}; X)$: analogamente al primo passo, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione misurabile e numerabile di Ω, detta (E_n), tale che $|\nu|(E_n) > 0$ e $\operatorname{diam}(C_{E_n}) \leq 2\varepsilon$ per ogni n. Perciò la funzione $g_\varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{E_n} \mathbb{1}_{E_n} \in L^\infty(|\nu|; X)$ è tale che $\|g_\varepsilon \cdot |\nu| - \nu\|_M \leq 2\varepsilon$: infatti per un $E \in \mathcal{F}$ con $|\nu|(E) > 0$ vale che
$$\int_E g_\varepsilon \mathrm{d}|\nu| - \nu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\nu|(E \cap E_n)(x_{E_n} - x_{E\cap E_n})$$
e quindi, ricordando che $\operatorname{diam}(C_{E_n}) \leq 2\varepsilon$, data una partizione misurabile π di Ω abbiamo
$$\sum_{E\in\pi} \left\| \int_E g_\varepsilon \mathrm{d}|\nu| - \nu(E) \right\| \leq \sum_{E\in\pi} \sum_{n\in\mathbb{N}} |\nu|(E \cap E_n) \|x_{E_n} - x_{E\cap E_n}\| \leq 2\varepsilon.$$

$\square$

Osservazione. Si riesce anche a dare una dimostrazione diretta di 4 $\Longrightarrow$ 1, in modo da non passare per considerazioni puramente geometriche: come al solito posso porre $\mu = |\nu|$ e per ogni sotto-σ-algebra finita $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ posso definire $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\nu) = \sum_{E \in \mathcal{G}} \mathbb{1}_E \frac{\nu(E)}{|\nu|(E)}$. Questa è una martingala indicizzata sull'*insieme filtrante* di tali $\mathcal{G}$ ordinate parzialmente dall'inclusione. Essendo limitate in L^∞ e quindi anche in L^p, ammettono un limite $f \in L^p$ in L^p e quindi anche in L^1. Fissata una tale $\mathcal{G}$, la martingala condizionata a $\mathcal{G}$ è ancora una martingala e converge a $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(f)$ per la limitatezza di $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}$. Da questo segue banalmente che per ogni $E \in \mathcal{F}$ abbiamo

$$\int_E f \mathrm{d}|\nu| = \nu(E)$$

o equivalentemente $f \cdot |\nu| = \nu$.
A questo punto è chiaro che le affermazioni da 1 a 4 restano equivalenti se relativizzate ad un qualsiasi spazio di probabilità.

Osservazione. In alcuni libri meno recenti vengono utilizzate delle strategie che sono state poi migliorate. Ad esempio in [DU77] si passa attraverso una nozione intermedia di σ-dentabilità, che però non viene ripresa da libri più recenti, ad esempio [Pis16].

Osservazione. Esistono inoltre spazi che non hanno la RNP e che non ammettono alberi *diadici* δ-separati limitati, per approfondire si veda [BR80].

Concludiamo con alcune gradevoli conseguenze del teorema appena visto.

Corollario 4.0.1. *Uno spazio di Banach ha la RNP se e solo se la hanno tutti i suoi sottospazi separabili chiusi.*

Dimostrazione. Una martingala (M_n) assume valori in un sottospazio separabile chiuso, a meno di misura nulla. Quindi la tesi segue dagli enunciati equivalenti sulle martingale. □

Corollario 4.0.2. *Uno spazio X soddisfa la RNP se e solo se ogni martingala $(M_n) \subset L^\infty$ a valori in X e limitata in L^∞ converge q.o..*

Dimostrazione. Se X ha la RNP l'implicazione è ovvia per il teorema, in quanto L^∞ è il più piccolo spazio tra gli L^p. Se valesse l'altra condizione, X non ammetterebbe alberi δ-separati limitati, poiché vengono da martingale limitate in L^∞. □

Corollario 4.0.3. *Se X^* è separabile, allora soddisfa la RNP.*

Dimostrazione. In vista della proposizione precedente dimostriamo che ogni martingala limitata in L^∞ ammette limite q.o.. Se X^* è separabile anche X lo è e quindi la palla chiusa $\overline{B}_{X^*} \subset X^*$ è w*-metrizzabile e sequenzialmente w*-compatta. Sia $(M_n) \subset L^\infty(\mu; X)$ una martingala a valori in $\overline{B}$ e per ogni $\omega \in \Omega$ sia $f(\omega)$ un punto di w*-accumulazione per $(M_n(\omega))$, che esiste per w*-compattezza. Dato un sottoinsieme numerabile e denso $D \subset B_X$ e detta $\mathrm{ev}_x \in X^{**}$ la valutazione in un

$x \in X$, per ogni $d \in D$ la martingala reale $\mathrm{ev}_d \circ M_n \subset L^\infty(\mu)$ converge μ-q.o. e in $L^1(\mu)$ (anche di più in realtà) e il limite deve essere $\mathrm{ev}_d \circ f$. Allora, poiché la valutazione nei $d \in D$ è equilipschitz di costante 1, a meno di restringerci ad un qualche $\Omega' \in \mathcal{F}$ di misura piena, abbiamo $M_n(\omega) \overset{w^*}{\to} f(\omega)$ per ogni $\omega \in \Omega$. Ora è sufficiente dimostrare i due seguenti fatti:

- f è (fortemente) misurabile: notiamo che per un $x^* \in X^*$, essendo $\mathrm{ev}_d \circ f$ misurabile per ogni $d \in D$, si ha che $\|x^* - f(\omega)\| = \sup_{d \in D} |(x^* - f(\omega))(x)|$ è misurabile per la densità di D, quindi per le palle $B \subset X^*$ si ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Inoltre poiché X^* è separabile ogni aperto $U \subset X^*$ è unione numerabile di palle, quindi $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$, perciò f è fortemente misurabile per il teorema di misurabilità di Pettis, in quanto è misurabile e X^* è separabile.

