Università degli Studi di Pisa

FACOLTÀ DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di laurea triennale

Formula integrale di Sobolev e applicazioni

Candidato
Claudia Ginevra Biondi

Relatore
Prof. Luigi Carlo Berselli

Anno Accademico 2016–2017

Indice

Introduzione

Lo scopo dell'elaborato è ripercorrere la strada seguita da Sobolev nell'elaborazione delle sue formule integrali e nella loro applicazione alle dimostrazioni di alcuni importanti teoremi di immersione tra i quali la diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev, talvolta conosciuta come teorema di integrazione di Hardy-Littlewood-Sobolev e il teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg. La versione originaria delle dimostrazioni di questi teoremi viene data da Sergej L. Sobolev nella prima metà del XX secolo. La teoria sistematizzata degli spazi di Sobolev viene introdotta dal matematico sovietico a partire dal 1938 circa per la necessità pratica di maneggiare problemi di PDE, sebbene il concetto di derivata debole fosse già presente nel lavoro di Leray nel 1934. In quest'opera vengono citate infatti come quasi derivate e utilizzate per risolvere alcuni casi particolari di problemi di PDE. Leray dimostra anche alcuni dei lemmi che sono oggi basilari nel maneggiare le derivate deboli, le sue dimostrazioni sono tuttavia relative a casi molto particolari e questo tipo di oggetto non entra nell'uso comune fino alla sistemazione data da Sobolev nel il suo lavoro del 1938. I teoremi di immersione hanno una notevole importanza nell'analisi funzionale e nello studio delle proprietà degli spazi di Sobolev, che sono oggi il principale ambiente di studio dei problemi di equazioni alle derivate parziali (PDE) per aperti di $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$. Lo studio delle diseguaglianze riguardanti gli spazi di Sobolev ha inoltre applicazioni nella risoluzione di problemi di calcolo delle variazioni, problemi al contorno, problemi di Poisson e di Dirichelet ed è collegato alla teoria della distribuzione.
La forma integrale di Sobolev è anche direttamente collegata alla formula di Taylor mediata per palle di $\mathbb{R}^n$ e serve a trovare approssimanti polinomiali negli spazi di Sobolev. Il primo capitolo consiste in una serie di relazioni preliminari per la maggior parte dei quali non viene fornita la dimostrazione, segue poi un capitolo dedicato alla rappresentazione integrale di Sobolev dove si sottolineano anche le differenze tra il caso di aperti di $\mathbb{R}$ e il caso di aperti di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$.
Il capitolo 3 è dedicato alle diseguaglianze di Hardy-Littlewood-Sobolev, Sobolev, e Gagliardo-Nirenberg e comincia introducendo la definizione di integrale di tipo potenziale. Le dimostrazioni dei teoremi di immersione presenti nel capitolo 3 che più spesso vengono utilizzate oggi sono quelle date dal matematico E.Gagliardo ed altri matematici occidentali, più sintetiche ma basate su argomenti *ad hoc* che non vengono applicati facilmente ad altre situazioni.

Capitolo 1

Risultati preliminari

In questo capitolo si richiamano alcuni risultati classici dell'analisi funzionale che utilizzeremo nel corso dell'elaborato.

Notazioni usate

- $L_p(\Omega) = \left\{f;\ \int_\Omega |f|^p < \infty\right\}$
- $D_w^\alpha f =$ derivata debole di f di ordine α
- $W_p^\alpha(\Omega) = \left\{f \in L_p(\Omega); D_w^\beta f \in L_p(\Omega)\ \forall |\beta| \leq \alpha\right\}$
- $w_p^\alpha(\Omega) = \left\{f \in L_p(\Omega); D_w^\beta f \in L_p(\Omega)\ \forall 0 < |\beta| \leq \alpha\right\}$

Ricordiamo che $(L_p(\mathbb{R}^n), ||.||_{L_p})$ é uno spazio di Banach $\forall 1 \leq p \leq \infty$ ed è inoltre separabile per $p < \infty$

Teorema 1.0.1. *Ascoli-Arzelà*

Siano K spazio metrico compatto e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni continue $f_n : K \to \mathbb{R}^n$ tale che $\{f_n\}$ è equicontinua ed uniformemente limitata allora $\exists n_k$ per cui $\{f_{n_k}\}$ converge uniformemente.

Definizione 1.0.2. convergenza debole e forte in $||.||_{L^p}$

Sia $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L_p(\Omega)$ e $u \in L_p(\Omega)$, con $p \in [1, \infty)$
diciamo allora che

- $u_n \to u$ fortemente se $||u_n - u||_{L_p} \to 0$ per $n \to \infty$

- $u_n \to u$ debolmente se $\int_\Omega u_n v \to \int_\Omega uv$ per $n \to \infty$ e $\forall v \in L_q(\Omega)$

Nota 1.0.3. convergenza forte $\Rightarrow$ convergenza debole:
infatti sia $u_n \to u$ fortemente e sia $v \in L_q(\Omega)$, allora

$$\int_\Omega (u_n - u)v \leq ||u_n - u||_{L_p} ||v||_{L_q} \to 0$$

perché il primo membro tende a 0 per ipotesi ed il secondo è limitato (diseguaglianza di Minkowski)

Lemma 1.0.4. *$u_n \to u$ fortemente in L_p e $w_n \to w$ debolmente in L_q allora*

$$\int_\Omega u_n w_n \to \int_\Omega uw$$

1.1 Mollificatori

Introduciamo ora alcune nozioni che ci saranno utili per estendere proprietà facilmente dimostrabili per funzioni lisce a funzioni meno regolari

Definizione 1.1.1. Sia $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che supp $\omega \subset \overline{B(0,1)}$ e $\int_{\mathbb{R}^\kappa} \omega\, dx = 1$
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall \delta > 0$ definiamo poi $\omega_\delta = \frac{1}{\delta^n}\omega\left(\frac{x}{\delta}\right)$ e l'operatore $A_\delta : f \to \omega_\delta * f$ $\forall f \in L_1(\Omega \cap B)$, f definita su Ω sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$. Chiamiamo $\omega_\delta * f$ una mollificazione di f.

Ricordiamo che per f in $L_1(\Omega)$ vale $A_\delta(f) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,
$D^\alpha A_\delta(f) = \delta^{-|\alpha|}(D^\alpha\omega)_\delta * f$ e supp $A_\delta f \in \overline{(\text{supp } f)^\delta}$

Qui e nel seguito $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é una funzione a campana tale che $\eta = 1$ su B(0,1) e $\eta_s(x) = \eta\left(\frac{x}{s}\right)$; $s \in \mathbb{N}$

Per tali funzioni vale la proprietà $\forall f \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ $\eta_s f \to f$ in norma $||.||_{W_p^l}$ quando $s \to \infty$ $(p < \infty)$

1.2 Derivate deboli e introduzione degli spazi di Sobolev

Definizione 1.2.1. Date $f, g \in L_1^{loc}(\Omega)$, diciamo che g è una derivata debole di f se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega fD\varphi\, dx = -\int_\Omega g\varphi\, dx$$

In generale diciamo che g è una derivata debole di f di ordine α se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega fD^\alpha\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g\varphi\, dx$$

e la indichiamo come $D_w^\alpha f$

Nota 1.2.2. Se f ammette derivata classica continua su $\overline{\Omega}$ allora la derivata debole esiste e coincide con questa (cioé la nozione di derivata debole estende quella di derivata classica).
Inoltre la derivata debole, quando esiste, è definita e unica quasi ovunque su Ω .

