Lezione 4

Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

Relazione tra la regolarità di una funzione e come si comportano i suoi coefficenti di Fourier

Teorema 1.

1. Sia $f \in X$ di classe $C^k, k \geq 0$ allora
$$\sum |n^k c_n|^2 < +\infty$$
(in particolare $c_n = o(|n|^{-k})$ per $n \to \infty$)

2. Se invece $f \in X$ e
$$\sum |n^k c_n| < +\infty$$
(in particolare $c_n = O(|n|^{-(k+1+\delta)})$ con $\delta > 0$) allora f è di classe C^k.

Nota: la sommabilità e la quadrato sommabilità non sono equivalenti, quindi dai risultati sopra non si deduce una caratterizzazione dei coefficenti in base alla regolarità.

Dimostrazione.

1. Abbiamo che
$$\infty > \|D^k f\|^2 \geq \|D^k f\|_2^2 \geq \sum_{-\infty}^{\infty} |coef\ di\ D^k f|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |(in)^k c_n|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |n^k c_n|^2$$
Infatti se i c_n sono i coefficenti di Fourier di f allora inc_n sono queli di f'.

2. $\sum |n^k c_n| < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum |n^h c_n| < +\infty \forall h = 0, ..., k$ allora
$\sum D^h(c_n e^{inx})$ converge totalmente $\forall h = 0, ..., k$.
Quindi $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ è funzione di classe C^k, ma siccome tale serie converge uniformemente allora deve necessariamente convergere a $f(x)$.

□

Osservazione 1. Abbiamo dimostrato l'altra volta che $\|f\|_2^2 \geq \sum |c_n|^2$ in realtà abbiamo un uguaglianza. (Uguaglianza di Bessel)

Dimostrazione. Esercizio. □

Osservazione 2. Abbiamo anche che $< \tilde{f}, f >= \sum \tilde{c}_n \cdot \bar{c}_n$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Osservazione 3. Vale $< f', e^{inx} >= inc_n$

Dimostrazione. Esercizio usando che $f' = \sum c_n ine^{inx}$. $\square$

Equazione delle onde

Abbiamo una sbarra di materiale elastico con delle tacche equispaziate (disegno 1), per descrivere come agiscono delle onde sulla sbarra fissiamo una tacca x e a ogni istante t definiamo $u(t,x)$ lo spostamento dalla posizione di quiete del punto x al tempo t.
Per questa rappresentazione supponiamo che la sbarra elastica si comporti come un insieme di punti collegati da molle (disegno 2), definiamo δ la lunghezza a riposo di ogni molla. Definiamo $u_n(t)$ lo spostamento della n-esima massa rispetto alla posizione di quiete.
Abbiamo quindi la seguente equazione differenziale che descrive $u_n(t)$

$$mu_n'' = k(u_{n+1} - u_n + \delta - \delta_0) - k(u_n - u_{n-1} + \delta - \delta_0)$$

dove si tiene conto delle forze della $n-1$-esima e $n+1$-esima molla sulla n-esima.
Perciò $mu_n'' = k(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$ dove $m = \rho\delta A$ con ρ densità e A area della sezione della sbarra e $k = \frac{k_e}{\delta}A$ con k_e costante elastica.
Adesso

$$u_n'' = \frac{k_e}{\rho}\frac{(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})}{\delta^2},$$

derivando otteniamo

$$u_{tt}(t,x) = \frac{k_e}{\rho}\frac{(u(t,x+\delta) - 2u(t,x) - u(t,x-\delta))}{\delta^2}$$

$$u_{tt} = \frac{k_e}{\rho}u_{xx} = c^2 u_{xx}.$$

Condizioni al bordo

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \forall t$$

Condizioni iniziali
Rimandate. *Nota:* per il caso n-dimensionale le osservazioni sono analoghe, invece di considerare una sbarra si considera una membrana e abbiamo che nella equazione delle onde al posto della derivata seconda rispoetto a x ci sarà il Laplaciano.
Risolviamo l'equazione al caso unidimensionale con le serie di Fourier.
Dobbiamo trovare $u : [0,t] \times [-\pi, +\pi] \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & \forall t, x \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & \forall t \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & \forall t \\ u(0,x) = u_1(x) \\ u_t(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{1}$$

