Introduzione

Con questo documento si vogliono presentare le proprietà dei numeri complessi e la loro applicazione a problemi che potrebbero risultare non risolvibili mediante gli strumenti associati agli altri insiemi di numeri. Il campo dei numeri complessi viene correntemente indicato con il simbolo $\mathbb{C}$ ed è una estensione del più familiare campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.
I numeri complessi vengono introdotti in matematica per risolvere problemi del tipo

$$x^2 = -1$$

e in generale per dare soluzioni a tutte le equazioni di tipo polinomiale

1 Definizione di numero complesso e rappresentazioni

Un numero complesso può essere pensato come un punto nel piano $\mathbb{R}^2$ individuato da due coordinate

1.1 L'unità immaginaria

Definiamo unità immaginaria l'oggetto che gode della seguente proprietà:

$$i^2 = -1$$

Notiamo che come corollario abbiamo che vale il seguente fatto per i

- $i^k = i$ per $k \equiv 1 \; mod 4$
- $i^k = -1$ per $k \equiv 2 \; mod 4$
- $i^k = -i$ per $k \equiv 3 \; mod 4$
- $i^k = 1$ per $k \equiv 0 \; mod 4$

1.2 Rappresentazione cartesiana

Nella forma cartesiana il numero complesso z viene individuato dalle sue coordinate reali x e y e si può scrivere come

$$z = x + iy$$

dove in possiamo immaginare i numeri complessi (1, 0) e (0, 1) identificati rispettivamente con l'unità reale 1 e l'unità immaginaria i. Nelle notazioni sopra chiamiamo x *parte reale* di z e la indichiamo talvolta come Rez mentre y *parte immaginaria* di z e la indichiamo con Imz

1.3 Rappresentazione polare (o esponenziale)

Nella rappresentazione polare (o esponenziale) il numero complesso z è individuato da una distanza dall'origine degli assi (ed è chiamato *modulo* di z) $|z|$ che corrisponde alla norma euclidea del vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e da un *argomento* θ che corrisponde all'angolo formato dal vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nel piano complesso con l'asse reale delle x.

Nota 1.1. Tale angolo θ non è definito per $z = 0$

In questa rappresentazione un numero complesso si scrive come

$$z = |z|e^{i\theta}$$

1.4 Dalla forma cartesiana alla forma polare

Supponiamo di avere un numero complesso non nullo[1] $z = x + iy$ e di volerlo scrivere in forma polare: si ha

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y \geq 0 \\ -arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

[1] si rammenta che un numero complesso si dice nullo se sono nulle entrambe le sue componenti

1.5 Dalla forma polare alla forma cartesiana

Esaminiamo adesso il problema inverso, sia dato un numero complesso in forma polare $z = \rho e^{i\theta}$ che vogliamo scrivere in forma cartesiana. Abbiamo

$$x = Rez = \rho cos\theta$$
$$y = Imz = \rho sen\theta$$

1.6 Forma trigonometrica

Talvolta può risultare comodo utilizzare una terza forma di scrittura dei numeri complessi detta **forma trigonometrica** , tale espressione si ottiene utilizzando la cosiddetta **formula di Eulero** . La formula di Eulero afferma che, per ogni numero reale x si ha

$$e^{ix} = cosx + isenx$$

. Ne risulta che se abbiamo in generale un numero complesso z scritto in forma polare $z = \rho e^{i\theta}$ lo possiamo riscrivere mediante la formula di Eulero come

$$z = \rho cos\theta + i\rho sen\theta$$

Nota 1.2. Un caso particolare della formula sopra è l'**identità di Eulero**

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

2 Coniugio

Dedichiamo questa sezione ad una particolare operazione che si può fare sui numeri complessi.

Definizione 2.1. Dato $z = a + ib$ definiamo coniugato di z il numero

$$\overline{z} = a - ib$$

Nel caso di z in forma polare $z = \rho e^{i\theta}$ invece abbiamo

$$\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$$

Esercizio 2.2. *Verificare sfruttando le relazioni trigonometriche che le due definizioni siano coerenti*

Notiamo che la definizione sopra ci dice che $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$, inoltre abbiamo

$$z\overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

3 Operazioni sui numeri complessi

Vediamo una rassegna di regole per effettuare operazioni sui numeri complessi.