Proprietà in dim=1 con dimostrazione:

- g_1 e g_2 derivate deboli di f su un aperto $I \subset \mathbb{R}$ allora $g_1 = g_2$ quasi ovunque
- $f \in C^1 \Rightarrow D_w f = g = f'$
- se $g = D_w f \in C^0 \Rightarrow f \in C^1$
- $f \in L_p$ tale che ammette derivata debole $g \in L_p$ allora f è $\frac{1}{q}$ Hölder (dove q è il reciproco di p), ossia $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^{\frac{1}{q}} \forall x_1, x_2 \in I$

Dimostrazione. Dimostriamo che nelle ipotesi del punto 4 la f risulta $\frac{1}{q}$ Hölder:

Sia f la antiderivata di g (unica quasi ovunque), allora

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |\int_{x_1}^{x_2} g| \leq \int_{x_1}^{x_2} |g| \leq ||g||_{L^p}|x_2 - x_1|^{\frac{1}{q}}$$

□

Dalle formule di Gauss-Green si deducono proprietá simili per il caso $\mathbb{R}^n$ o $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto: Vediamo infatti che $\forall u \in C^1(\Omega)$ $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$
si ha

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\phi(x)\,dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\,dx$$

Ci tornerà utile per capire meglio le definizioni sopra il seguente enunciato

Lemma 1.2.3. *(Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni per aperti di $\mathbb{R}^n$)*
Sia $u \in L_1^{loc}(\Omega)$, se $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ abbiamo

$$\int_\Omega u\varphi = 0$$

allora $u = 0$ quasi ovunque su Ω

Dimostrazione. (Idea)

Dimostrare la proposizioni per u continue o differenziabili e sfruttare poi i mollificatori per estendere la proprietà □

Nota 1.2.4. $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $u\varphi \in L_1(\Omega)$

Nota 1.2.5. (funzione di Cantor):

f continua e derivabile quasi ovunque potrebbe non ammettere derivata debole. Prendiamo ad esempio la funzione di Cantor $f : [0,1] \to [0,1]$ caratterizzata dalle proprietà:

$$\begin{cases} f(x) + f(1-x) = 1, \\ f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2} f(x), \\ f \text{ crescente} \\ f \in C^0(I) \end{cases}$$

La derivata di f è quasi ovunque 0 e dunque in particolare $\int f'\phi = 0 \forall \phi \in C_0^\infty$, tuttavia è facile trovare una $\phi \in C_0^\infty$ tale che $\int \phi' f \neq 0$

Osserviamo che si possono dare alcune utili caratterizzazioni degli spazi di Sobolev in dim=1

Definizione 1.2.6. : diciamo che f è assolutamente continua su I se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $\forall \{[x_k, y_k]\}_k \subset I$ con

$$\sum_k (y_k - x_k) < \delta$$

si ha

$$\sum_k |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$$

Lemma 1.2.7. *: f ha derivata debole $g \in L_1^{loc} \Leftrightarrow f$ è assolutamente continua (= ha un rappresentante assolutamente continuo nella sua classe di $L_1^{loc}/\sim$)*

Notazione: chiameremo τ_h la traslazione di h, cioé l'operatore $f(x) \to f(x+h)$

Lemma 1.2.8. *(Caratterizzazione di W_p^1)*
$1 < p \leq \infty$: $u \in L_p(\Omega)$ appartiene anche a $W_p^1(\Omega) \Leftrightarrow \exists C; \forall h \in \mathbb{R}$ vale

$$||\tau_h u - u||_{L_p} \leq C|h|$$

Lemma 1.2.9. *$D : W_p^1 \to L_p$ è un operatore lineare chiuso, cioé graf(D) è sottospazio chiuso di $L_p \times L_p$ con la norma $||(u,v)|| = ||u||_{L_p} + ||v||_{L_p}$*

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione di questa proprietá (che ha come corollario il fatto che W_p^1 è spazio di Banach):

Sia $\{(f_n, f'_n)\} \subset graf(D)$ convergente, cioé $f_n \in W_p^1$ e $f_n \to f, f'_n \to g$ in L_p vediamo che la coppia (f,g) sta in L_p. $\int f_n\phi' = -\int f'_n\phi$ per definizione di derivata debole ma possiamo passare al limite per la completezza di L_p

□

Nota 1.2.10. abbiamo la seguente proprietà:

$\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n); p < \infty$ vale che $||\tau_h f - f||_{L_p} = o(1)$ per $h \to 0$: dunque in particolare f ammette un modulo di continuitá L_p ovvero $\exists \omega : [0,\infty) \to [0,\infty]$ crescente ; $\omega(0) = 0$ e $\omega(x) = o(1)$ per $x \to 0$ tale che $||\tau_h f - f||_{L_p} \leq \omega(|h|)$

Dimostrazione. (dim=1) supponiamo $u \in W_p^1$ allora $\forall h$ $(h > 0 S.P.G)$ abbiamo

$$|u(x+h) - u(x)| = |\int_x^{x+h} u'(t)\,dt| \leq$$

(Hölder)

$$\left(\int_x^{x+h} |u'|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} (h)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow$$

$$|\tau_h u - u|^p \leq \left(\int_x^{x+h} |u'|^p dt\right) (h)^{p-1}$$

integriamo ora in $dx \Rightarrow$

$$||\tau_h u - u||_{L_p}^p = \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p\,dx \leq \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[x,x+h]}(t)|u'(t)|^p\,dt\,dx(h)^{p-1} =$$

(Fubini-Tonelli)

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \chi_{[t-h,t]}(x)|u'(t)|^p\,dx\,dt(h)^{p-1} = ||u'||_{L_p}^p h^p$$

□

Vediamo alcune proprietà generali valide in dimensione n

Definizione e proprietà di base degli spazi di Sobolev su aperti di $\mathbb{R}^n$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $l \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$

Definizione 1.2.11. $W_p^l(\Omega) = \{f \in L_p \mid \exists D_w^\alpha f \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ ; |\alpha| = l; ||f||_{W_p^l} < \infty\}$

dove
$$||f||_{W_p^l} = ||f||_{L_p} + \sum_{|\alpha|=l} ||D_w^\alpha f||_{L_p}$$

Proprietà

- $W_p^l(\Omega)$ è spazio vettoriale
- $W_p^l(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma sopra descritta
- $W_p^l(\Omega)$ è separabile se $1 \leq p < \infty$
- $W_2^l(\Omega)$ è spazio di Hilbert con il prodotto scalare definito da $(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_\Omega D_w^\alpha u \overline{D_w^\alpha v}$
- $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in W_p^l(\Omega) \Rightarrow \psi u \in W_p^l(\Omega)$