- $M_n \to f$ puntualmente: per un $x^* \in X^*$ qualsiasi, ricordando che abbiamo $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(\mathrm{ev}_d \circ f) = \mathrm{ev}_d \circ M_n$, otteniamo

  $$\|x^* - M_n\| = \sup_{d \in D} |\mathrm{ev}_d \circ (x^* - M_n)| = \sup_{d \in D} |\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(\mathrm{ev}_d \circ (x^* - f))| \leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} \|x^* - f\|$$

  dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa. Come sappiamo $\mathbb{E}^{\mathcal{F}_n} \|x^* - f\| \to \|x^* - f\|$ μ-q.o., dunque ponendo $x^* = f(\omega)$ per un $\omega \in \Omega$ otteniamo che $\limsup_{n \to \infty} \|f(\omega) - M_n(\omega)\| = \|f(\omega) - f(\omega)\| = 0$ μ-q.o..

□

Corollario 4.0.4. *Se X è riflessivo, allora soddisfa la RNP.*

Dimostrazione. Sappiamo che un sottospazio chiuso $Y \subset X$ è a sua volta riflessivo, quindi in particolare è uno spazio duale. Perciò i sottospazi separabili chiusi di X sono duali separabili, quindi hanno la RNP e quindi ce l'ha anche X. □

Osservazione. Quindi gli spazi di Hilbert hanno la RNP.

Osservazione. A questo punto siamo in grado di affermare che la RNP in generale *non passa al quoziente*. Ad esempio l^1 ha la RNP essendo separabile e il duale di c_0, ma i suoi quozienti sono tutti e soli gli spazi di Banach separabili: infatti dato uno spazio separabile X e una successione $(x_n) \subset B_X$ densa in B_X, definiamo l'applicazione lineare $T\colon c_{00} \to X$ tale che $e_n \to x_n$ per ogni n. Ponendo la norma $\|\cdot\|_1$ su c_{00}, si verifica facilmente che T ha norma 1, quindi per densità si estende ad un operatore limitato $\tilde{T}\colon l^1 \to X$. Inoltre per una semplice applicazione del lemma di iterazione $\tilde{T}$ è anche aperto e surgettivo. Passando al quoziente abbiamo $\overline{T}\colon l^1/\ker(\tilde{T}) \hookrightarrow X$ che per quanto detto è bigettivo, limitato e aperto, quindi è un isomorfismo.
Detto questo un possibile quoziente di l^1 è quindi c_0, che non ha la RNP.

Corollario 4.0.5. *Uno spazio di Banach ha la RNP se e solo se ha la RNP rispetto a $[0,1]$ con la misura di Lebesgue.*

Dimostrazione. Se fissiamo una spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e relativizziamo il teorema precedente a questo, tutte le implicazioni restano vere tranne potenzialmente $5 \implies 6$, siccome a priori non tutti gli alberi δ-separati sono realizzabili con Ω. Come sappiamo invece questo è vero nel caso di $[0, 1]$ con la misura di Lebesgue. $\square$

Osservazione. Si verifica facilmente che uno spazio di probabilità *non atomico* realizza ogni albero δ-separato. Quindi il teorema relativizzato a questo resta vero.

Come ci suggerisce questo teorema è possibile analizzare la RNP da un punto di vista puramente differenziale, in particolare con metodi di analisi convessa, ottenendo gli stessi risultati. Questo è l'approccio seguito ad esempio da [FHH+11].
A questo proposito ci limitiamo a osservare le conseguenze dei risultati ottenuti in ambito differenziale.

Lemma 4.0.3. *Se X soddisfa la RNP, ogni funzione $f : [0, 1] \to X$ assolutamente continua è derivabile μ-q.o.. Inoltre in tal caso la derivata è una funzione $g \in L^1([0, 1]; X)$ tale che*

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(y)\mathrm{d}y$$

per ogni $t \in [0, 1]$.

Dimostrazione. Si può definire una misura su $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ tale che $\nu([a, b)) = f(b) - f(a)$, che risulta essere μ-assolutamente continua: infatti possiamo considerare la naturale filtrazione diadica su $[0, 1]$, definire la stessa martingale della dimostrazione di $4 \implies 1$ e da queste definire una misura limite analogamente alla dimostrazione di $1 \implies 2$, con le stesse verifiche. Quindi ν ammette una densità $g \in L^1([0, 1]; X)$ in particolare tale che

$$f(t) - f(0) = \int_0^t g(y)\mathrm{d}y$$

per ogni $t \in [0, 1]$. Perciò f è μ-q.o. derivabile per il teorema di differenziazione di Lebesgue vettoriale. $\square$

Osservazione. La misura definita nella prima parte della dimostrazione è univocamente determinata per il teorema della classe monotona, analogamente al caso reale.

Osservazione. Questa dimostrazione ci fa capire quanto le martingale vettoriali siano un linguaggio naturale per parlare della RNP. Infatti nel [FHH+11] questo stesso risultato ha una dimostrazione estremamente più complicata e piena di verifiche perché non è per nulla scontato che una tale ν esista.

Osservazione. In realtà è vero anche il viceversa. Per verificarlo, a partire da una misura vettoriale ν su $[0, 1]$ si può definire la funzione $f(t) = \nu([0, t])$, che essendo assolutamente continua ammette derivata q.o.. Da qua si verifica che la derivata di f è integrabile secondo Bochner sfruttando alcune proprietà dell'integrale di Pettis.

