UNIVERSITÀ DI PISA

CORSO DI ANALISI CONVESSA

Applicazione della dualità ad un problema di controllo ottimo

C. Ginevra Biondi

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Indice

1 Preliminari **5**
1.1 Generalità sugli spazi L^2 5
1.2 Dualità e ottimizzazione 5
1.2.1 Proprietà della funzione coniugata
. . . . 5
1.2.2 Problema primale e problema duale 6
1.2.3 Relazione tra le soluzioni del problema primale e del problema duale . . 6
1.2.4 Caso particolare 7
1.3 Equazioni paraboliche 9
1.3.1 Soluzioni deboli 10
1.3.2 Esistenza e unicità della soluzione
. . . . 11
1.4 Definizione e proprietà degli spazi $\Xi^{2rm,r}$ 13

2 Un problema di controllo ottimo **15**
2.1 Il problema primale 15
2.2 Il problema duale 17
2.2.1 Formulazione del problema duale
. . . . 17
2.3 Soluzione del problema 22

Introduzione

La teoria del controllo ottimo nasce dal calcolo delle variazioni e si ha l'obiettivo di minimizzare una data quantità. Questa quantità (tipicamente un funzionale integrale) dipende da una funzione u che chiameremo controllo. Si associa ad un cosiddetto problema primale $\mathbf{P}$ di minimizzazione un problema duale $\mathbf{P^*}$ di massimizzazione e si sfruttano le relazioni tra le soluzioni dei problemi (relazioni estremali).

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Generalità sugli spazi L^2

Definizione 1.1.1. Siano (X, μ) uno spazio di misura e H uno spazio di Hilbert, allora definiamo

$$L^2(X, H) = \{f : X \to H \text{ tali che } \int_X ||f||_H^2 d\mu < \infty\}$$

e la norma

$$||f|| := \left(\int_X ||f||_H^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposizione 1.1.2. *$L^2(X, H)$ con la norma definita sopra è uno spazio di Hilbert*

1.2 Dualità e ottimizzazione

Definizione 1.2.1. Sia $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$, definiamo funzione coniugata (o polare) di f $f^* : V^* \to \overline{\mathbb{R}}$ come

$$f^*(u^*) = sup_{u \in V}\{\langle u, u^* \rangle - f(u)\}$$

dove V^* è il duale topologico di V e $\langle , \rangle$ è la dualità associata.

Nota 1.2.2. Osserviamo che f^* è sci e convessa in quanto sup puntuale delle funzioni affini continue $\langle u, . \rangle - f(u)$

Definizione 1.2.3. Ricordiamo che f viene detta propria se $f \neq +\infty$ costante e $f \neq -\infty$ $\forall x$

1.2.1 Proprietà della funzione coniugata

Siano f e f^* come sopra, valgono le seguenti proprietà

Proposizione 1.2.4. *Ricordiamo alcune proprietà senza dimostrarle delle relazioni tra una funzione e la sua coniugata*

- $x_1 \in V, x_2 \in V^*$ *allora* $x_2 \in \partial f(x_1) \Leftrightarrow x_1 \in \partial f^*_{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) + f^*(x_2) = 0$
- f *propria* $\Leftrightarrow f^*$ *propria*
- *Se* f *è differenziabile secondo Gateaux in* x *allora* $x^* \in \partial f \Leftrightarrow f'(x)(x' - x) \geq \langle x^*, x' - x \rangle$
- $f^*(0) = inf_V f$
- $f \geq g \Rightarrow g^* \geq f^*$
- $f(x) + f^*(x^*) \geq \langle x, x^* \rangle \ \forall x, x^*$

1.2.2 Problema primale e problema duale

Siano $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ e $\mathbb{Y}_1, \mathbb{Y}_2$ in dualità e sia $F : \mathbb{X}_1 \times \mathbb{Y}_1 \to \overline{\mathbb{R}}$, supponiamo di voler trovare x_1 tale che

$$F(x_1, 0) = inf_{\mathbb{X}_1} F(\cdot, 0) := inf P$$

(problema primale $\mathbf{P}$)