Nota 1.2.12. Facciamo un esempio di funzione appartenente a $W_2^1(\Omega)$ con $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$:

sia $f(x, y) = xy(x^2 + y^2)^{-\beta}$, ci chiediamo per quali valori di $\beta > 0$ si ha $f \in W_2^1(\Omega)$: svolgendo esplicitamente i calcoli otteniamo che $|f|^2$ è integrabile per $\beta < \frac{3}{2}$ mentre la derivata ordinaria rispetto a x $\partial_x f$ (e per simmetria della funzione anche la $\partial_y f$) è a quadrato integrabile per $\beta < 1$. Ora siccome sia f che le sue derivate parziali sono continue su $\Omega \diagdown \{(0, 0)\}$ abbiamo che $f \in W_2^1$ $\forall 0 < \beta < 1$

Lemma 1.2.13. *(derivata debole sotto il segno di integrale)*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $A \subset \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile e sia $\alpha \neq 0$ supponiamo che la funzione f sia definita su $\Omega \times A$ e che per quasi ogni $y \in A$ $f(., y) \in L_1^{loc}(\Omega)$ ed $\exists D_w^\alpha f(., y)$ su Ω.
Supponiamo inoltre che $f, D_w^\alpha f \in L_1(K \times A)$ $\forall K \subset \Omega$ compatto. Allora su Ω vale
$$D_w^\alpha \int_A f(x, y)\, dy = \int_A (D_w^\alpha f)(x, y)\, dy$$

Lemma 1.2.14. *(Disuguaglianza di Minkowski per spazi di Sobolev)*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $A \subset \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile, $l \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$ supponiamo inoltre f misurabile su $\Omega \times A$ e $f(., y) \in W_p^l(\Omega)$ per quasi ogni y in A. Allora
$$|| \int_A f(x, y)\, dy||_{W_p^l(\Omega)} \leq \int_A ||f(x, y)||_{W_p^l(\Omega)}\, dy$$

idea della dimostrazione: applicare Fubini-Tonelli, diseguaglianza di Minkowski per spazi L_p
.

Lemma 1.2.15. $\forall f \in W_p^l(\mathbb{R}^n)$ $1 \leq p \leq \infty$ *abbiamo che*

$$||A_\delta f||_{W_p^l} \leq c||f||_{W_p^l}$$

e inoltre per $p < \infty$ *si ha che*

$$A_\delta f \to f$$

su $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ *per* $\delta \to 0^+$

Dimostrazione.

$$||A_\delta f|| = ||A_\delta f||_{L_p} + \sum_{|\alpha|=l} ||A_\delta D_w^\alpha f||_{L_p} \leq c(||f||_{L_p} + \sum_{|\alpha|=l} ||D_w^\alpha f||_{L_p}) = c||f||_{W_p^l}$$

.
In particolare notiamo che se $p < \infty$ strettamente allora possiamo scrivere

$$||A_\delta f - f|| = ||A_\delta f - f||_{L_p} + \sum_{|\alpha|=l} ||A_\delta D_w^\alpha f - D_w^\alpha f||_{L_p} \to 0$$

quando $\delta \to 0^+$

□

Osserviamo che questo limite in generale non è uniforme.

Lemma 1.2.16. *(densità delle* C^∞ *in* W_p^l*)*

Per $1 \leq p < \infty$ $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W_p^l(\mathbb{R}^n)$ *è denso in* $W_p^l(\mathbb{R}^n)$ *con la topologia indotta da* $||.||_{W_p^l}$

Dimostrazione. (idea): applicare il lemma sopra

□

Nota 1.2.17. In particolare da questo lemma segue che la chiusura dell'insieme $\{u \in C_0^\infty(\Omega)\}$ rispetto alla norma $||.||_{W_p^l}$ è W_p^l

Capitolo 2

Rappresentazione integrale di Sobolev

In questo capitolo tratteremo una delle applicazioni delle proprietà viste in precedenza che risulterà anche essere lo strumento chiave per le disuguaglianze che vogliamo provare nel corso dell'elaborato.

2.1 Caso 1-dimensionale

Sia $-\infty < a < b < \infty$ e $\omega \in L_1(a,b)$ tale che $\int_a^b \omega dx = 1$ e prendiamo f funzione assolutamente continua su [a,b]. Allora f' esiste quasi ovunque su [a,b], $f' \in L_1(a,b)$ e $\forall x, y \in [a,b]$ possiamo scrivere

$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(u)du$$

Moltiplicando per $\omega(y)$ ed integrando ques'ultima uguaglianza sull'intervallo [a,b] rispetto ad y otteniamo la nuova uguaglianza

$$f(x) = \int_a^b f(y)\omega(y)dy + \int_a^b \left(\int_y^x f'(u)du \right) \omega(y)dy$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\int_y^x f'(u)du \right) \omega(y)dy &= \int_a^x \left(\int_y^x f'(u)du \right) \omega(y)dy - \int_x^b \left(\int_x^y f'(u)du \right) \omega(y)dy \\ &= \int_a^x \int_a^u \omega(y)dyf'(u)du - \int_x^b \int_u^b \omega(y)dyf'(u)du \\ &= \int_a^b \Lambda(x,y)f'(y)dy, \end{aligned}$$

(Fubini-Tonelli)

Dove

$$\Lambda\left(x,y\right)=\begin{cases}\int_a^y \omega(u)du & \text{se } a\leq y\leq x\leq b\\ -\int_y^b \omega(u)du & \text{se } a\leq x< y\leq b,\end{cases}$$

Otteniamo così la forma più semplice della rappresentazione integrale di Sobolev

Definizione 2.1.1. Chiamiamo rappresentazione integrale di Sobolev la formula

$$f(x)=\int_a^b f(y)\omega(y)dy+\int_a^b \Lambda(x,y)f'(y)dy,\ \forall x\in(a,b)$$

Osserviamo che per come è definita Λ vale la diseguaglianza

$|\Lambda(x,y)|\leq ||\omega||_{L^1(a,b)}$

Consideriamo ora ad esempio un caso limite
$\omega = costante = \dfrac{1}{b-a}$, in questo caso applicando la formula vista sopra otteniamo

$$f(x)=\int_a^b \frac{f(y)}{b-a}dy+\int_a^b \Lambda(x,y)f'(y)dy,$$

dove

$$\Lambda(x,y)=\begin{cases}\int_a^y \dfrac{1}{b-a}\,du=\dfrac{y-a}{b-a} & \text{se } a\leq y\leq x\leq b\\ -\int_y^b \dfrac{1}{b-a}\,du=\dfrac{y-b}{b-a} & \text{se } a\leq x< y\leq b,\end{cases}$$

svolgendo i calcoli risulta quindi

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy+\int_a^x \frac{y-a}{b-a}f'(y)\,dy-\int_x^b \frac{b-y}{b-a}f'(y)\,dy,$$

Nota 2.1.2. dal caso precedente otteniamo le diseguaglianze

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |\int_a^b \frac{f(y)}{b-a}\,dy+\int_a^b \Lambda(x,y)f'(y)\,dy|\\ &\leq |\int_a^b \frac{f(y)}{b-a}|+\int_a^b ||\omega||_{L^1}|f'(y)|\,dy\\ &\leq \frac{1}{b-a}|\int_a^b f(y)\,dy|+\int_a^b |f'(y)|\,dy\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$|f(x)| \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)|\,dy + \int_a^b |f'(y)|\,dy$$

$\Rightarrow |f(x)| \leq C||f||_{W_1^1}$

Corollario 2.1.3. *Per la diseguaglianza scritta sopra risulta continua l'inclusione*

$$(W_p^1(I), ||.||_{W_p^1}) \hookrightarrow (C_b^0(I), ||.||_\infty) \quad \textit{per } 1 \leq p \leq \infty$$