3.1 Somma di numeri complessi

Per l'operazione di somma è comodo scrivere i numeri complessi in forma cartesiana, prendiamo quindi $z_1 = a_1 + ib_1$ e $z_2 = a_2 + ib_2$ la somma dei due numeri su $\mathbb{C}$ si definisce allora come

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

3.2 Moltiplicazione

La moltiplicazione tra numeri complessi in forma cartesiana si definisce sfruttando la propietà distribuitiva della moltiplicazione rispetto alla somma nel seguente modo

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Se abbiamo z_1 e z_2 scritti in forma polare

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Esercizio 3.1. *Verificare che le due definizioni di moltiplicazione siano coerenti*

3.3 Inverso

In quanto campo possiamo definire su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'operazione

$$z \to z^{-1}$$

Per definizione di inverso su un campo dobbiamo avere

$$zz^{-1} = 1$$

per ogni $z \neq 0$, sfruttando quindi le proprietà del coniugio troviamo

$$z\overline{z} = |z|^2 \Rightarrow z\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z^{-1}$$

per cui se abbiamo $z = a + ib$ il suo inverso diventa $z^{-1} = \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}$. In caso di numeri scritti in forma polare si verifica facilmente che

$$z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^{-1} = \rho^{-1} e^{-i\theta}$$

Nota 3.2. L'inverso ci permette di definire facilmente la divisione tra numeri complessi come

$$\frac{z}{w} = zw^{-1}$$

3.4 Elevamento a potenza e formula di de Moivre

Sia dato il numero complesso

$$z = \rho e^{i\theta}$$

dalle proprietà delle potenze risulta naturale

$$z^n = \rho^n e^{in\theta}$$

La versione trigonometrica dell'uguaglianza sopra viene talvolta chiamata *formula di de Moivre* e risulta

$$z^n = \rho^n (cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

tramite la formula di Eulero presentata in precedenza risulta evidente che le due formulazioni sono equivalenti.

Esercizio 3.3. *Calcolare le quantità cos(nx) e sen(nx) in termini di senx e cosx sfruttando la formula di De Moivre*

Cominciamo scrivendo le due uguaglianze[2]

$$(cosx + isenx)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i)^k sen^k x cos^{n-k} x$$

e

$$(cosx + isenx)^n = e^{inx} = cos(nx) + isen(nx)$$

a questo punto sfruttiamo le proprietà delle potenze di i per spezzare la somma in parte immaginaria e parte reale nel seguente modo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i)^k sen^k x cos^{n-k} x = \sum_{k\ pari} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} sen^k x cos^{n-k} x + i \sum_{k\ dispari} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} sen^k x cos^{n-k} x$$

da cui confrontando con l'espressione ottenuta tramite la formula di De Moivre troviamo

$$cos(nx) = \sum_{k\ pari} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} sen^k x cos^{n-k} x$$

e

$$sen(nx) = \sum_{k\ dispari} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} sen^k x cos^{n-k} x$$

[2] Formula del binomio di Newton

3.5 Radice n-esima

In questo paragrafo trattiamo l'operazione che sfrutta in modo più evidente le particolari proprietà del campo[3] $\mathbb{C}$. Come nel caso dell'elevamento a potenza la forma più comoda in cui trattare l'estrazione di radice è quella polare.Cominciamo considerando l'equazione

$$z^n = 1$$

vogliamo trovare tutti i numeri complessi[4] z che elevati alla potenza n-esima danno come risultato 1. cominciamo scrivendo la nostra soluzione in forma polare $z = \rho e^{ix}$. dal momento che i moduli a destra e a sinistra dell'equazione devono coincidere deve essere necessariamente $\rho = 1$, ci resta da determinare l'angolo (gli angoli) x per cui si ha soluzione. Scriviamo quindi

$$z^n = e^{inx} = 1$$

Ricordando la rappresentazione sui piano di Gauss dei complessi deve essere quindi