Chiamiamo problema duale $\mathbf{P^*}$ il seguente: trovare y_2 tale che

$$F^*(0, y_2) = sup_{\mathbb{Y}_2}(-F^*(0, y_2)) := sup P^*$$

1.2.3 Relazione tra le soluzioni del problema primale e del problema duale

Proposizione 1.2.5. *Vale*

$$-\infty \leq sup P^* \leq inf P \leq +\infty$$

e chiamiamo $inf P - sup P^*$ *duality gap*

Proposizione 1.2.6. *Se esistono soluzioni per* $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P^*}$ *e se* $inf P = sup P^* < \infty$ *allora le soluzioni* $\overline{u}$ *di* $\boldsymbol{P}$ *e* $\overline{u^*}$ *di* $\boldsymbol{P^*}$ *sono legate dalle relazioni estremali*

$$F(\overline{u}, 0) + F^*(0, \overline{u^*}) = 0$$

o equivalentemente

$$(0, \overline{u^*}) \in \partial F(\overline{u}, 0)$$

Nota 1.2.7. Osserviamo che per definizione di funzione coniugata in generale

$$F(\overline{u}, 0) + F^*(0, \overline{u^*}) \geq \langle (u, 0), (0, u^*) \rangle = 0$$

$\forall u \in V \forall u^* \in Y^*$

1.2.4 Caso particolare

Si ricorda un caso particolare che tornerà utile nella risoluzione del problema di controllo ottimo affrontato al capitolo 2

Consideriamo la dualità naturale $\mathbb{X}, \mathbb{X}^*$ e $\mathbb{Y}, \mathbb{Y}^*$ muniti della topologia debole e *-debole, supponiamo inoltre che valgano le seguenti condizioni

- $\mathbb{X}$ Banach riflessivo, $\mathbb{Y}$ normato
- $\Lambda \in L(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ lineare continuo
- $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f \neq -\infty$, $g : \mathbb{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g \neq -\infty$ convesse s.c.i proprie
- $\lim_{||x|| \to +\infty} (f(x) + g(\Lambda x)) = +\infty$
- $\exists x_0 \in \mathbb{X}$ tale che $x_0 \in D(f)$ e $\Lambda x_0 \in D(g)$

e definiamo $F : \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ come

$$F(x, y) = f(x) + g(\Lambda x - y)$$

allora abbiamo

$$F^*(0, y^*) = sup_{\mathbb{X}\times\mathbb{Y}}\{\langle (x, y), (0, y^*) \rangle - F(x, y)\} = sup_{\mathbb{X}} sup_{\mathbb{Y}}\{\langle y, y^* \rangle - f(x) - g(\Lambda x - y)\}$$

Poniamo $z = \Lambda x - y$

$$= sup_{\mathbb{X}} sup_{\mathbb{Y}}\{\langle \Lambda x - z, y^* \rangle - f(x) - g(z)\} = sup_{\mathbb{X}}\{\langle \Lambda x, y^* \rangle - f(x)\} + sup_{\mathbb{Y}}\{\langle -z, y^* \rangle - g(z)\}$$

$$= sup_{\mathbb{X}}\{\langle x, \Lambda^* y^* \rangle - f(x)\} + g^*(-y^*) = f^*(\Lambda^* y^*) + g^*(-y^*)$$

Allora per un teorema[1] esistono soluzioni non banali per **P** e **P*** e valgono per queste soluzioni le condizioni di estremalità $F(\overline{x}, 0) + F^*(0, \overline{y^*}) = 0$ che in questo caso si possono riscrivere come

[1] vedere le note di analisi convessa, teorema 4.2.13 pag 86

$$0 = f(\overline{x}) + g(\Lambda\overline{x}) + f^*(\Lambda^*\overline{y^*}) + g^*(\overline{y^*})$$

in particolare

$$infP = inf\{f(x) + g(\Lambda x)\} = sup\{f^*(\Lambda^* y^*) + g^*(-y^*)\} = supP^*$$

Teorema 1.2.8. *Assumiamo che* $\exists u_0 \in V$ *tale che* $J(u_0, \Lambda u_0) \leq \infty$ *e* $p \to J(u_0, p)$ *continua in* Λu_0*, supponiamo inoltre che* V *sia un Banach riflessivo,* $J \in \Gamma^0(V \times Y)$ *e*

$$\lim_{||u|| \to \infty} J(u, \Lambda u) = +\infty$$

allora $\boldsymbol{P}$ *e* $\boldsymbol{P^*}$ *ammettono almeno una soluzione e* $inf\boldsymbol{P} = sup\boldsymbol{P^*}$
Valgono inoltre le relazioni di estremalità per le soluzioni dei due problemi