Inoltre se $1 < p \leq \infty$ e I è un intervallo finito l'inclusione sopra risulta anche compatta, $W_p^1 \hookrightarrow\hookrightarrow C_b^0(\bar{I})$

Dimostrazione. (Idea) $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^{\frac{1}{q}}$ (Hölderiane per quanto visto precedentemente), quindi in particolare le $f \in B(0,1)$ saranno equi-Hölderiane ed equi-limitate: posso quindi applicare Ascoli-Arzelà

□

Corollario 2.1.4. *(Wirtinger-Poincaré) Nel caso di una funzione a media nulla sul'intervallo (a,b) abbiamo*

$$|f(x)| \leq \int_a^b |f'(y)|\,dy$$

Supponiamo ora che $f \in (W_1^1)^{loc}(a,b)$, allora f è equivalente ad una funzione localmente assolutamente continua su (a,b) la cui corrisponde quasi ovunque alla derivata debole f'_w.

In particolare le relazioni integrali scritte sopra per la coppia (f, f') restano valide per (f, f'_w): laddove abbiamo relazioni integrali infatti non è importante conoscere il valore puntuale dell'oggetto che stiamo trattando ma piuttosto il suo valore a meno di insiemi di misura nulla, cosa che accade con la derivata debole.

Sia ora $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $x_0 \in (a,b)$, $l \in \mathbb{N}$ e supponiamo che $\exists f^{(l-1)}$ ed è localmente assolutamente continua su (a,b). Allora $f^{(l)}$ esiste quasi ovunuque e appartiene a $L_1^{loc}(a,b)$. possiamo dunque scrivere lo sviluppo di Taylor con resto integrale

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(l-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-u)^{l-1} f^{(l)}(u)\,du \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^l}{(l-1)!}\int_0^1 (1-t)^{l-1} f^{(l)}(x_0+t(x-x_0))\,dt
\end{aligned}
$$

Teorema 2.1.5. *Sia $l \in \mathbb{N}$, $-\infty \le a < \alpha < \beta < b \le \infty$ e $\omega \in L^1(\mathbb{R})$ tale che supp $\omega \subset [\alpha, \beta]$ e $\int_{\mathbb{R}} \omega = 1$, allora per f tale che $\exists f^{(l-1)}$ ed è localmente assolutamente continua su (a,b) abbiamo $\forall x \in (a, b)$*

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{k!}\int_a^b f^{(k)}(y)(x-y)^k \omega(y)\,dy + \frac{1}{(l-1)!}\int_a^b (x-y)^{l-1}\Lambda(x,y) f^{(l)}(y)\,dy
$$

Dove Λ è definita come nei lemmi precedenti.

Dimostrazione. Per quanto osservato il resto integrale dello sviluppo di Taylor ha la forma

$$
\int_y^x (x-u)^{l-1} f^{(l)}(u)\,du
$$

moltiplichiamo ora questa espressione per $\omega(y)$, integriamo rispetto ad y su (a,b) e applichiamo Fubini-Tonelli

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \left(\int_y^x (x-u)^{l-1} f^{(l)}(u)\,du\right)\omega(y)\,dy \\
&= \int_a^x \omega(y)\,dy \int_y^x (x-u)^{l-1} f^{(l)}(u)\,du + \int_x^b \omega(y)\,dy \int_y^x (x-u)^{l-1} f^{(l)}(u)\,du \\
&= \int_a^x (x-u)^{l-1} \int_a^u \omega(y)\,dy f^{(l)}(u)\,du - \int_x^b (x-u)^{l-1} \int_u^b \omega(y)\,dy f^{(l)}(u)\,du \\
&= \int_a^b (x-y)^{l-1}\Lambda(x,y) f^{(l)}(y)\,dy
\end{aligned}
$$

e questo conclude la dimostrazione

□

Consideriamo ora due casi semplici della forma integrale che ci torneranno utili in seguito per la dimostrazione dei teoremi di immersione in dimensione 1.

Lemma 2.1.6. *Sia f tale che f' è assolutamente continua su $[a,b]$, allora vale l'uguaglianza*

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + \int_a^x \frac{y-a}{b-a} f''(y)dy - \int_x^b \frac{b-y}{b-a} f''(y)dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione. (idea)
Prendiamo $\omega_m(x) \equiv m(x-a)(b-a-\frac{1}{m})^{-1}$ per $a < x \leq a + \frac{1}{m}$,
$\omega_m(x) \equiv (b-a-\frac{1}{m})^{-1}$ per $a+\frac{1}{m} \leq x \leq b-\frac{1}{m}$ e $\omega_m(x) \equiv m(b-x)(b-a-\frac{1}{m})^{-1}$ per $b-\frac{1}{m} < x \leq b$, dove $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \frac{2}{b-a}$, a questo punto applichiamo la formula integrale e passiamo al limite per $m \to \infty$

□

Lemma 2.1.7. *ω assolutamente continua su $[a,b]$ con $\omega(a) = \omega(b) = 0$ e f tale che f' è assolutamente continua su $[a,b]$ allora vale la formula*

$$f'(x) = -\int_a^b \omega'(y) f(y)dy + \int_a^b \Lambda(x,y) f''(y)dy \qquad \forall x \in [a,b]$$

Dimostrazione. (Idea)
Integrare per parti.

□

2.2 Caso $n \geq 2$

Da ora in avanti consideremo applicazione con dominio su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ con proprietà buone: Le proprietá degli spazi di Sobolev di funzioni in piú variabili dipendono infatti fortemente dalle caratteristiche del dominio Ω sul quale si sta lavorando.
Se non specificato considereremo sempre palle aperte limitate di $\mathbb{R}^n$.

Nota 2.2.1. Importante: a differenza del caso unidimensionale in generale $W_p^n(\Omega) \nsubseteq C^0(\Omega)$: Funzioni $\in L_p$ in piú variabili infatti non hanno bisogno di essere continue.

Ricordiamo infatti un controesempio Per $n \geq 2$ la funzione non limitata $\log(\log(1+\frac{1}{|x|}))$ appartiene a $W_n^1(B)$ dove B è la p
contrariamente al caso $n = 1$ dove per W_1^1 valgono i teoremi di immersione.

