Lezione 2

Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

In questa lezione verranno dimostrati i due teoremi enunciati nella precedente lezione.

Teorema 1. $\mathcal{F} = \{e^{inx} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è sistema ortonormale massimale.
Data $f \in X$ la serie di Fourier (complessa) di f è $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ dove i coefficenti di Fourier sono

$$c_n := < f, e^{inx} >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Teorema 2. Se $f \in C^1 \cap X$ allora:

1. la serie di Fourier di f converge totalmente $\sum |c_n| < +\infty$
2. la somma è $f(x)$

Dimostrazione. Teorema 1
Ortonormalità:

$$< e^{inx}, e^{imx} >= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)} dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \tag{1}$$

Massimalità **Per assurdo** se esistesse $f \in X$ t.c. $\|f\|_2 = 1$ e $< f, E^{inx} = 0 >$ allora $< f, p >= 0 \forall p$ polinomio trigonometrico (combinaizione lineare finita di elementi di $\mathcal{F}$)

$$\|f - p\|^2 \geq \|f - p\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|p\|_2^2 \geq \|f\|_2^2 = 1 \tag{2}$$

Esercizio 1. $\|f\|_\infty \geq \|f_2\|$

da cui $\|f - p\|_\infty^2 \geq 1$ in contraddizione col fatto che i polinomi trigonometrici sono densi in X (Stone-Weierstraβ). □

Per dimostrare il Teorema utilizzeremo un paio di lemmi.

Lemma 1. 1. Se $f = f_1 + ... + f_n$ con f_i a due a due ortogonali, allora

$$\|f\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + ... + \|f_n\|_2^2 \tag{3}$$

2. Se $\{g_n\}$ è sistema ortonormale *finito o numerabile* allora $\forall f \quad \|f\|_2^2 \geq \sum_{n=1}^{m} |< f, g_n >|^2$

Dimostrazione. 1. *Esercizio*

2. Caso finito: $f = f_1 + ... + f_m + \tilde{f}$
Caso numerabile: basta passare al limite dalla disuguaglianza nel caso finito.

□

Lemma 2. Se $f \in X$ è di classe C^1 allora i coefficenti di Fourier di f sono inc_n

Dimostrazione.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = inc_n = \frac{in}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{4}$$

□

Conseguenza:

- $\|f'\|^2 \geq \|f'\|_2^2 \geq \sum_n n^2|c_n|^2$.
- $\|f\|^2 \geq \|f\|_2^2 \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

Usiamo i due lemmi per la seconda dimostrazione.

Dimostrazione. Teorema

- Dobbiamo dimostrare che $\sum |c_n| < +\infty$, abbiamo che $c_n = 2|c_n|n\frac{1}{2n} \leq n^2|c_n| + \frac{1}{4n^2}$.

$$\sum |c_n| \leq |c_o| + \sum n^2|c_n|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4n^2} \leq |c_0| + \|f'\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty \tag{5}$$

- $|\sum c_n| < \infty \Rightarrow \sum c_n e^{inx}$ converge totalmente a una certa $\tilde{f}$ e dimostriamo che $f = \tilde{f}$.

$$< f - \tilde{f}, e^{inx} >=< f, e^{inx} > - < \tilde{f}, e^{inx} >= c_n - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx}e^{-inx}dx = c_n - \frac{1}{2\pi}\sum c_m \int$$

Dunque $< f - \tilde{f}, e^{inx} >= 0 \ \forall n$. Se per assurdo $f - \tilde{f} \neq 0$ allora e^{inx} non sarebbe massimale.

□

Generalizzazione Teorema 2

- basta $f \in X$ continua e di classe C^1 a tratti.
  Dimostrazione: *Esercizio.*
  Facendo cadere l'ipotesi di continuità il teorema non vale. Come controesempo per *Esercizio* considerare $f(x) = x$ con $x \in [-\pi, +\pi]$ ripetuta periodicamente.

- Basta f α-Hölderiana con $\alpha > \frac{1}{2}$
$$(\exists c < +\infty \text{ tale che } |f(x_1 - f(x_2)| \leq c|x_1 - x_2|^\alpha) \tag{7}$$

- E se f è C^1 a tratti ma non continua?
  Allora
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \to \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ continua in } X \\ \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} & \text{se } f \text{ non è continua in } X \end{cases} \tag{8}$$

Caso reale, solo enunciato, le dimostrazioni sono analoghe e possono essere svolte come *Esercizio.*

Teorema 3. La serie di Fourier reale di f è
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
dove i coeffcenti di Fourier a_n e b_n sono dati da
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin(nx)dx \tag{9}$$
Allora la serie di Fourier reale di f converge totalmente a f se f è di classe C^1.