1.3 Equazioni paraboliche

Le equazioni paraboliche descrivono la variazione nel tempo t della densità di una data quantità fisica (ad esempio il calore) in una regione U. Il termine del secondo ordine a è legato alla diffusione mentre b al trasporto

Sia dato il problema (1)

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f \text{ su } U_T \\ u = 0 \text{ su } \partial U \times [0,T] \\ u = g \text{ su } U \times \{0\} \end{cases}$$

Dove $U_T = U \times [0,T]$

Definizione 1.3.1. Diciamo che un operatore differenziale $\partial_t + L$ è parabolico se esiste una costante $\theta > 0$ tale che

$$\sum_{i,j}^{n} a^{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \ \forall (x,t) \in U \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Dove L ha la forma

$$Lu = -\sum_{i,j} \partial_j \left(a^{i,j}\partial_i u\right) + \sum_i b^i \partial_i u + cu$$

oppure

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{i,j}\partial_i\partial_j u + \sum_i b^i \partial_i u + cu$$

$a = a(x,t)$ $b = b(x,t)$, $c = c(x,t)$

Esempio (equazione del calore) $a^{i,j} = \delta_{i,j}$, $b = c = 0$ e $f = 0$ il problema diventa $\partial_t u - \triangle u = 0$

Teorema 1.3.2. *(Proprietà di H^{-1})*[2]

Sia $f \in H^{-1}(U)$, allora esistono funzioni $f^0, f^1, .., f^n \in L^2(U)$ tali che $\forall v \in H_0^1(U)$

$$\langle f, v \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = \int_U f^0 v + \sum_i f^i \partial_i v$$

inoltre

$$||f||_{H^{-1}} = inf\{\left(\int_U \sum_i |f^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ tale che vale la proprietà sopra } \}$$

In particolare abbiamo

$$\langle u, v \rangle_{L^2(U)} = \langle u, v \rangle_{H_0^1, H^{-1}}$$

[2] Per la dimostrazione vedere Evans, PDE, pag 300 2nd ed

$\forall v \in L^2(U) \subset H^{-1}$ $\forall u \in H_0^1(U)$

Notazione: *scriveremo* $f = f^0 - \sum \partial_i f^i$

1.3.1 Soluzioni deboli

Supponiamo d'ora in avanti L nella prima forma, $a^{i,j}, b^i, c \in L^\infty(U_T)$, $f \in L^2(U_T)$, $g \in L^2(U)$ e $a^{i,j} = a^{j,i}$, definiamo la forma bilineare $B = B_t$ come

$$B(u,v) = \int_U \{\sum_{i,j} a^{i,j} \partial_i u \partial_j v + \sum_i b^i \partial_i u v + cuv\} dx$$

dove $u, v \in H_0^1(U)$, $0 \leq t \leq T$ q.o

Perchè si vuole definire una nozione di soluzione debole

Supponiamo di avere u soluzione liscia del sistema (1), consideriamo la mappa associata

$$\mathbf{u} : [0,T] \to H_0^1(U)$$

definita come

$$\mathbf{u}(t)(x) = u(x,t)$$

similmente definiamo la mappa associata ad f come

$$\mathbf{f} : [0,T] \to L^2(U)$$

come

$$\mathbf{f}(t)(x) = f(x,t)$$

fissiamo ora $v \in H_0^1(U)$ e moltiplichiamo $\partial_t + Lu = f$ per v, integriamo poi su U ottenendo

$$\int_U \partial_t uv + Luv = \int_U fv$$

da cui, integrando per parti

$$\langle \mathbf{u'}, v\rangle_{L^2(U)} + B(\mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{f}, v\rangle_{L^2(U)}$$

$(' = \frac{d}{dt})$

Osserviamo adesso che

$$\partial_t u = g^0 + \sum_i \partial_i g^i \text{ su } U_T$$

con $g^0 := f - \sum_i b^i \partial_i u - cu$, $g^j := \sum_i a^{i,j} \partial_i u$, quindi per un teorema di Sobolev $\partial_t u \in H^{-1}(U)$ e inoltre

$$||\partial_t u||_{H^{-1}} \leq \left(\sum_i ||g^i||_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(||u||_{H_0^1} + ||f||_{L^2} \right)$$

Queste osservazioni ci suggeriscono di cercare una soluzione con **u'** $\in H^{-1}(U)$ q.o t