Formula di Taylor multidimensionale

Notazione: A insieme e $\delta \in \mathbb{R}^+$ allora indichiamo $A_\delta = \{x \in A : d(x, \partial A) > \delta\}$ e $A^\delta = \{x : d(x, \partial A) < \delta\}$

Teorema 2.2.2. *$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una palla contenente il punto x_0 , $l \in \mathbb{N}$ e $f \in C^l(\Omega)$. Allora $\forall x \in \Omega$*

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<l} \frac{(D^\alpha f)(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + l \sum_{|\alpha|=l} \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{l-1} (D^\alpha f)(x_0 + t(x-x_0))\, dt$$

Dimostrazione. Applicare la formula di Taylor 1-dimensionale alla funzione $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$ definita per $t \in [0,1]$ con resto nella forma integrale e valutare in 1

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 (1-t)^{l-1} \varphi^{(l)}(t)\, dt$$

□

Per l=1 abbiamo in particolare la relazione

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{0j}) \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0 + t(x - x_0))\, dt$$

Notiamo che la formula scritta in questa forma non può essere applicata a $f \in W_l^p$ con derivate deboli $D_w^\alpha f$ perché compare il termine puntuale $f(x_0)$: la formula in questa forma distingue quindi funzioni nella stessa classe che coincidono quasi ovunque e differiscono nel punto x_0

Consideriamo allora la formula scritta in una differente forma

Supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ palla e $h \in \mathbb{R}^n$, allora $\forall f \in C^1(\Omega)$ e $\forall x \in \Omega_{|h|}$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x + th)\, dt$$

Lemma 2.2.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una palla e $\delta \in \mathbb{R}^+$. Allora se $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ ed $\exists \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w$ $\forall j = 1, ..., n$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$ tale che $|h| < \delta$*

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_w (x+th)\,dt \\ &= f(x) + \int_0^1 ((\nabla_w f)(x+th).h)\,dt \qquad \textit{per quasi ogni } x \in \Omega_\delta \end{aligned}$$

Dimostrazione. : (idea: applichiamo una mollificazione e passiamo al limite)

$A_\delta f$ é una mollificazione di f come abbiamo visto precedentemente.
D'ora in avanti ometteremo il pedice w nell'indicare le derivate deboli.

Poiché $A_\delta f \in C^\infty(\Omega_\gamma)$ per ogni $0 < \delta < \gamma$ abbiamo che $\forall x \in \Omega_{|h|+\gamma}$

$$(A_\delta f)(x+h) = (A_\delta f)(x) + \sum_{j=1}^{n} h_j \int_0^1 (A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right))(x+th)\,dt$$

Vogliamo provare ora che

$$\int_0^1 (A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right))(x+th)\,dt \to \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x+th)\,dt \quad \text{in } L_1^{loc}(\Omega_\gamma) \text{ per } \delta \to 0^+$$

Per la diseguaglianza di Minkowski e la diseguaglianza triangolare su ogni compatto $K \subset \Omega_\gamma$ abbiamo

$$\begin{aligned} &\| \int_0^1 (A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right))(x+th)\,dt - \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x+th)\,dt \|_{L_1(K)} \\ &\leq \int_0^1 \|(A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right))(x+th) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x+th)\ \|_{L_1(K)}\,dt \\ &\leq \|A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\|_{L_1(K^{|h|})} \quad \to 0 \text{ per } \delta \to 0^+ \end{aligned}$$

Di coseguenza esiste una successione $\delta_k \to 0^+$ tale che

$$\int_0^1 (A_\delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right))(x+th)\,dt \to \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x+th)\,dt \quad \text{quasi ovunque su } \Omega_\gamma$$

Abbiamo inoltre per le proprietá dei mollificatori che $A_{\delta_k} f(x) \to f(x)$ e $A_{\delta_k} f(x+h) \to f(x+h)$ quasi ovunque su Ω_γ.

Passando al limite e per arbitrarietà di γ otteniamo l'uguaglianza per quasi ogni $x \in \Omega$

□

Lemma 2.2.4. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, $h \in \mathbb{R}^n$ *e* $f \in w_p^l(\Omega)$.
Allora

$$\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} \leq \||\nabla f|\|_{L_p(\Omega)}|h| \leq \|f\|_{w_p^l(\Omega)}|h|$$

Dimostrazione. (idea: applicare la diseguaglianza di Minkowski al lemma sopra)

$$\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(\Omega_{|h|})} &= \| \int_0^1 ((\nabla f)(x+th).h)\,dt\|_{L_p(\Omega_{|h|})} \\
&\leq \int_0^1 \|(\nabla f)(x+th).h\|_{L_p(\Omega_{|h|})}\,dt \leq |h| \int_0^1 \||\nabla f|(x+th)\|_{L_p(\Omega_{|h|})}\,dt \\
&= |h| \int_0^1 \||\nabla f|\|_{\Omega_{|h|}+th}\,dt \leq \||\nabla f|\|_{L_p(\Omega)}|h| \leq \|f\|_{w_p^l(\Omega)}|h|
\end{aligned}$$

Dato che $\Omega_{|h|} + th \subset \Omega$ e

$$|\nabla f| \leq \sum_{j=1}^n |\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)|.$$

□

2.3 Rappresentazione integrale di Sobolev nel caso $n \geq 2$

In questo paragrafo vogliamo derivare la formula integrale di Sobolev per palle di $\mathbb{R}^n$, fulcro dell'elaborato sul quale si basano le dimostrazioni originarie date da Sobolev di alcuni importanti teoremi di immersione che tratteremo nel capitolo 3. Dimostrazioni più sintetiche che non utilizzano queste formule integrali verranno date in seguito dal matematico Emilio Gagliardo.

Teorema 2.3.1. *Sia* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *una palla di* $\mathbb{R}^n$ *e* $B = B(x_0, r)$ *tale che* $\overline{B} \subset \Omega$, $\omega \in L_1(\mathbb{R}^n)$; *supp*$\omega \subset \overline{B}$, $\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1$, $l \in \mathbb{N}$ *e* $f \in C^l(\Omega)$
Allora vale la formula

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<l} \frac{1}{\alpha!} \int_B (D^\alpha f)(y)(x-y)^\alpha \omega(y)\, dy + \sum_{|\alpha|=l} \int_B \frac{(D^\alpha f)(y)}{|x-y|^{n-l}} w_\alpha(x,y)\, dy \qquad \forall x \in \Omega$$

Dove $\forall x \neq y$ *in* $\mathbb{R}^n$

$$w_\alpha(x,y) = \frac{|\alpha|(x-y)^\alpha}{\alpha!|x-y|^{|\alpha|}} w(x,y)$$

e

$$w(x,y) = \int_{|x-y|}^{\infty} \omega\left(x + \varrho \frac{y-x}{|y-x|}\right) \varrho^{n-1} d\varrho$$

mentre per $x = y$ *poniamo* $w_\alpha(x,x) = w(x,x) = 0$

Nota 2.3.2. : il primo membro dell'espressione di destra è un polinomio di grado $\leq l-1$ mentre il secondo membro è l'integrale di un potenziale. Notiamo inoltre che queste espressioni non includono il valore di f o delle sue derivate in punti particolari.