Capitolo 5

Ulteriori Sviluppi

5.1 Questioni Geometriche

Vediamo alcuni risultati di carattere strutturale sulla RNP, iniziando da un risultato che la collega alla ricerca delle basi di Schauder.

Come al solito X sarà uno spazio di Banach (reale) e $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura reale.

Teorema 5.1.1 (Dunford)**.** *Se X ammette una base di Schauder limitatamente completa $(x_n) \subset X$, allora ha la RNP.*

Dimostrazione. Preliminarmente notiamo che possiamo sostituire la norma $\|\cdot\|$ con la norma equivalente
$$\|x\|' = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) x_i \right\|$$
poiché la RNP è invariante per isomorfismi lineari. Così facendo, detti $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^* x_i$ gli operatori di proiezione alle prime n-coordinate, abbiamo $\|S_m(x)\| \leq \|S_n(x)\|$ per ogni $m \leq n$ e $x \in X$. Siano ν e μ due misure come nell'enunciato della RNP, allora le misure reali $x_n^* \circ \nu$ ammettono una densità $g_n \in L^1(\mu)$. Vogliamo quindi dimostrare che $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x_n$ è ben definita e integrabile ed è una densità per ν: dalla monotonia è chiaro che
$$\left\| \int_E \left(\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \right) \mathrm{d}\mu \right\| \leq \|\nu(E)\|$$
per ogni $E \in \mathcal{F}$, perciò passando alle variazioni totali
$$\int_E \left\| \sum_{i=1}^{n} g_i x_i \right\| \mathrm{d}\mu \leq |\nu|(E).$$

Quindi per la monotonia e per il teorema di convergenza monotona

$$\int_E \left(\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^n g_i x_i \right\| \right) \mathrm{d}\mu \le |\nu|(E) < \infty$$

da cui g è ben definita μ-q.o. poiché (x_n) è limitatamente completa e integrabile. Infine per il teorema di convergenza dominata abbiamo

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i^*(\nu(E))x_i = \lim_{n\to\infty} \int_E \left(\sum_{i=1}^n g_i x_i \right) \mathrm{d}\mu = \int_E g \mathrm{d}\mu$$

per ogni $E \in \mathcal{F}$. □

Passiamo ora ad alcune proposizioni che mettono in evidenza come ℓ^1 sia uno strumento prezioso nello studio della RNP.

Teorema 5.1.2 (Lewis-Stegall)**.** *Se μ è finita X soddisfa la RNP rispetto a μ se e solo se ogni operatore $T \in \mathcal{L}(L^1(\mu); X)$ ammette una fattorizzazione $T = AB$ attraverso ℓ^1.*

$$\begin{tikzcd} L^1(\mu) \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "A"'] & & X \\ & \ell^1 \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ si possono scegliere A e B in modo che $\|A\| \le \|T\| + \varepsilon$ e $\|B\| \le 1$.

Dimostrazione. Se T ammette una tale fattorizzazione, poiché ℓ^1 soddisfa la RNP A è rappresentata da una $g \in L^\infty(\mu; \ell^1)$, quindi T è rappresentato da $B \circ g \in L^\infty(\mu; X)$. D'altra parte Se X ha la RNP un tale T è rappresentato da una $g \in L^\infty(\mu; X)$. Inoltre ricordiamo che le funzioni semplici numerabili sono dense in $L^\infty(\mu; X)$, quindi fissato un $\varepsilon > 0$ esiste una successione $g_n = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{1}_{E_{n,k}} x_{n,k}$ con $(E_{n,k})_k$ misurabili disgiunti per ogni n tali che $\left\| g - \sum_{k=1}^n g_k \right\|_\infty < \varepsilon 2^{-n-1}$ per ogni n (notiamo che $\left\| x_{1,k} \right\| \le \|g\|_\infty + \varepsilon/2$ e $\left\| x_{n,k} \right\| < \varepsilon 2^{-n}$ per $n \ge 2$). Identificando $\ell^1 = \ell^1(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiamo allora

$$A(f)_{n,k} = \left\| x_{n,k} \right\| \int_{E_{n,k}} f \mathrm{d}\mu$$

per ogni $f \in L^1(\mu)$ e $n, k \in \mathbb{N}$ e

$$B((a_{n,k})) = \sum_{n,k\in\mathbb{N}} a_{n,k} \frac{x_{n,k}}{\left\| x_{n,k} \right\|}$$

per ogni $(a_{n,k}) \in \ell^1$. Allora ricordando che $\|T\| = \|g\|_\infty$ le disuguaglianze sulla norma sono chiare e inoltre $T = AB$, come volevamo. □

Osservazione. A questo punto saremmo tentati di pensare che ogni spazio con la RNP contiene una copia di ℓ^1, ma questo è falso. Ad esempio ℓ^2 ha la RNP essendo uno spazio di Hilbert, ma non ci si può immergere ℓ^1: se così fosse ℓ^1 sarebbe isomorfo ad uno spazio di Hilbert e quindi avrebbe duale isomorfo a sé stesso (antilinearmente isomorfo se lavoriamo su $\mathbb{C}$), ma $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$, che non è separabile.

Citiamo senza dimostrazione un fatto su ℓ^1 dimostrato da Pelczynski, che ci aiuterà ad ottenere il prossimo risultato.

