Lezione 9

Maria Stella Gelli

21 ottobre 2009

Ricevimento Gelli:
Lunedì 14:30-17:30 *Riassuntino:*

- Abbiamo applicato la teoria delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali con opportune condizioni al bordo e dati iniziali
- Teorema di esistenza e unicità per l'equazione delle onde e del calore

Ripartiamo adesso dal secondo esercizio dell'altra volta

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & t > 0, x \in (0, \pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{1}$$

Unicità: se $u(t,x)$ è soluzione allora è $C^2((0,+\infty) \times (-\pi,\pi))$. In particolare $u(t,x) \in X \cap C^2$ e ammette sviluppo in serie di Fourier cioè $u(t,x) = \sum_n C_n(t)e^{inx}$ e i $c_n(t)$ sono unici. Quindi u è univocamente determinata se lo sono i coefficenti $c_n(t)$, ma infatti $c_n(t) =< u(t,x), e^{inx} >$ quindi se u è soluzione, allora vale

$$< u(t,x), e^{inx} >=< u_{xx}(t,x), e^{inx} > + < u, e^{inx} > \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Allora $c_n(t)$ verifica che (se $u(t,0) \in C^2$ allora conosciamo i coefficenti di u_{xx} in funzione di quelli di u, cioè sono $\{-n^2 c_n(t)\}_n$)

$$c_n'(t) = -u^2 c_n(t) + c_n(t) \tag{2}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} < u_t(t,x), e^{inx} > &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_t(t,x)e^{-inx}dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}u(t,x)e^{-inx}dx = \frac{d}{dt}c_n(t) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il teorema di derivazione sotto il segno di integrale.
Inoltre c_n deve verificare la condizione iniziale:

$$c_n(0) =< u(0,x), e^{inx} >=< u_0(x), e^{inx} >$$

Quindi i c_n esistono e sono unici perchè sono soluzioni del problema di Cauchy sopra.
Esistenza: considero la soluzione di 2 con dato c_n^0 e costruisco $u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(t)e^{inx}$.
Resta solo da verificare che $u \in C^2$ e questo dipende dalla sommabilità di tale serie.

Esercizio 1. Discutere e provare a risolvere:

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + \cos(x) \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) = \\ u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi) \\ u(0,x) = 1 \end{cases} \tag{3}$$

Esercizio 2. Provare a discutere:

$$\begin{cases} u_t = (\sin(x))u_{xx} \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) \\ u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi) \\ u(0,x) = u_0(x) \\ u_t(0,x) = u_1(x) \end{cases} \tag{4}$$

Esercizio 3.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & su\ (0,\infty) \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \forall t \geq 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) & \forall x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{5}$$

Osservazione 1. Ortogonalità di $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $[0,\pi]$.

Dimostrazione. Abbiamo $\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)dx = 0$ se $n \neq m$. □

Osservazione 2. Massimalità di $\{\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ su $[0,\pi]$.

Dimostrazione. Si può dimostrare(*Esercizio*) che:

Massimalità $\Leftrightarrow$ Polinomi trigonometrici e combinazioni lineari finite sono densi in Y (con $\|\cdot\|_\infty$).

Ma la densità ce l'abbiamo, infatti:
sia $f \in Y$ qualsiasi vogliamo verificare che esiste una f_N che è somma finita di $\gamma_n \sin(nx)$ e tale che $\|f_N - f\|_\infty \xleftarrow{N\to\infty} 0$

- Se $f \in Y \cap C^1$ allora per il teorema di rapresentazione $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \sin(nx)$ con $\gamma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx$ e scegliamo $f_N = \sum_{n=1}^{N} \gamma_n \sin(nx)$.
  Allora $f_N \xleftarrow[N\to\infty]{\|\cdot\|_\infty}$ perchè le somme finite convergono totalmente, quindi convergono uniformemente alla somma.

- $f \in Y$ qualsiasi:
  se per assurdo $f \notin \bar{Polin.Trig.}$. Allora

$$\min_{g \in Polin.Trig.} \|f - g\|_\infty = c > 0.$$

Lemma 1. $\{\psi \in Y \cap C^1\}$ è denso in Y rispetto a $\|\cdot\|_\infty$, ovvero: data $f \in Y \quad \forall \epsilon > 0 \exists \psi \in Y \cap C^1$ tale che $\|f - \psi\|_\infty \leq \epsilon$

Dimostrazione. Esercizio □

Usando il lemma abbiamo che possiamo prendere $\epsilon = \frac{c}{2}$ e ottenere che $\psi \in C^1 \cap Y$ con $\|f - \psi\|_\infty \leq \frac{c}{2}$.
E quindi $\forall g$Polin. Trig. si ha sommando e sottraendo f che $\|g - \psi\|_\infty \geq \frac{c}{2}$ e passando al minimo otteniamo un assurdo confrontando con il caso precedente.

□

Consideriamo adesso lo spazio Z visto a lezione con prodotto scalare associato abbiamo allora che l'insieme $\{\frac{2}{\pi}\sin(nx)\sin(my)\}_{n,m=1}$ è sistema ortonormale massimale

Teorema 1 (convergenza)**.** $f \in C^1 \cap Z$ allora $f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \gamma_{n,m}(\sin(nx)\sin(my))$

Esercizio 4. Discutere e risolvere

1. $$\begin{cases} \Delta u = \sin(2y)\sin(3x) & \text{in } [0, \pi]^2 = Q \\ u \mid_{\partial([o,\pi]^2)} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

2. $$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } Q \\ u(t, x) \mid_{\partial Q} = 0 & \forall t > 0 \\ u(0, x, y) = \sin(x)\sin(y) \end{cases} \tag{7}$$

3. $$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{su } Q \\ u(t, \cdot) \mid_{\partial Q} = 0 \\ u(0, x, y) = y^2(\pi - x)\sin(x) \end{cases} \tag{8}$$