Siano ora $\xi = \dfrac{x-y}{|x-y|}$ e $k \leq l \in \mathbb{N}$, consideriamo la derivata nella direzione ξ

$$\left(\frac{\partial^k f}{\partial \xi^k}\right)(y) = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} (D^\alpha f)(y) \xi^\alpha$$

Possiamo riscrivere la formula integrale come

$$f(x) = \int_B (\sum_{k=0}^{l-1} \frac{|x-y|^k}{k!} \left(\frac{\partial^k f}{\partial \xi^k}\right)(y)) \omega(y)\, dy + \frac{1}{(l-1)!} \int_B \left(\frac{\partial^l f}{\partial \xi^l}\right)(y) \frac{w(x,y)}{|x-y|^{n-l}} dy$$

E in particolare per l=1

$$f(x) = \int_B f(y)\omega(y)\, dy + \int_B ((\nabla f)(y)(x-y)) \frac{w(x,y)}{|x-y|^n}\, dy$$

Dimostrazione. (del Teorema 2.3.1)

Moltiplichiamo l'espressione della formula di Taylor multidimensionale per $\omega(y)$ dopo aver posto $x_0 = y$ e integriamo su $\mathbb{R}^n$ rispetto a y . Il secondo addendo dell'espressione di destra prende la forma

$$\begin{aligned} & l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(y) \left(\int_0^1 (1-t)^{l-1} (D^\alpha f)(y + t(x-y))\, dt \right) dy \\ & = l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{l-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(y + t(x-y)) \omega(y) dy \right) dt \\ & \equiv l \sum_{|\alpha|=l} \frac{1}{\alpha!} J_\alpha \end{aligned}$$

Con il cambio di variabili $y + t(x-y) = z$ e considerando che $(x-y)^\alpha = \dfrac{(x-z)^\alpha}{(1-t)^l}$, $dy = \dfrac{dz}{(1-t)^n}$ abbiamo

$$J_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(z)(x-z)^\alpha \left(\int_0^1 \omega\left(\frac{z-tx}{1-t} \right) \frac{dt}{(1-t)^{n+1}} \right) dz$$

Rimpiazzando ora $\dfrac{|x-z|}{1-t}$ con ϱ otteniamo

$$J_\alpha = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(z) \frac{(x-z)^\alpha}{|x-z|^l} \left(\int_{|x-z|}^\infty \omega\left(x + \varrho \frac{z-x}{|z-x|} \right) \varrho^{n-1} d\varrho \right) dz$$

da cui segue la dimostrazione grazie al fatto che $\mathrm{supp}_y w_\alpha(x,y) = \mathrm{supp}_y w(x,y)$ $\square$

Capitolo 3

Applicazioni della forma integrale di Sobolev

In questo capitolo ci occuperemo di presentare alcuni teoremi di immersione dimostrati per la prima volta da Sobolev sfruttando la rappresentazione integrale. Cominciamo illustrando la diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev, che ci fornisce condizioni sufficienti affinché una convoluzione del tipo $|x|^{-\lambda} * f$ appartenga ad un qualche spazio L_q. Questa condizione ci è indispensabile per poter utilizzare la forma integrale. Vengono poi presentate alcune diseguaglianze la cui dimostrazione originaria utilizzava la rappresentazione integrale seguite da due teoremi validi in dimensione 1 di cui viene fornita una dimostrazione completa e dettagliata. Queste disuguaglianze hanno importanti applicazioni in teoria geometrica della misura, oltre che nello studio di problemi di PDE e nello studio dei potenziali.

3.1 Definizione: integrale di tipo potenziale

Sia $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora chiamiamo la convoluzione

$$|x|^{-\lambda} * f = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy$$

con $\lambda < n$ integrale di tipo potenziale.

Si verifica che

- se $\lambda \geq n$ e f non è 0 q.o allora $|x|^{-\lambda} * f$ non esiste su un insieme di misura positiva
- se $\lambda < n$ e $f \notin L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora $|x|^{-\lambda} * f$ non esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- se $\lambda < n$ e $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora $|x|^{-\lambda} * f$ esiste per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed è misurabile su $\mathbb{R}^n$

La dimostrazione dei fatti scritti sopra non è banale, si basa tuttavia sul fatto che una funzione f appartenente a L_1 deve necessariamente avere un certo decadimento all'infinito, per la definizione dell'integrale a destra è quindi importante considerare il comportamento vicino a 0 dell'espressione. In particolare se l'esponente dell'espressione al denominatore supera la dimensione n dello spazio in cui stiamo lavorando l'integrale non è definito in un intorno di 0. Il caso più difficile da trattare si ha per $\lambda = n$, in modo simile a quanto avviene nel caso unidimensionale.

Integrali di tipo potenziale sono contenuti nelle diseguaglianze dedotte nel capitolo sulla rappresentazione integrale, siamo quindi interessati a capire sotto quali ipotesi si ha $|x|^{-\lambda} * f$ in $L_q(\mathbb{R}^n)$

3.2 Diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev

Sia $n \in \mathbb{N}$, $1 < p < q < \infty$ e tali che $\lambda = n\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right) < n$, allora esiste $C = C(n,p,q)$ tale che $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ la convoluzione $|x|^{-\lambda} * f$ esiste per quasi ogni x e vale la maggiorazione

$$\||x|^{-\lambda} * f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

Lemma 3.2.1. *Sia $n \in \mathbb{N}$, $\mu < n$ allora $\exists C = C(n,\mu)$ tale che $\forall f$ misurabile $\forall r > 0$ vale*

$$\int_{B(x,r)} |x-y|^{-\mu}|f(y)|dy \leq C_1 r^{n-\mu}(Mf)(x), \qquad \forall x$$

e per $f \in L_1^{loc}$

$$(Mf)(x) = sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_B |f|dy$$

(funzione massimale)

Per quasi ogni x vale $|f| \leq Mf < \infty$, inoltre Mf è misurabile e $\exists C > 0$ tale che $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$

$$||Mf||_{L_p} \leq C||f||_{L_p} \qquad (1)$$

(per $1 < p < \infty$)

Lemma 3.2.2. *$n \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ e $\frac{n}{p'} < \mu < n$ allora $\exists C = C(n,p,\mu)$ tale che $\forall f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$|||x|^{-\mu} * f||_{L_q} \leq C||f||_{L_p}^{\frac{p}{n}(n-\mu)}(Mf)^{\frac{p}{n}(\mu-\frac{n}{p'})} \qquad (2)$$

La dimostrazione di questo lemma che è la chiave della dimostrazione della diseguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev si basa sulla forma integrale di Sobolev, ne diamo quindi un accenno che evidenzia l'utilizzo di questa formula.

Dimostrazione. (diseguaglianza di Hardy-Littlewood- Sobolev)

Data f come nelle ipotesi abbiamo $Mf(x) < \infty$ quasi ovunque: infatti per (1) $||Mf||_{L_p} \leq C||f||_{L_p} < \infty$. Abbiamo inoltre $\frac{n}{p'} < \frac{n}{p'} + \frac{n}{q} = \lambda < n$ e possiamo quindi applicare (2) e calcolare la norma L_q ottenendo

$$|||x|^{-\lambda} * f||_{L_q} \leq ||f||_{L_p}^{\frac{p}{n}(n-\lambda)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Mf|^{\frac{p}{n}(\mu-\frac{n}{p'})q}\right)^{\frac{1}{q}} \quad \textit{(3)}$$

Ora valgono le seguenti uguaglianze

- $\lambda = n\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q}\right)$
- $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
- $\lambda\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$
- $\frac{p}{n}(n-\lambda) = p - p\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = 1 - \frac{p}{q}$
- $\frac{p}{n}\left(\lambda - \frac{n}{p'}\right)q = \frac{p}{n}\left(\lambda - n\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)q = p\left(\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{p}\right)q = p$

quindi il membro destro di (3) diventa

$$\begin{aligned} &= C||f||_{L_p}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int |Mf|^p\right) = c||f||_{L_p}^{1-\frac{p}{q}} \left(\int |Mf|^p\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{q}} \\ &= C||f||_{L_p}||Mf||_{L_p}^{\frac{p}{q}} \leq C_1||f||_{L_p}^{1-\frac{p}{q}}||f||_{L_p}^{\frac{p}{q}} = C_1||f||_{L_p} \end{aligned}$$

applicando (1) per l'ultima diseguaglianza

$\square$

Nota 3.2.3. : La diseguaglianza scritta sopra ci dice che l'operatore P dove $(Pf)(x) = |x|^{-\lambda} * f$ è limitato e mappa $L_p(\mathbb{R}^n)$ in $L_q(\mathbb{R}^n)$.