Lemma 5.1.1 (Pelczynski)**.** *I sottospazi di dimensione infinita complementati di ℓ^1 sono isomorfi a ℓ^1.*

Teorema 5.1.3 (Lewis-Stegall)**.** *Se μ è una misura finita, un sottospazio di dimensione infinita complementato $X \subset L^1(\mu)$ soddisfa la RNP se e solo se è isomorfo a ℓ^1.*

Dimostrazione. Se $X \simeq \ell^1$ soddisfa la RNP. D'altra parte sia $\pi \colon L^1(\mu) \to X$ una proiezione su X, poiché X soddisfa la RNP π ammette una fattorizzazione AB attraverso ℓ^1. Notiamo che $A|_X B = \mathrm{Id}_X$ e sappiamo che questo implica $A(X)$ è complementato da $\ker(B)$ in ℓ^1 e $X \simeq A(X)$, quindi $X \simeq \ell^1$ per il lemma precedente. $\square$

5.2 Proprietà di Krein-Milman

Per concludere studiamo un'altra proprietà degli spazi di Banach. A prima vista può sembrare completamente scorrelata dalla RNP, ma come vedremo c'è invece una forte connessione.

Definizione 5.2.1. *Diciamo che uno spazio di Banach X ha la **proprietà di Krein-Milman** (KMP) se ogni $C \subset X$ chiuso limitato e convesso è la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti estremali.*

Osservazione. Il teorema di Krein-Milman afferma che ciò succede sicuramente quando C è compatto.

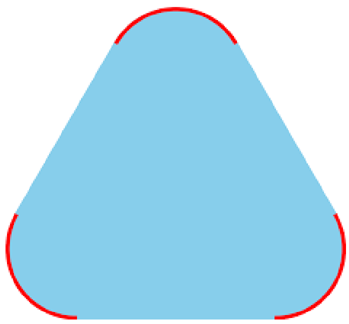

Figura 5.1: Punti estremali (in rosso) di un triangolo stondato

Dati un $C \subset X$ limitato chiuso e convesso, un $x^* \in X^*$ tale che $\|x^*\| = 1$ e un $\alpha > 0$, per comodità definiamo la *fetta* (slice)

$$S(x^*, \alpha, C) = \{x \in C : x^*(x) + \alpha \geq \sup_C x^*\} = C \cap \{x^* \geq \sup_C x^* - \alpha\}.$$

Definizione 5.2.2. *Dato un insieme $C \subset X$ e un $x \in S$, diciamo che x è* ***fortemente esposto*** *in S se esiste un $x^* \in X^*$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\alpha > 0$ tale che $S(x^*, \alpha, C)$ contiene x e ha diametro minore di ε. Diciamo che uno spazio X ha la* ***proprietà di Krein-Milman forte*** *(SKMP) se ogni $C \subset X$ chiuso limitato e convesso è la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti fortemente esposti.*

Osservazione. $x \in C$ è fortemente esposto da $x^* \in X^*$ se e solo se per ogni $(x_n) \subset C$ tale che $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = \sup_C x^*$ si ha $x_n \to x$.

Lemma 5.2.1. *Dati $x^*, y^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ tali che $|y^*(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ e $x^*(x) = 0$, allora* $\min(\|x^* + y^*\|, \|x^* - y^*\|) \leq \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia z^* un estensione secondo il teorema di Hahn-Banach di $y^*|_{\ker(x^*)}$, che chiaramente soddisfa $\|z^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Inoltre poiché $y^* - z^*$ e x^* hanno lo stesso nucleo $y^* - z^* = \alpha x^*$ per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$. Ora notiamo che $|1 - |\alpha|| = |\,\|y^*\| - \|y^* - z^*\|\,| \leq \|z^*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi se $\alpha \geq 0$ si $\|x^* - y^*\| = \|(1-\alpha)x^* - z^*\| \leq \varepsilon$ e si conclude analogamente se $\alpha < 0$. □

Lemma 5.2.2 (Bishop)**.** *Sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso limitato e convesso tale che per ogni fetta $S(x^*, \alpha, C)$ e $\varepsilon > 0$ esiste una fetta $S(y^*, \beta, C)$ di diametro minore di ε tale che $S(y^*, \beta, C) \subset S(x^*, \alpha, C)$ e $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$. Allora ogni fetta di C contiene un punto fortemente esposto di C e in particolare C è la chiusura dell'inviluppo convesso dei suoi punti fortemente esposti.*

Dimostrazione. Senza perdita di generalità assumiamo che C sia contenuto nella palla unitaria di X. Data la fetta $S(x^*, \alpha, C)$ costruiamo ricorsivamente a partire da questa una successione di fette decrescenti $S_n = S(y_n^*, \beta_n, C)$ di diametro minore di $\beta_n 2^{-n}$ tali che $\left\|y_{n+1}^* - y_n^*\right\| < \beta_n 2^{-n}$ e $\beta_{n+1} \leq \frac{\beta_n}{2}$ e per ogni n (e per $\|y_n^*\| = 1$ per definizione di fetta). Allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{x_0\}$ per un qualche $x_0 \in C$, dunque basta dimostrare che x è fortemente esposto da x^* e a questo scopo è sufficiente verificare che definitivamente $S(x^*, \beta_n/4, C) \subset S(y_n^*, \beta_n, C)$: dalle condizioni sulle fette segue che $\|x^* - y_n^*\| < \beta_n 2^{-n+1}$ per $n \geq 3$ e quindi $|x^*(x) - y_n^*(x)| < \beta_n/4$ per ogni $x \in C$, perciò dato un $x \in S(x^*, \beta_n/4, C)$ abbiamo

$$\sup_C y_n^* \leq \sup_C x^* + \beta_n/4 \leq x^*(x) + \beta_n/2 \leq y_n^*(x) + 3\beta_n/4.$$