Teorema di Stone Weierstrass caso reale. • K spazio compatto e T^2

- $\mathcal{C}(K) := \{f : K \to \mathbb{R} continue\}$ e $\|f\|$ norma del sup
- Dato $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(K)$ allora:
  - $\mathcal{F}$ è un algebra se è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto al prodotto
  - $\mathcal{F}$ è un reticolo se $f_1, f_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow f_1 \vee f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \hat{f}_2 \in \mathcal{F}$
  - $\mathcal{F}$ separa i punti e per ogni $x_1 \neq x_2$ in K vale $\exists f \in \mathcal{F}$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$
  - $\mathcal{F}$ è chiuso per coniugio cioè se $f \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{F}$

Enuncio i teoremi di Stone Weierstrass

Teorema 4 (caso reale (caso complesso))**.** Se $\mathcal{F}$ è un algebra in $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ (chiuso per coniugio) che separa i punti e contiene le costanti. Allora $\mathcal{F}$ è denso in $\mathcal{C}(K)$.

Corollario 1. Teorema di Weierstraβ I polinomi sono densi in $C(I)$ $\forall I$ intervallo chiuso.

Corollario 2. I polinomi trigonometrici sono densi in $X' = \{f : K \to \mathbb{C}\ \mathit{continue}\}$ (dove $K = [-\pi, \pi]/-\pi\tilde{\pi}$)

□

Stone Weierstrass caso reale.

Lemma 3. Se $\mathcal{F}$ è un algebra chiusa che contiene le costanti in $\mathcal{C}(K)$ allora è un reticolo.

Dimostrazione.

- Basta dimostrare che $f \in \mathcal{F} \Rightarrow |f| \in \mathcal{F}$
- Basta dimostrare che $f \in \mathcal{F}, f \geq 0 \Rightarrow \sqrt{f} \in \mathcal{F}$
- Basta dimostrare che $f \in \mathcal{F} f \geq c > 0 \Rightarrow \sqrt{f} \in \mathcal{F}$.

Sia $f : K \to \mathbb{R}$ $0 < m \leq f < M < \infty$. Sia p_n successione di polinomi tali che $p_n(y) \to \sqrt{y}$ unif. su $y \in [m, M]$.
Allora $p_n(f(x)) \to \sqrt{f(x)}$ unif.

$$f \in \mathcal{F} \Rightarrow p_n(f) \in \mathcal{F} \Rightarrow \sqrt{f} \in \mathcal{F}.$$

(resterebbe da dimostrare che una tale successione di polinomi esiste) □

Lemma 4. Un reticolo in $\mathcal{C}(K)$ che separa i punti e contiene le costanti è denso in $\mathcal{C}(K)$

Dimostrazione. Voglio dimostrare che $\forall f \in C(K), \forall \epsilon > 0\ \exists h \in \mathcal{F} : h(x) - \epsilon \leq f(x) \leq h(x) + \epsilon$.

- $\forall x, y \in K\ \exists h_{xy} \in \mathcal{F} : h_{xy}(x) = f(x), h_{xy}(y) = f(y)$ (basta prendere h_{xy} che sia combinazione lineare di 1 e di una funzione che assume valori diversi in x e y).
- $\forall x \in K\ \exists h_x \in \mathcal{F} : h_x(x) = f(x)$ e $\forall y' h_x(y') \leq f(y') + \epsilon$.
  Infatti $\forall y \exists U_y \subset K : h_{xy} \leq f + \epsilon$ in U_y.
  Per compattezza da $\{U_y\}_{y \in K}$ si estrae un sottoricoprimento finito $U_{y_1}, ..., U_{y_n}$.
  $h_x = h_{xy_1}\hat{}..\hat{h}_{xy_n}$ verifica quanto voluto.
- $\exists h \in \mathcal{F} : h - \epsilon \leq f \leq h + \epsilon$.
  Applicando lo stesso ragionamento di sopra si può costruire $h = h_{x_1} \vee ... \vee h_{x_k}$ costruite a partire da un opportuno sottoricoprimento.

□

Dimostrazione Teorema di Stone

- La chiusura $\bar{\mathcal{F}}$ è un algebra chiusa che separa le costanti.
- Dal lemma 3 $\bar{\mathcal{F}}$ è un reticolo.
- Dal lemma 4 $\bar{\mathcal{F}}$ è denso in $C(K)$, cioè $\bar{\mathcal{F}} = C(K)$.

$\square$