Nota 3.2.4. : Un altro caso in cui è verificata la diseguaglianza sopra è quello dove $p = 1$ e $q = \infty$:in questo caso infatti abbiamo $\lambda = 0$ per cui il membro sinistro diventa la convoluzione di f con la costante 1, l'espressione diventa quindi $|| \int_{\mathbb{R}^n} f||_{L_\infty} = | \int_{\mathbb{R}^n} f| \leq ||f||_{L_1}$.
In tutti gli altri casi ammissibili l'operatore P non è limitato e in particolare la maggiorazione sopra non vale per nessun valore della costante c.

Accenniamo in questa parte ad alcune interessanti proprietà di immersione e le relative diseguaglianze la cui forma è del tipo

$$||D^\alpha f||_{L_q} \leq c||f||_{W_p^l}$$

Dove c è una costante indipendente da f.
Questi teoremi sono applicazioni delle proprietà che abbiamo introdotto nei capitoli precendenti e ci danno inoltre un controllo quantitativo sulle norme L_p delle applicazioni prese in considerazione e sul loro modulo di continuità.

3.3 Teoremi validi su $\mathbb{R}^n$ (senza dimostrazione)

Enunciamo da prima un teorema valido su tutto $\mathbb{R}^n$

Teorema 3.3.1. *(Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) Sia $1 \leq p < n$ allora $W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ dove $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ (In particolare notare che $q > p$) e in particolare se $f \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$*

$$||f||_{L_q} \leq c||\nabla f||_{L_p}$$

per $p = n$ abbiamo $W_n^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ $\forall q \in [1, \infty)$ e

$$||f||_{L_q} \leq c||f||_{W_n^1}$$

per $p > n$ invece vale $W_p^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L_\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, $\alpha \in (0, 1)$

$$||f||_{L_\infty} \leq c||f||_{W_p^1}$$
$$|f|_{C^{0,\alpha}} \leq c||\nabla f||_{L_p}$$

(Morrey)

Dove tutte le costanti c sono indipendenti da f.
Questo teorema ci dice che se sapendo che f e $\nabla f \in L_p$ per un qualche p che soddisfa le ipotesi allora abbiamo che in effetti f ha proprietà migliori ossia sta in uno spazio L_q strettamente più piccolo.

Presentiamo ora alcuni risultati validi per aperti di $\mathbb{R}^n$ limitati che per semplicità supporremo essere palle.

Teorema 3.3.2. *(immersione di Sobolev su un aperto di $\mathbb{R}^n$) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ una palla di $\mathbb{R}^n$ allora* *se* $1 \leq p < n$ *si ha* $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ *dove* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ *e*

$$||f||_{L_q(\Omega)} \leq c||f||_{W_p^1(\Omega)}$$

se $p = n$ $W_n^1(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ $\forall q \in [\,\infty)$ *e*

$$||f||_{L_q(\Omega)} \leq c||f||_{W_n^1(\Omega)}$$

se $p > n$ *invece* $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$ *con* $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$, $\alpha \in (0,1)$ *e*

$$||f||_{L_\infty(\Omega)} \leq c||f||_{W_p^1(\Omega)}$$
$$|f|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq c||f||_{W_p^1(\Omega)}$$

Dove le costanti c dipendono anche dal dominio, ma non da f. Notiamo inoltre che a differenza del caso sopra abbiamo al secondo membro delle espressioni la norma W_p^1.

Teorema 3.3.3. *(Immersione di W_p^l in W_q^m) Sia $1 \leq q, p \leq \infty$, $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^0$ e Ω una palla di $\mathbb{R}^n$. Allora l'immersione*

$$W_p^l(\Omega) \hookrightarrow W_q^m(\Omega)$$

è verificata se e solo se

$$l > m + \frac{n}{p} \text{ per } q = \infty, 1 < p \leq \infty$$

oppure

$$l \geq m + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \text{ per } q = \infty, p = 1 \text{ o } q < \infty, 1 \leq p \leq \infty$$

inoltre se $l > m + n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$ *l'inclusione risulta anche compatta.*

La dimostrazione di questo teorema si avvale della forma integrale.

3.4 Teoremi validi su $\mathbb{R}$ (con dimostrazione)

Illustriamo ora un teorema valido nel caso unidimensionale proponendone la dimostrazione completa e una sua generalizzazione.

Teorema 3.4.1. *Sia $f \in W^2_\infty(\mathbb{R})$, allora vale la diseguaglianza*

$$||f'||_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}||f||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})}||f''||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})}$$

dove $\sqrt{2}$ è la costante ottimale.

Dimostrazione. Applicando il lemma 2.1.5 con $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ otteniamo

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{y-x+\varepsilon}{2\varepsilon} f''(y)dy - \int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{x+\varepsilon-y}{2\varepsilon} f''(y)dy \\
&= \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{y-x+\varepsilon}{2\varepsilon} f''(y)dy + \int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{-x-\varepsilon+y}{2\varepsilon} f''(y)dy \\
&\leq \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} + ||f''||_{L_\infty}| \int_{x-\varepsilon}^{x} \frac{y-x+\varepsilon}{2\varepsilon}| + ||f''||_{L_\infty}| \int_{x}^{x+\varepsilon} \frac{y-x-\varepsilon}{2\varepsilon}|
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L_\infty} + ||f''||_{L_\infty}\frac{1}{2\varepsilon}| \int_0^{\varepsilon} zdz| + ||f''||_{L_\infty}\frac{1}{2\varepsilon}| \int_{-\varepsilon}^{0} zdz| \\
&= \frac{1}{\varepsilon}||f||_{L_\infty} + \frac{\varepsilon}{2}||f''||_{L_\infty},
\end{aligned}$$

vogliamo ora minimizzare l'espressione rispetto ad $\varepsilon > 0$, ossia vogliamo trovare

$$min_{\varepsilon>0}\left(\frac{1}{\varepsilon}||f||_{L_\infty} + \frac{\varepsilon}{2}||f''||_{L_\infty}\right)$$

Poniamo temporaneamente per comodità $||f||_{L_\infty} \equiv A$ e $||f''||_{L_\infty} \equiv B$, notiamo che per come è definita la funzione $g(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}A + \frac{\varepsilon}{2}B$ è liscia e positiva su $\mathbb{R}^+$ e tende a ∞ per $\varepsilon \to 0^+$ e $\varepsilon \to \infty$ per cui deve ammettere almeno un minimo.
Derivando rispetto a ε otteniamo $g'(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^2}A + \dfrac{B}{2}$ il cui unico 0 su $\mathbb{R}^+$ si ha per $\varepsilon = \sqrt{\frac{2A}{B}}$. sostituendo ora in g otteniamo che il minimo è

$$\sqrt{\frac{B}{2A}}A + \frac{B}{2}\sqrt{\frac{2A}{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{AB} = \sqrt{2}\sqrt{AB}$$

$$= \sqrt{2}||f||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}||f''||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}$$