Per la seconda affermazione sia $C_0 \subset C$ la chiusura dell'inviluppo convesso dei punti estremali di C e per assurdo $C_0 \neq C$, allora dato un $x \in C \setminus C_0$ esiste un $x^* \in X^*$ che separa C_0 e $\{x\}$, ma allora c'è una fetta di C disgiunta da C_0, che per quanto detto contiene un punto estremale, assurdo. □

Lemma 5.2.3 (Phelps). *Se X soddisfa la RNP, dati un $C \subset X$ chiuso limitato e convesso e un $x^* \in X^*$ con $\|x^*\| = 1$ tali che $C \subset \{x^* \geq 0\}$ e $x^*|_C \neq 0$, per ogni $0 < \varepsilon < 1$ c'è una fetta $S(y^*, \beta, C) \subset C \cap \{x^* > 0\}$ di diametro minore di ε e tale che $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Poniamo $K = \ker(x^*)$ e notiamo che così facendo l'inclusione equivalentemente afferma che $S(y^*, \beta, C) \cap K = \emptyset$. La dimostrazione si divide in due parti:

- Esiste un $y^* \in X^*$ tale che $S(y^*, \beta, C)$ ha diametro minore di ε ed è disgiunto da $C \cap K$: consideriamo uno $z \in C \cap \{x^* > 0\}$ e per ogni $x \in C \cap K$ definiamo l'operatore $T_x = \mathrm{Id}_X - 2x^* \frac{x-z}{x^*(z)} \in \mathcal{L}(X)$, che si verifica avere le seguenti proprietà:

  1. $x = \frac{1}{2}(z + T_x(z))$;
  2. $T_x^2 = \mathrm{Id}_X$;
  3. $T_x|_K = \mathrm{Id}_K$;
  4. i T_x sono equilipshitz per una qualche costante $M_0 > 0$.

  Definiamo ora $\mathcal{H} = \{C\} \cup \{T_x(C) : x \in C \cap K\}$ e

  $$C_1 = \overline{\mathrm{conv}}\left(C \cup \bigcup_{x \in C \cap K} T_x(C)\right)$$

  che per (4) è limitato e quindi è dentabile, perciò esiste una fetta $S(y^*, \alpha, C_1)$ di diametro minore di $d = \min(x^*(z), \frac{\varepsilon}{M_0})$. Per definizione di C_1 esiste un $C_0 \in \mathcal{H}$ tale che $\sup_{C_0} y^* \geq \sup_{C_1} y^* - \alpha$ e quindi esiste un $\beta > 0$ tale che $S(y^*, \beta, C_0) \subset S(y^*, \alpha, C_1)$. Ora verifichiamo che $S(y^*, \alpha, C_1)$, e di conseguenza $S(y^*, \beta, C_0)$, è disgiunto da $C \cap K$: per assurdo prendiamo un $x \in C \cap K \cap S(y^*, \alpha, C_1)$, allora per definizione della fetta e (1) un segmento tra $\overline{xz}$ e $\overline{xT_x(z)}$ è contenuto in $S(y^*, \alpha, C_1)$, ma $\|x - T_x(z)\| = \|x - z\| \geq x^*(z)$ e quindi è assurdo per la disuguaglianza su d. Ora se $C_0 = C$ abbiamo la fetta desiderata, altrimenti $C_0 = T_x(C)$ per un qualche $x \in C \cap K$ e quindi

  $$T_x^{-1}(S(y^*, \beta, C_0)) = S(y^* \circ T_x, \beta, C)$$

  è una fetta di diametro al più ε per la disuguaglianza su d ed è disgiunta da $C \cap K$ poiché T_x fissa K.

- Modifichiamo y^* per ottenere un funzionale che soddisfa anche $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$: Posto $\lambda = 4\frac{M}{\varepsilon}$, definiamo $F = \overline{\mathrm{conv}}(C \cup \{x \in K : \|x\| \leq \lambda\})$. Applicando la costruzione del punto 1 a F si ottiene una fetta $S(y^*, \beta, F)$ di diametro minore di ε disgiunta da $F \cap K$. Notiamo allora che $\sup_C y^* = \sup_F y^*$ e quindi $S(y^*, \beta, C) \subset S(y^*, \beta, F)$, perciò resta da dimostrare che $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$: dato un $u \in S(y^*, \beta, F)$ fissato si ha $y^*(u) > \sup_{x \in K, \|x\| \leq \lambda} y^* = \lambda \|y^*\|_K$ e quindi per il lemma uno tra $\|x^* + y^*\|$ e $\|x^* - y^*\|$ è al più $2\frac{y^*(u)}{\lambda} = \frac{y^*(u)}{2M}\varepsilon < \varepsilon$. Ma se vale per $\|x^* + y^*\|$ abbiamo

$$2\frac{y^*(u)}{\lambda} \geq \|x^* + y^*\| \geq \frac{(x^* + y^*)(u)}{\|u\|} > \frac{y^*(u)}{\|u\|} \geq \frac{y^*(u)}{M}$$

e quindi $2M > \lambda = 4\frac{M}{\varepsilon} > 4M$ perché $\varepsilon < 1$, assurdo. Perciò vale la disuguaglianza con $\|x^* - y^*\|$ e abbiamo la tesi.