Definizione di soluzione debole

Definizione 1.3.3. Sia $\mathbf{u} \in L^2([0,T]\,;H_0^1(U))$ tale che $\mathbf{u'} \in L^2([0,T]\,;H^{-1}(U))$, diciamo che $\mathbf{u}$ è soluzione debole per (1) se

$$\begin{cases} \langle \mathbf{u'}, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}} + B(\mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{f}, v\rangle_{L^2(U)} \ \forall v \in H_0^1(U) \\ \mathbf{u}(0) = g \end{cases}$$

Osserviamo che grazie ad un teorema[3] $\mathbf{u} \in C([0,T]\,;L^2(U))$ e quindi ha senso la seconda richiesta.

1.3.2 Esistenza e unicità della soluzione

Teorema 1.3.4. *(Esistenza della soluzione)*[4]

Esiste una soluzione debole del problema (1)

Lemma 1.3.5. *(di Grömwall)*
Sia u tale che $u'(t) \leq \beta(t)u(t)$, allora $\Rightarrow u(t) \leq u(a)e^{\int_a^t \beta(s)ds}$

Teorema 1.3.6. *(Unicità della soluzione)*

La soluzione debole del problema (1) *(che sappiamo esistere grazie al problema precedente) è unica*

Dimostrazione. Basta dimostrare l'unicità nel caso $f = g = 0$, che sarà $\mathbf{u} \equiv 0$.
In questo caso il problema diventa

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = 0 \text{ su } U_T \\ u = 0 \text{ su } \partial U \times [0,T] \\ u = 0 \text{ su } U \times \{0\} \end{cases}$$

Ora

$$\langle \mathbf{u'}, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}} + B(\mathbf{u}, v) = \langle \mathbf{f}, v\rangle_{L^2(U)} = 0$$

[3] Evans, *Partial differential Equations*, Teorema 3, 5.2.9
[4] per la dimostrazione vedere Evans, *Partial differential Equations*, teorema 3 pag 378 (seconda edizione)

poniamo $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, utilizzando un teorema precedente si vede che

$$\langle \mathbf{u'}, \mathbf{u} \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = \langle u', u \rangle_{L^2(U)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||\mathbf{u}||_{L^2}^2\right)$$

Siccome $(\beta, \gamma \geq 0)$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \beta ||\mathbf{u}||_{H_0^1}^2 - \gamma ||\mathbf{u}||_{L^2}^2 \geq -\gamma ||\mathbf{u}||_{L^2}^2$$

Applicando il lemma di Grömwall otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||\mathbf{u}||_{L^2}^2\right) + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}||\mathbf{u}||_{L^2}^2\right) - \gamma ||\mathbf{u}||_{L^2}^2 \Rightarrow$$

$$||\mathbf{u}||_{L^2}^2 \leq ||\mathbf{u}||_{L^2}^2(0) e^{\int 2\gamma} = 0$$

Per cui deve essere $\mathbf{u} \equiv 0$ □

Teorema 1.3.7. *(Di regolarità[5]) Siano* $g \in H_0^1(U)$ *e* $\boldsymbol{f} \in L^2([0,T]\,; L^2(U))$ *e supponiamo* $\boldsymbol{u} \in L^2([0,T]\,; H_0^1(U))$ *con* $\boldsymbol{u'} \in L^2([0,T]\,; H^{-1}(U))$ *soluzione debole di*

$$\begin{cases} \partial_t u + Lu = f \ \ su\ U_T \\ u = 0 \ \ su\ \partial U \times [0,T] \\ u = g \ \ su\ U \times \{0\} \end{cases}$$

allora abbiamo in effetti $\boldsymbol{u} \in L^2([0,T]\,; H^2(U)) \cap L^\infty([0,T]\,; H_0^1(U))$ *e* $\boldsymbol{u'} \in L^2([0,T]\,; L^2(U))$

[5] Per la dimostrazione vedere Evans, PDE 2nd ed pag 382 (Teorema 5)

1.4 Definizione e proprietà degli spazi $\Xi^{2rm,r}$

Definizione 1.4.1. (Spazi Ξ^s, s intero)
Sia $\rho(x) \in D(\overline{\Omega})$ una funzione positiva su Ω, nulla su $\partial\Omega$ e tale che

$$\lim_{x \to x_0 \in \partial\Omega} \frac{\rho(x)}{d(x, \partial\Omega)} \neq 0$$