$$nx = 2k\pi$$

con k intero $\Rightarrow$

$$x = \frac{2k\pi}{n}$$

ora l'angolo soluzione viene preso modulo 2π, per cui prendiamo

$$k \in \{0, ..., n-1\}$$

Possiamo quindi concludere che abbiamo n radici n-esime dell'unità (con angolo modulo 2π) e sono della forma

$$\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\}_{k\in\{0,...,n-1\}}$$

Consideriamo adesso il caso $z^n = \rho e^{i\theta}$, dal caso precedente di deduce traslando l'angolo e normalizzando ρ che in questo caso le radici devono essere della forma

$$\{\rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}}\}_{k\in\{0,...,n-1\}}$$

[3] a questo proposito si ricorda infatti che i numeri complessi vengono introdotti appositamente per trovare radici di particolari polinomi

[4] questi numeri sono chiamati appunto radici n-esime dell'unità

Esercizio 3.4. *Calcoliamo le radici quinte di* $z = 3i = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$*: secondo la formula sopra le radici sono*

$$\{\sqrt[5]{3}e^{i\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{5}}\}_{k=0,1,2,3,4} = \{\sqrt[5]{3}e^{i\frac{\pi}{10}}, \sqrt[5]{3}e^{i\frac{\pi}{2}}, \sqrt[5]{3}e^{i\frac{9\pi}{10}}, \sqrt[5]{3}e^{i\frac{13\pi}{10}}, \sqrt[5]{3}e^{i\frac{17\pi}{10}}\}$$

3.6 Logaritmo complesso

Definizione 3.5. Dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ diciamo che $w \in \mathbb{C}$ è un logaritmo complesso di z se $e^w = z$.
Scriviamo in questo caso $w \in log_{\mathbb{C}}(z)$

Scrivendo w in forma cartesiana e z in forma polare la definizione sopra si traduce in $e^{x+iy} = \rho e^{i\theta}$ da cui otteniamo le condizioni

$$\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \theta + 2k\pi \text{ dove } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Per cui

$$w \in log_{\mathbb{C}}(z) \Leftrightarrow w = log\rho + i(\theta + 2k\pi)$$

Definizione 3.6. Nelle notazioni usate sopra chiamiamo logaritmo principale di z il numero complesso $w = log\rho + i\theta$

4 Teorema fondamentale dell'algebra e applicazioni

In questa sezione presentiamo un importante risultato di cui non daremo dimostrazione[5] in due forme, diamo poi alcuni esempi di esercizi riguardanti le radici di polinomi

Teorema 4.1 (Teorema fondamentale dell'algebra, formulazione 1)**.** *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado* $n \geq 1$ *ammette almeno una soluzione complessa*

[5] La prima dimostrazione rigorosa viene fornita Gauss nel 1799 ed utilizza strumenti abbastanza elementari, esistono numerose altre dimostrazioni che fanno uso di strumenti più elaborati

Teorema 4.2 (Teorema fondamentale dell'algebra, formulazione 2)**.** *Ogni polinomio a coefficienti complessi di grado $n \geq 1$ ammette esattamente n soluzioni coplesse contate con molteplicità*

Proposizione 4.3. *Le due formulazioni sono equivalenti*

4.1 Equazioni di secondo grado

Dal teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che tutte le equazioni di secondo grado a coefficienti complessi ammettono 2 radici in $\mathbb{C}$ contate con molteplicità, vediamo direttamente un esempio di come risolvere un'equazione di questo tipo

Esercizio 4.4. *Calcoliamo le radici del polinomio a coefficienti complessi*

$$z^2 - 4z + 4 - \frac{1}{2}i$$

Comiciamo applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado $\frac{\Delta}{2} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = 4 - \left(4 - \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}i$ *per cui*

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{\Delta}{2}}}{1}$$

le radici quadrate di $\frac{1}{2}i$ *sono* $\sqrt{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$ *e* $\sqrt{\frac{1}{2}}e^{\frac{5\pi}{4}} = -1 - i$*, quindi*

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} + i\frac{1}{2}\ ,\ \frac{3}{2} - i\frac{1}{2}$$