□

Teorema 5.2.1 (Phelps-Rieffel)**.** *Uno spazio X soddisfa la RNP se e solo se soddisfa la SKMP.*

Dimostrazione. Se X soddisfa la SKMP ogni $C \subset X$ chiuso limitato e convesso ha un punto fortemente esposto, quindi in particolare è dentabile e vale la RNP. Per l'altra implicazione se $C \subset X$ è un chiuso limitato e convesso, è sufficiente dimostrare dimostrare che per ogni fetta $S(x^*, \alpha, C)$ esiste un'altra fetta che soddisfa le condizioni del lemma di Bishop. A meno di traslare C possiamo assumere che $\alpha = \sup_C x^*$, allora troviamo una tale fetta applicando il lemma di Phelps a $C \cap \{x^* \geq 0\}$: infatti non interseca $C \cap \{x^* < 0\}$ per convessità di C. □

Osservazione. In particolare se X soddisfa la RNP allora soddisfa anche la KMP. Invece è un problema aperto determinate se la KMP implica la RNP.

Infine osserviamo che queste questioni sono ben più note negli spazi duali. A questo proposito citiamo senza dimostrazione il prossimo risultato.

Teorema 5.2.2 (Stegall-Huff-Morris)**.** *Le seguenti condizioni su X sono equivalenti:*

1. *X^* soddisfa la RNP;*

2. *X^* soddisfa la KMP;*

3. *Ogni sottospazio separabile chiuso di X ha duale separabile;*

4. *Ogni sottospazio separabile chiuso di X^* è un sottospazio di uno spazio duale separabile.*

Se uno spazio X soddisfa una di queste condizioni lo chiamiamo **spazio di Asplund**.

Appendice A

Analisi Funzionale

In seguito X sarà uno spazio di Banach.

Inizialmente ricordiamo alcune semplici conseguenze del teorema di Hahn-Banach.

Corollario A.0.1. *Per ogni $x \in X$ esiste un $x^* \in X^*$ tale che $\|x^*\| = 1$ e $x^*(x) = \|x\|$.*

Osservazione. Quindi l'immersione canonica $X \hookrightarrow X^{**}$ è isometrica.

Definizione A.0.1. *Un insieme normante per uno spazio X è un sottoinsieme $S \subset X^*$ tale che $\|x^*\| = 1$ per ogni $x^* \in S$ e*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in S} |x^*(x)|$$

per ogni $x \in X$.

Corollario A.0.2. *Se X è separabile, allora ammette un insieme normante numerabile.*

Dimostrazione. Dato un denso numerabile $D \subset X$ è sufficiente considerare per ogni $x \in D$ un funzionale $f_x \in X^*$ come nel corollario A.0.1 in modo da ottenere un insieme numerabile $\tilde{D} \subset X^*$ che soddisfa la prima proprietà. Soddisfa anche la seconda perché dato un $x \in X$ qualsiasi e una successione $(x_n) \subset D$ tale che $x_n \to x$ si ha $f_{x_n}(x) = \|x_n\| + f_{x_n}(x - x_n)$ dove $\|f_{x_n}(x - x_n)\| \leq \|x - x_n\|$ e quindi $\lim_{n\to\infty} f_{x_n}(x) = \|x\|$. □

Corollario A.0.3. *Dato un sottospazio $V \subset X$, la topologia debole di V coincide con la topologia di sottospazio indotta da X con la topologia debole.*

Dimostrazione. È chiaro dal fatto che se $f \in X^*$ allora $f|_V \in V^*$ e se $f \in V^*$ allora per il teorema di Hahn-Banach esiste un $\tilde{f} \in X^*$ che estende f. □

Corollario A.0.4. *Dati $K, C \subset X$ tali che K è convesso e compatto e C è convesso e chiuso, allora esiste un funzionale $x^* \in X^*$ tale che*

$$\max_K x^* < \inf_C x^*.$$

Ora mostriamo qualche altro noto risultato che ho utilizzato nell'articolo.

Lemma A.0.1. *Se X^* è separabile, anche X è separabile.*

Lemma A.0.2. *Se X è riflessivo e $Y \subset X$ è un sottospazio chiuso, allora è anch'esso riflessivo.*

Teorema A.0.1 (Banach-Alaoglu)**.** *La palla chiusa $\overline{B}_{X^*}$ di X^* è w*-compatta.*

Teorema A.0.2. *Se X è separabile, allora $\overline{B}_{X^*}$ è w*-metrizzabile e sequenzialmente w*-compatta.*

Osservazione. La w*-compattezza sequenziale si può anche dimostrare senza passare per il teorema di Banach-Alaoglu: infatti data una successione $(f_n) \subset \overline{B}_{X^*}$ si può costruire una sottosuccessione convergente su un denso per argomento diagonale, che convergerà puntualmente ovunque poiché le f_n sono equilipshitz di costante 1 (analogamente al teorema di Ascoli-Arzelà).

Teorema A.0.3 (Kakutani)**.** *Lo spazio X è riflessivo se e solo se la sua palla unitaria chiusa $\overline{B}$ è sequenzialmente w-compatta.*

Osservazione. In realtà l'implicazione che serve a noi è solo quella che assume X riflessivo, che segue facilmente dai risultati precedenti con un argomento di restrizione ai sottospazi separabili chiusi. In generale la w-compattezza e la w-compatteza sequenziale sono equivalenti per il teorema di Eberlein-Smulian.

Lemma A.0.3 (di Iterazione)**.** *Dato un $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, un $U \subset Y$ limitato e un $t > 0$ tali che*

$$U \subset T(B) + tU,$$

abbiamo anche che

$$(1 - t)U \subset T(B).$$

In particolare se U è un intorno di 0 allora T è aperto e surgettivo.

Osservazione. Questo lemma è noto per il fatto che implica il teorema della mappa aperta, ma a noi è servito proprio in questa forma.