(ovvero ρ è "equivalente " alla distanza $d(x, \partial\Omega)$).
Definiamo allora lo spazio

$$\Xi^s(\Omega) = \{u \text{ tali che } \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq s\}$$

e la norma

$$||u||_{\Xi^s} := \sum_{|\alpha| \leq s} ||\rho^{|\alpha|} D^\alpha u||_{L^2}$$

Proposizione 1.4.2. $\Xi^s(\Omega)$ *è ben definito*

Proposizione 1.4.3. $\Xi^s(\Omega)$ *munito della norma sopra è uno spazio di Hilbert*

Definizione 1.4.4. (Spazi $\Xi^{2mr,r}$, r intero)

Sia $d(t) \in C^\infty([0, T])$ una funzione fissata tale che

$$d(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \leq t_0 \\ T - t & \text{se } T - t_0 \leq t \leq T \end{cases}$$

dove t_0 è fissato e tale che $0 < t_0 < T - t_0$

Definiamo allora

$$\Xi^{2mr,r}(Q) = \{v \text{ tali che } d^j(t) v^{(j)} \in L^2([0, T]\,; \Xi^{2(r-j)m}(\Omega))\ ;\ 0 \leq j \leq r\}$$

Dove $Q = [0, T] \times \Omega$

Proposizione 1.4.5. $\Xi^{2rm,r}$ *è ben definito*

Proposizione 1.4.6. $\Xi^{2rm,r}$ *munito della norma*

$$||v||_{\Xi^{2mr,r}} := \left(\sum_{j=1}^{r} ||d^j v^{(j)}||_{L^2([0,T];\Xi^{2(r-j)m}(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}}$$

è uno spazio di Hilbert

Proposizione 1.4.7. *$C_0^\infty(Q)$ è denso in $\Xi^{2mr,r}$*

Definizione 1.4.8. Chiamiamo $\Xi^{-2mr,-r}(Q) := \left(\Xi^{2mr,r}(Q)\right)'$ il duale topologico di $\Xi^{2mr,r}(Q)$

Proposizione 1.4.9. *$\Xi^{2,1}(Q) \subset L^2(Q) \subset L^2(Q) \subset \Xi^{-2-1}(Q)$ e tutte le immersioni sono continue e dense*

Capitolo 2

Un problema di controllo ottimo

2.1 Il problema primale

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $T > 0$, $Q = [0,T] \times \Omega$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $f \in L^2(Q)$ dati. $\forall u \in L^2(Q)$ $\exists! y = y(x,t,u) \in L^2([0,T]\,; H_0^1(\Omega))$ soluzione debole del problema

$$\begin{cases} \partial_t y - \triangle y = f + u \text{ su } Q \\ y = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0,T) := \Sigma \\ y(0,x,u) = y_0(x)\ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Definiamo il funzionale (*cost function*)

$$J(u) := \int_Q |y(u) - y_d|^2 dxdt$$

definiamo

$$\{u \in L^2(Q), |\nabla y(x,t,u)| \leq 1 \text{ per quasi ogni } (x,t) \in Q\} := C$$

Ci interessa risolvere il problema (2)

$$min_C\{J(u)\}$$

Ora il problema (2) non necessariamente ammette soluzione, vediamo però che allargando la classe dei controlli u ammissibili eiste ed unica soluzione al problema di minimo.
Vale infatti la seguente

Proposizione 2.1.1. *Assumiamo che esistano controlli u tali che*

$$\begin{cases} u \in L^2(Q) \\ |\nabla y(x,t,u)| \leq 1 \textit{ per quasi ogni } (x,t) \in Q \end{cases}$$

Allora la soluzione al problema di minimo esiste unica in uno spazio funzionale[1] $V \supset L^2(Q)$

Dimostrazione. Poniamo $\phi = y(0)$ $(= y(x,t,0))$ e

$$\begin{cases} z(u) = y(u) - y(0) \\ z_d = y_d - y(0) \end{cases}$$

allora $z(u)$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \partial_t z - \triangle z = u \text{ su } Q \\ z = 0 \text{ su } \partial\Omega \times (0,T) := \Sigma \\ z(0,x,u) = 0 \ \forall x \in \Omega \end{cases}$$

Infatti $\partial_t z - \triangle z = \partial_t y - \triangle y - \partial_t y(0) + \triangle y(0) = f + u - f = u$