Nota 1: le condizioni al contorno sono definite in modo che il problema di Fourier abbia soluzione.
Nota 2: una funzione di classe C^2 definita su un chiuso è intesa come estendibile ad un aperto contenente il chiuso in modo che continui ad essere di classe C^2.
Soluzione formale(per capire come funzionano le cose)

$$u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{inx} \Rightarrow u_{tt} = \sum c_n''(t)e^{inx}, u_{xx} \sum -c_n(t)n^2e^{inx}$$

quindi $c^2u_{xx} = \sum -c^2n^2c_n(t)e^{inx}$.
Abbiamo perciò che : $u_{tt}c^2u_{xx} \Leftrightarrow c_n'' = -n^2c^2c_n$ che è una equazione differenziale ordinaria, la cui unicità della soluzione è data se sono note le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0) = c_n^0 \\ y'(0) = c_n^1 \end{cases} \quad \text{dell'equazione differenziale } y'' + c^2n^2y = 0. \tag{2}$$

Notiamo che se $u^0 = \sum c_n^0 e^{inx}, u^1(t) = \sum c_n^1 e^{inx}$ allora $u^0(t) = u(0,x) = \sum e^{inx}c_n(0)$ e $u_1(t) = u_t(0,x) = \sum c_n'(0)e^{inx}$
quindi le condizioni iniziali date sull'equazione $y'' + c^2n^2y = 0$ corrispondono a quelle del problema di partenza dove c_n^0, c_n^1 sono oi coefficenti di Fourier di u_0, u_1.
Passando quindi in notazione complessa

$$c_n(t) = \alpha e^{inct} + \beta e^{-inct} \text{ con } \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = c_n^0 \\ \alpha_n - \beta_n = \frac{c_n^1}{in} \end{cases}$$

Soluzione rigorosa

Teorema 2 (unicità e caratterizzazione)**.** Sia $u : [0,T] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ di classe C^2 soluzione del problema espresso dall'equazione 1. Allora $u(t,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(t)e^{int}$ dove $\forall n \in \mathbb{Z}$ $c_n(t)$ risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + c^2n^2y = 0 \\ y(0) = c_n^0 \\ y'(0) = c_n^1 \end{cases} \tag{3}$$

con c_n^0 coeff. di Fourier di u_0 e c_n^1 coeff. di Fourier di u_0, u_1.
In particolare la funzione u è unica.

Dimostrazione. Innanzitutto $u \in C^2 \Rightarrow u(t,x) = \sum c_n(t)e^{inx}$, con $c_n(t) =< u, e^{inx} >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} u(t,x)e^{inx}dx$.
Allora per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale c_n è di classe C^2 e $c_n''(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_{tt}(t,x)e^{-inx}dx =< u_{tt}, e^{inx} >$. Inoltre per la scelta oculata dell condizioni al contorno abbiamo che $< u_{xx}, e^{inx} >= -n^2c_n(t)$ (per il lemma sui coefficenti di Fourier di f') allora dall'ipotesi $u_{tt} = c^2u_{xx}$ si ha che c_n risolve

l'equazione 3.
Quindi

$$c_n = \alpha_n e^{inct} + \beta_n e^{-inct} \text{ con } \begin{cases} \alpha_n + \beta_n = c_n^0 \\ (\alpha_n - \beta_n) in = c_{n^1} \end{cases} \tag{4}$$

mentre per $n = 0$ l'equazione è

$$y'' = 0 \text{ quindi } c_0(t) = \alpha_0 t + \beta_0 \text{ con } \begin{cases} \alpha_0 = c_n^0 \\ \beta_0 = c_n^1 \end{cases} \tag{5}$$

□

Osservazione 4. Siccome possiamo risolvere

- $c_n(t) = \alpha_n e^{inct} + \beta_n e^{-inct} \quad \alpha n \neq 0$ dove

$$\alpha_n + \beta_n = c_n^0$$
$$\alpha_n - \beta_n = \frac{c_n^1}{in}$$

- $c_0(t) = \alpha_0 + \beta_0 t$ dove

$$\begin{cases} \alpha_0 = c_n^0 \\ \beta_0 = c_0^1 \end{cases}$$