Definizione A.0.2. *Dato un insieme $S \subset X$ diciamo che un $x \in S$ è un **punto estremale** se non è realizzabile come combinazione convessa di punti in S diversi da x.*

Teorema A.0.4 (Krein-Milman)**.** *Un sottoinsieme convesso e compatto $K \subset X$ è uguale all'inviluppo convesso dei suoi punti estremali.*

Definizione A.0.3. *Diciamo che una successione $(x_n) \subset X$ è una **base di Schauder** se ogni $x \in X$ si scrive in modo unico come $\sum a_i x_i$ per certi $a_i \in \mathbb{R}$. Analogamente si dice **successione di base** se è una base di Schauder di $\overline{\text{span}}(x_n : n \in \mathbb{N})$.*

Definizione A.0.4. *Una base di Schauder si dice* ***limitatamente completa*** *se per ogni scelta degli* $(a_n) \subset \mathbb{R}$ *tale che*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$$

la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

converge.

Lemma A.0.4. *Se* X *ammette una base di Schauder* $(x_n) \subset X$*, la norma*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i \right\|' = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|$$

è equivalente a $\|\cdot\|$*. In particolare i funzionali* x_n^* *di proiezione sulla* n*-esima coordinata sono limitati.*

I risultati che ho citato o utilizzato si possono trovare ad esempio in [Rud91] o [Bre10], tranne ciò che riguarda le basi di Schauder che si può trovare in [AK06].

Appendice B

Teoria della misura

In seguito $(\Omega, \mathcal{F})$ sarà uno spazio misurabile con due misure non negative μ e ν.

Definizione B.0.1. *Dato uno spazio topologico (Z, τ), la **σ-algebra di Borel** è $\mathcal{B}(Z) = \sigma(\tau)$, ossia la σ-algebra generata dall'insieme degli aperti.*

Definizione B.0.2. *Diciamo che ν è **μ-assolutamente continua**, o anche $\nu \ll \mu$, se $\mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{F}$.*

Teorema B.0.1 (Radon-Nikodym)**.** *Date ν e μ due misure non-negative con ν finita, μ σ-finita e tali che $\nu \ll \mu$, esiste una $f \in L^1(\mu)$ tale che $\nu = f \cdot \mu$.*

Teorema B.0.2 (di differenziazione di Lebesgue)**.** *Data una $f \in L^1([0,1])$, per quasi ogni $t \in [0,1]$ abbiamo*

$$\lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} |f(y) - f(t)| \mathrm{d}\mu = 0$$

e quindi in particolare

$$\lim_{h \to 0} \int_t^{t+h} f(y) \mathrm{d}\mu = f(t).$$

Osservazione. Questo risultato è vero più in generale in $\mathbb{R}^n$ facendo la media sulle palle.

Lemma B.0.1. *Dati $r, p, q \in [1, \infty]$ tali che $1/p + 1/q = 1/r$ e f, g funzioni misurabili, si ha*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Dimostrazione. Segue banalmente dalla disuguaglianza di Hölder su $|f|^r$ e $|g|^r$ con esponenti coniugati p/r e q/r. $\square$

Corollario B.0.1. *Se μ è una misura di probabilità, per ogni $p, r \in [1, \infty]$ con $p \geq r$ si ha $L^p(\mu) \subset L^r(\mu)$ e l'immersione ha norma 1. In particolare questo vale quando $r = 1$.*

Dimostrazione. Basta porre $g \equiv 1$ e q tale che $1/p+1/q = 1/r$ nel lemma precedente, da cui segue $\|f\|_r \leq \|f\|_p$ per ogni $f \in L^r(\mu)$. □

Lemma B.0.2 (della Classe Monotona)**.** *La classe monotona generata da un π-sistema è una σ-algebra. In particolare è la σ-algebra generata.*

Teorema B.0.3 (di Rappresentazione di Riesz)**.** *Per $p \in (1, \infty)$ con esponente coniugato q, $L^q(\mu) \simeq L^p(\mu)^*$ isometricamente tramite la mappa $g \mapsto T_g$ tale che $T_g(f) = \int gf\,d\mu$ per ogni $f \in L^p(\mu)$.*

Ogni risultato che ho citato o utilizzato si può trovare in un qualsiasi libro di analisi, ad esempio [Rud74].

Appendice C

Probabilità

In seguito $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ sarà uno spazio di probabilità.

Lemma C.0.1. *Data una sotto-σ-algebra $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ e una $f \in L^1(\mu, \mathcal{F})$, esiste un'unica $g \in L^1(\mu, \mathcal{G})$ tale che $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ per ogni $E \in \mathcal{G}$.*

Definizione C.0.1. *L'operatore $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} : L^1(\mu, \mathcal{F}) \to L^1(\mu, \mathcal{G})$ dato dal lemma precedente è detto **speranza condizionale**.*

Le principali proprietà della speranza condizionale sono le seguenti:

- Se $X \leq Y$ μ-q.o., allora $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(Y)$ μ-q.o., ossia $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}$ è un operatore positivo;
- Se X è indipendente da $\mathcal{G}$, allora $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$ è costante;
- Se $X_n \nearrow X$ μ-q.o. con $X_n \geq 0$ e $X \in L^1(\mu)$, si ha anche $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X_n) \nearrow \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$;
- Se $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, allora $\mathbb{E}^{\mathcal{H}}\mathbb{E}^{\mathcal{G}} = \mathbb{E}^{\mathcal{H}}$;
- Se $X, Y, XY \in L^1(\mu)$ e Y è $\mathcal{G}$-misurabile, allora $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(XY) = Y\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)$;
- Se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e $X, \varphi(X) \in L^1(\mu)$, allora $\varphi\left(\mathbb{E}^{\mathcal{G}}(X)\right) \leq \mathbb{E}^{\mathcal{G}}(\varphi(X))$.