Ora la mappa $u \to z(u)$ è lineare continua $L^2(Q) \to L^2([0,T]\,;H_0^1(\Omega))$ ed è isomorfismo di V su $L^2(Q)$[2]

La mappa $u \to J(u)$ risulta quindi strettamente convessa e continua $V \to \mathbb{R}$, per cui se[3] $C \neq \emptyset$ allora $\exists \overline{u}$ tale che $J(\overline{u}) = min_C\{J(u)\}$ (osserviamo infatti che C è un convesso chiuso in $L^2(Q)$ e $y(\overline{u})$ è la proiezione di y_d su C in $L^2(Q)$)

□

[1] Tale V è lo spazio $\Xi^{-2,-1}(Q)$ con duale $V^* = \Xi^{2,1}(Q)$ descritto al capitolo 1

[2] per la dimostrazione di questo fatto vedere *Problèmes aux limites non homogènes*, Lions, E.Magenes Dunod Parigi 1968

[3] dalla proposizione $II.1.2$, *Convex analysis and variational problems*, Ekeland- Témam

2.2 Il problema duale

Poniamo $Y = Y^* = L^2(Q) \times L^2(Q)^n$, $\Lambda u = (\Lambda_1 u, \Lambda_2 u)$ con $\Lambda_1 u = z(u)$ e $\Lambda_2 u = \nabla z(u)$ dove z è quello definito precedentemente. Denotiamo inoltre $(p_1, p_2) = p \in Y$ e

$$\begin{cases} F(u) = 0 \ \forall u \in V \\ G(p) = G_1(p_1) + G_2(p_2) \end{cases}$$

dove

$$G_1(p_1) = \int_Q |p_1 - z_d|^2 dxdt$$

e

$$G_2(p_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } |(p_2 + \nabla\phi)(x,t)| \leq 1 \text{ q.o} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si verifica che F, G sono convessi s.c.i propri e che il problema (3)

$$inf_V \{F(v) + G(\Lambda v)\}$$

è equivalente al problema (2)

2.2.1 Formulazione del problema duale

Vediamo la formulazione del problema duale di (3)[4]

Proposizione 2.2.1. *La coniugata di G è definita da*

$$G_1^*(p_1) = \int_Q (p_1 z_d + \frac{1}{2}|p_1|^2) dxdt$$

e

$$G_2^*(p_2) = \int_Q (|p_2| - p_2 \nabla\phi) dxdt$$

Dimostrazione. (accenno)
Diamo un'idea di come calcolare G_1^* e G_2^*

[4] Osserviamo che siamo nel caso particolare di problema descritto nel capitolo 1 sezione 2

Cominciamo da G_1^*, per definizione di funzione coniugata[5] abbiamo

$$G_1^*(p_1) = sup_{Y_1}\{\langle u, p_1\rangle - \frac{1}{2}\int_Q |u - z_d|^2\}$$

chiamo

$$I(u) := \langle u, p_1\rangle - \frac{1}{2}\int_Q |u - z_d|^2$$

con argomenti variazionali notiamo che se u_0 è punto estremale per $I(u)$ allora dovrà essere

$$\frac{d}{dt}I(u_0 + tv) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_Q \{(u_0 + tv)p_1 - \frac{1}{2}(u_0 + tv - z_d)^2\} \mid_{t=0} = 0$$

$\forall v$ in qualche spazio vettoriale ammissibile (in particolare v deve essere tale che non c'è termine di bordo al momento dell'integrazione per parti) da cui

$$\int_Q v(p_1 - u_0 + z_d) = \partial I_{u_0}[v] \equiv 0 \Leftrightarrow u_0 = p_1 + z_d$$

a questo punto sostituendo nell'espressione di G_1^* troviamo[6]

$$G_1^*(p_1) = \langle u, p_1\rangle - \frac{1}{2}\int_Q |u - z_d|^2 \mid_{u=u_0} = \int_Q (p_1 + z_d)p_1 - \frac{1}{2}\int_Q |p_1|^2 = \int_Q p_1 z_d + \frac{1}{2}|p_1|^2$$

diamo ora anche un brevissimo accenno al calcolo di G_2^*
Abbiamo

$$G_2^*(p_2) = sup_{Y_2}\{\langle u, p_2\rangle - G_2(u)\} = sup_{|u+\nabla\phi|\leq 1 \text{ q.o}}\{\langle u, p_2\rangle\}$$