Da cui

$$||f'||_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{2}||f||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})}||f''||^{\frac{1}{2}}_{L_\infty(\mathbb{R})},$$

che conclude la dimostrazione

□

Proponiamo ora una utile generalizzazione del teorema sopra

Teorema 3.4.2. *per* $1 \le p \le \infty$ *e* f *nelle stesse ipotesi abbiamo*

$$||f'||_{L_\infty(\mathbb{R})} \le 2||f||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}||f''||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{p})}$$

Dimostrazione. [1] Applichiamo la diseguaglianza di Hölder al lemma 2.1.6 ottenendo

$$f'(x) = -\int_a^b \omega'(y)f(y)dy + \int_a^b \Lambda(x,y)f''(y)dy \Rightarrow$$

$$|f'(x)| \le ||\omega'||_{L_{p'}(a,b)}||f||_{L_p(a,b)} + ||\Lambda(x,.)||_{L_{p'}(a,b)}||f''||_{L_p(a,b)} \qquad \text{per quasi ogni } x \text{ in } (a,b)$$

Dove p' è il reciproco di p.
Scegliendo ω in modo da minimizzare $||\omega'||_{L_p'(a,b)}$[2] otteniamo

$$\omega(x) = \left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{(b-a)^p - |2x-(a+b)|^p}{(b-a)^{p+1}} \le \left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{b-a},$$

Vediamo ora come possiamo stimare $||\omega'||_{L_{p'}(a,b)}$

$$\omega' = -\left(1+\frac{1}{p}\right)2p|2x-(a+b)|^{p-1}sgn(2x-(a+b))\left(\frac{1}{(b-a)^{p+1}}\right),$$

da cui

$$\begin{aligned}||\omega'||_{p'}^{p'} &= \int_a^b \left(\frac{2(p+1)}{(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}|2x-(a+b)|^p dx = \left(\frac{2(p+1)}{(b-a)^{p+1}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\int_0^{b-a} y^p dy \\ &= 2^{\frac{p}{p-1}}(p+1)^{\frac{1}{p-1}}(b-a)^{\frac{-(p+1)}{p-1}} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$||\omega'||_{L_{p'}(a,b)} = 2(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)},$$

Inoltre

$$\Lambda\left(\frac{a+b}{2},y\right) = \begin{cases}\int_a^y \omega(u)du \le \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{y-a}{b-a}\right) & \text{se } a \le y \le \frac{a+b}{2}\\ \int_y^b \omega(u)du \le \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{b-y}{b-a}\right) & \text{se } \frac{a+b}{2} \le y \le b,\end{cases}$$

Per cui

$$||\Lambda\left(\frac{a+b}{2},.\right)||_{L_{p'}(a,b)} \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)(p'+1)^{-\frac{1}{p'}}(b-a)^{\frac{1}{p'}},$$

[1] la dimostrazione è svolta per $1 < p < \infty$

[2] *Euler's equation for the extremal problem*: per $1 < p < \infty$ abbiamo che $\omega'(x) = |ax+b|^{p-1}sgn(ax+b)$ dove a, b sono costanti minimizza $||\omega'||_{p'}$ con $\int \omega = 1$, in questo caso $(|\omega'|^{p'}sgn(\omega'))'$ è costante

Infatti

$$\begin{aligned}
||\Lambda||_{p'}^{p'} &= \int_a^b |\Lambda|^{p'} dy \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |\int_a^y \omega|^{p'} dy + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |\int_y^b \omega|^{p'} dy \\
&\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} |\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{y-a}{b-a}\right)|^{p'} dy + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{b-y}{b-a}\right)|^{p'} dy \\
&= \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p'} (b-a)^{-p'} \int_0^{\frac{b-a}{2}} z^{p'} dz + \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p'} (b-a)^{-p'} \int_0^{\frac{b-a}{2}} z^{p'} dz \\
&= \frac{1}{2^{p'}} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{p'} (p'+1)^{-1}(b-a),
\end{aligned}$$

Siamo pronti adesso per stimare il valore di $|f'|$

$$|f'(x)| \leq 2(p+1)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{-\left(1+\frac{1}{p}\right)}||f||_p + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)(p'+1)^{-\frac{1}{p'}}(b-a)^{\frac{1}{p'}}||f''||_p,$$

ponendo ora $a = x - \varepsilon$, $b = x + \varepsilon$ troviamo

$$|f'(x)| \leq \left(\frac{p+1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^{-1-\frac{1}{p}}||f||_{L_p(\mathbb{R})} + 2^{-\frac{1}{p}}\left(1+\frac{1}{p}\right)(p'+1)^{-\frac{1}{p'}}\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}||f''||_{L_p(\mathbb{R})} \quad \text{quasi ovunque su } \mathbb{R}$$

Minimizziamo rispetto ad $\varepsilon > 0$ in modo analogo a quanto fatto prima

$$|f'(x)| \leq g(\varepsilon) = C_1(p, ||f||_p)\varepsilon^{-1-\frac{1}{p}} + C_2(p, ||f''||_p)\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}$$

,

$$\begin{aligned}
g'(\varepsilon) &= -C_1\left(1+\frac{1}{p}\right)\varepsilon^{-2-\frac{1}{p}} + C_2\left(1-\frac{1}{p}\right)\varepsilon^{-\frac{1}{p}} \\
&= \varepsilon^{-\frac{1}{p}}\left(-C_1\left(1+\frac{1}{p}\right)\varepsilon^{-2} + C_2\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) = 0 \quad \text{per } \varepsilon = \sqrt{\frac{(p+1)C_1}{(p-1)C_2}} \equiv \varepsilon_{min}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(\varepsilon_{min}) =& C_1 \left(\sqrt{\frac{(p+1)C_1}{(p-1)C_2}} \right)^{-1-\frac{1}{p}} + C_2 \left(\sqrt{\frac{(p+1)C_1}{(p-1)C_2}} \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
=& \left(\frac{C_1}{C_2} \right)^{-\frac{1}{2p}} (C_1C_2)^{\frac{1}{2}} C_3(p) \\
=& C_1^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} C_2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} C_3(p) \\
=& A(p)||f||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} ||f''||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)} \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
||f'||_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq A(p)||f||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} ||f''||_{L_p(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{p}\right)}
$$ [3]

dove $A(p)$ e $C_3(p)$ dipendono solo da p, ma non da f e si ha precisamente

$$
A(p) = \left(\frac{4p'}{p'+1} \left(\frac{p+1}{p'+1} \right)^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{2p'}} \leq \sqrt{2e^{\frac{1}{e}}} < 2
$$

per cui abbiamo concluso.

□

[3] Abbiamo già ottenuto un risultanto importante, ovvero una stima della norma L_∞ di f che dipende da una costante indipendente da f

Bibliografia

[1] Haim Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010

[2] Victor I. Burenkov: *Sobolev Spaces on Domains*, Springer, 1998

[3] www1.mate.polimi.it/ bramanti/corsi/materialedottorato/sobolev.pdf

[4] Elias M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, 1971

[5] S.L. Sobolev: *On a theorem of functional analysis*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1938

[6] Susanne C. Brenner e L.Ridgway Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer, 2000

[7] J.Leray: *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math., 1934