Corollario C.0.1. *Per ogni $p \in [1, \infty]$ l'operatore $\mathbb{E}^{\mathcal{G}} : L^p(\mu, \mathcal{F}) \to L^p(\mu, \mathcal{G})$ ha norma 1.*

Dimostrazione. Se $p \neq \infty$ basta porre $\varphi(x) = |x|^p$ nell'ultima proprietà, se $p = \infty$ invece segue facilmente dalla prima proprietà. □

Definizione C.0.2. *Una **filtrazione** è una successione $(\mathcal{F}_n)$ crescente di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$. Un successione $(M_n) \subset L^1(\mu)$ è una **martingala** (reale) rispetto a $\mathcal{F}_n$ se $M_n = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1})$ per ogni n. (M_n) si dice invece **submartingala** rispetto a $\mathcal{F}_n$ se $M_n \leq \mathbb{E}^{\mathcal{F}_n}(M_{n+1})$ per ogni n.*

Ogni risultato che ho citato o utilizzato si può trovare in un qualsiasi libro di probabilità, ad esempio [Gal22].

Appendice D

Integrale di Dunford

Per completezza approfondiamo brevemente una nozione più generale di integrale, che ammette anche funzioni debolmente μ-misurabili. Iniziamo vedendo la proposizione che lo definisce.

Lemma D.0.1. *Data una $f\colon \Omega \to X$ debolmente μ-misurabile tale che $x^* \circ f \in L^1(\mu)$ per ogni $x^* \in X^*$, allora l'operatore $x^* \mapsto \int (x^* \circ f)\mathrm{d}\mu$ è limitato, ossia è un elemento di X^{**}.*

Dimostrazione. Sia $T\colon X^* \to L^1(\mu)$ il funzionale di composizione per f, ossia $T(x^*) = x^* \circ f$, si verifica facilmente che ha il grafico chiuso: infatti data una successione $(x_n^*, x_n^* \circ f)$ che converge ad un (x^*, g), a meno di sottosuccessioni $x_n^* \circ f \to g$ q.o., da cui è chiaro che $x^* \circ f = g$. Perciò T è limitato per il teorema del grafico chiuso, ma allora $|\int (x^* \circ f)\mathrm{d}\mu| \leq \|T\|\,\|x^*\|$, ovvero l'operatore del lemma è limitato con norma al più $\|T\|$. □

La definizione di integrale si estende in modo ovvio a quella di integrale su un sottoinsieme misurabile di Ω.

Definizione D.0.1. *Data una $f\colon \Omega \to X$ debolmente μ-misurabile tale che $x^* \circ f$ è integrabile per ogni $x^* \in X^*$, diciamo che il suo* ***integrale di Dunford*** *è il funzionale in X^{**} dato dal lemma precedente. Diciamo che f è integrabile secondo Pettis se il suo integrale di Dunford su E appartiene alla copia canonica di X in X^{**} per ogni $E \in \mathcal{F}$. In tal caso lo consideriamo proprio come elemento di X e lo chiamiamo* ***integrale di Pettis****.*

Teorema D.0.1 (Pettis)**.** *Una f integrabile secondo Dunford è integrabile secondo Pettis se e solo se la misura finitamente additiva $E \mapsto \int_E f\mathrm{d}\mu$ è anche σ-additiva.*

Citiamo un ultimo risultato che ci fa capire che le funzioni integrabili secondo Pettis sono estremamente comuni.

Teorema D.0.2. *Se μ è finita e X non contiene copie di c_0, ogni funzione integrabile secondo Dunford è anche integrabile secondo Pettis.*

Osservazione. Negli spazi in cui vale la RNP non possono esserci copie di c_0, poiché in c_0 la RNP non vale.

Per l'integrale di Pettis valgono alcune proprietà analoghe a quelle dell'integrale di Bochner, ma non tutte. Per approfondire si vedano [HvNVW16] e [DU77].

Bibliografia

[AK06] F. Albiac and N.J. Kalton. *Topics in Banach Space Theory.* Number v. 10 in Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2006.

[BL00] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis.* Number v. 48,No. 1 in American Mathematical Society colloquium publications. American Mathematical Society, 2000.

[BR80] J. Bourgain and H. P. Rosenthal. Martingales valued in certain subspaces of L^1. *Israel Journal of Mathematics*, 37:54–75, 1980.

[Bre10] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Universitext. Springer New York, 2010.

[DU77] J. Diestel and J.J Uhl. *Vector Measures.* Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1977.

[FHH+11] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler. *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* CMS Books in Mathematics. Springer New York, 2011.

[Gal22] J.F.L. Gall. *Measure Theory, Probability, and Stochastic Processes.* Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2022.

[HvNVW16] T. Hytönen, J. van Neerven, M. Veraar, and L. Weis. *Analysis in Banach Spaces: Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer International Publishing, 2016.

[Kal21] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability.* Probability Theory and Stochastic Modelling. Springer International Publishing, 2021.

[LT13a] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I: Sequence Spaces.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[LT13b] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces II: Function Spaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[Pis16] G. Pisier. *Martingales in Banach Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2016.

[Rud74] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Higher Mathematics Series. McGraw-Hill, 1974.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 1991.

[RV73] A.W. Roberts and D.E. Varberg. *Convex Functions*. Pure and Applied Mathematics; a Series of Monographs and Textbooks, 57. Academic Press, 1973.

[Rya02] R.A. Ryan. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics. Springer London, 2002.