Notiamo in questo caso che per ogni p_2 fissatp si deve prendere u di norma massima tale che $|u + \nabla\phi| \leq 1$ q.o ed è quindi ragionevole supporre[7] che si deve cercare u tale che $|u + \nabla\phi| = 1$ q.o, che si traduce in

$$G_2^*(p_2) = \int_Q (1 - \nabla\phi)p_2 = \int_Q |p_2| - \nabla\phi p_2$$

□

Lemma 2.2.2.

$$F^*(\Lambda^* p) = \begin{cases} 0 & se\ p_1 = \nabla p_2 \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalle definizioni abbiamo

$$F^*(\Lambda^* p) = sup_V\{\langle\Lambda^* p, u\rangle - 0\} = sup_V\langle p, \Lambda u\rangle$$

ora

$$\langle p, \Lambda u\rangle_Y = \int_Q \{p_1 z(u) + p_2\nabla z(u)\}dxdt \ (4)$$

[5] vedere capitolo 1 sezione 2
[6] si dovrebbe verificare che u_0 realizza effettivamente il massimo e che tutti i passaggi svolti sono giustificati da una sufficiente regolarità delle funzione coinvolte, oltre a specificare lo spazio vettoriale dei v ammissibili. Tralasciamo queste verifiche per brevità
[7] anche qui si tralasciano le dimostrazioni in dettaglio

ricordiamo che $z = 0$ su $\partial\Omega \times (0, T) = \Sigma$, da cui applicando Gauss-Green

$$\int_Q p_2 \nabla z(u) = \int_{\partial\Omega\times(0,T)} p_2 z(u) \cdot \nu - \int_Q \nabla p_2 z(u) = -\int_Q \nabla p_2 z(u)$$

per cui

$$(4) = \int_Q (p_1 - \nabla p_2) z(u) dxdt$$

Vogliamo adesso dare condizioni esplicite su u per trovare il sup dell'espressione sopra: chiamiamo allora ψ la soluzione debole (che esiste ed unica in $L^2([0,T]\,;H_0^1(\Omega))$[8]) del problema parabolico

$$\begin{cases} -\partial_t\psi - \triangle\psi = p_1 - \nabla p_2 \text{ su } Q \\ y = 0 \text{ su } \partial\Omega\times(0,T) := \Sigma \\ \psi(x,T) = 0\ \forall x\in\Omega \end{cases}$$

Abbiamo allora

$$\int_Q (p_1 - \nabla p_2) z(u) = \int_Q (-\partial_t\psi - \triangle\psi)\, z(u)$$

Applicando Gauss-Green il primo menbro dell'integrale diventa

$$\int_Q -\partial_t\psi z(u) = -\int_{\partial(0,T)\times\Omega} \psi z(u) + \int_Q \psi\partial_t z(u)$$

mentre il secondo

$$\int_Q \triangle\psi z(u) = \int_{\partial\Omega\times(0,T)} \nabla\psi z(u) - \int_Q \nabla\psi\nabla z(u) = -\int_Q \nabla\psi\nabla z(u)$$

applicando di nuovo GG troviamo

$$\int_Q \nabla\psi\nabla z(u) = \int_{\partial\Omega\times(0,T)} \psi\nabla z(u) - \int_Q \psi \triangle z(u) = -\int_Q \psi\triangle z(u)$$

ricordando adesso che per definizione $\partial_t z = u + \triangle z$ possiamo scrivere

$$\int_Q (-\partial_t\psi - \triangle\psi)\, z(u) = \int_Q \{\psi(\triangle z + u) - \psi \triangle z\} = \int_Q \psi u$$

Adesso il problema da risolvere è quindi

$$sup_V \int_Q \psi u$$

questo vale $\begin{cases} 0 \text{ se } \psi\equiv 0 \\ +\infty \text{ altrimenti} \end{cases}$

e $\psi\equiv 0 \Leftrightarrow -\partial_t\psi - \triangle\psi = 0 \Leftrightarrow p_1 = \nabla p_2$

□

[8] vedere capitolo 1 sezione 3

Possiamo finalmente scrivere il problema duale in forma esplicita come[9]

$$sup_{p\in Y}\{-F^*(\Lambda^* p) - G^*(-p)\} = sup\{\int_Q \left(-\frac{1}{2}|p_1|^2 + p_1 z_d - |p_2| - p_2\nabla\phi\right) dxdt\}$$

dove $p_1 \in L^2(Q)$, $p_2 \in L^2(Q)^n$, $p_1 = \nabla p_2$

[9] vedere capitolo 1 sezione 2, caso particolare

2.3 Soluzione del problema

Proposizione 2.3.1.

$$inf\boldsymbol{P} = sup\boldsymbol{P^*} < +\infty$$

Inoltre se il problema $\boldsymbol{P^*}$ *ammette soluzione* $\overline{p^*}$ *questa è legata alla soluzione* $\overline{u}$ *di* $\boldsymbol{P}$ *dalle relazioni*

$$\overline{p_1^*} = y(\overline{u}) - y_d$$

$$|\overline{p_2}| + \overline{p_2}\nabla y(\overline{u}) = 0 \;\; q.o$$

in particolare possiamo riscrivere la seconda equazione come $\nabla y = -\frac{\overline{p_2}}{|\overline{p_2}|}$ *dato che* $|\nabla y| \leq 1$ *q.o*

Dimostrazione. (accenno brevissimo[10])

Per quanto riguarda la dimostrazione delle relazioni estremali basta notare che se esiste soluzione allora possiamo scrivere[11]

$$G_1(z(\bar{(u)})) + G_1^*(-\overline{p}) = -\langle z(\overline{u}), \overline{p_1^*}\rangle$$

e

$$G_2(\nabla z(\overline{u})) + G_2^*(-\overline{p_2}) = -\langle \nabla z(\overline{u}), \overline{p_2^*}\rangle$$

dove $\overline{p^*}$ è una soluzione.

Il criterio[12] che normalmente assicura $inf\mathbf{P} = sup\mathbf{P^*} < +\infty$ non si applica qui né al problema primale né al duale. Si introducono quindi i problemi approssimati[13] P_ε e P_ε^* che definiamo mediante

$$G_\varepsilon(p) := G_1(p_1) + G_{2\varepsilon}(p_2)$$

con

$$G_{2\varepsilon}(p_2) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_Q (|p_2 + \nabla\phi| - 1)_+^2$$

con calcoli analoghi a quelli fatti per G^* si vede che il funzionale coniugato risulta

$$G_{2\varepsilon}^*(p_2) = \int_Q \frac{\varepsilon}{2}|p_2|^2 + |p_2| - p_2\nabla\phi$$

definiamo adesso il problema approssimato P_ε come $inf_V\{F(v)+G_\varepsilon(\Lambda v)\}$ e il problema duale P_ε^* come $sup_V\{-F^*(\Lambda^* p) - G_\varepsilon^*(-p)\}$.

---

[10] per la dimostrazione completa vedere Ekeland-Témam, Convex Analysis and Variational Problems, pag 211-213
[11] vedere capitolo 1 sezione 2
[12] criterio III, 4.21 Ekeland-Témam
[13] questi P_ε si dicono penalizzati di $\mathbf{P}$ (Ekeland-Témam, p 213)

Ora questi problemi P^*_ε risultano coercivi in Y e questo ci assicura l'esistenza di una soluzione, il funzionale $G^*_{2\varepsilon}$ risulta inoltre strettamente convesso, fatto che assicura l'unicità della soluzione. Per quanto riguarda P_ε si applica lo stesso metodo che abbiamo usato per **P**.

Risultano inoltre i seguenti fatti[14]
Chiamiamo $\overline{u_\varepsilon} \in V$ la soluzione di P_ε e $\overline{p_\varepsilon}$ la soluzione di P^*_ε, allora

$$inf P_\varepsilon \to inf \mathbf{P}$$

$$sup P^*_\varepsilon \to sup \mathbf{P*}$$

$$\overline{u_\varepsilon} \to \overline{u} \text{ fortmente in } V$$

$$\overline{p_{1\varepsilon}} \to y(\overline{u}) - y_1 \text{ fortemente in } L^2(Q)$$

□

[14] si utilizza che Λ_1 è debolmente continuo $V \to L^2(Q)$

Bibliografia

[1] Ivar Ekeland, Roger Témam: *Convex Analysis and Variational Problems*, Society for Industrial Mathematics, 1987

[2] Lawrence C.Evans: *Partial Differential Equations, 2nd edition*, American Mathematical Society, 1998

[3] Jaques-Louis Lions, Enrico Magenes : *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications vol I,II*, Dunod , 1968

[4] C.Saccon : *Dispense di Analisi Convessa*