Lezione 11

Giovanni Alberti

30 ottobre 2009

Trasformata di Fourier
Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vogliamo rappresentarla come $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}c(y)e^{iyx}dy$.
Domanda 1: cosa deve essere $c(y)$?
Domanda 2: per quale f la formula ha senso?
disegno 1 Facciamo la trasformata di Fourier, abbiamo che f_L sono le estensioni con periodicità.

$$\begin{aligned} f_L(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{i,n}e^{\frac{inx}{L}} \quad &= \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi L}(\int_{-\pi L}^{\pi L}f(t)e^{\frac{-int}{L}}dt)e^{\frac{inx}{L}} \\ &\overset{\delta:=\frac{1}{L}}{=} \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{y=\frac{n}{L}=n\delta}\delta(\int_{-\pi L}^{\pi L}f(t)e^{-iyt}dt)e^{iyx} \end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultima espressione è una somma di Riemann e quindi per $L\to infty$ tende a $\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty}[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}dt]e^{iyx}dy$. In particolare essendo che $\forall x\in[-\pi L,\pi L] \quad f_L(x)=f(x)$ abbiamo che la risposta alla prima domanda è $c(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-ity}dt$.

Osservazione 1. Abbiamo che $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ lo intenderemo come integrale improprio (secondo Riemann) se la f è continua, altrimenti lo intenderemo come integrale secondo Lebesgue.

Definizione 1. Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definisco $\|f\|_1:=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$

Osservazione 2. $\|\cdot\|_1$ è una norma su $X=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}f\ continua\|f\|_1<\infty\}$

Dimostrazione.
- $\|\lambda f\|_1=|\lambda|\|f\|_1$
- $\|f\|_1=\Leftrightarrow f=0$
- $\|f_1-f_2\|_1\le\|f_1\|_1+\|f_2\|_1$

□

Definizione 2. $\|f\|_2=(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx)^{\frac{1}{2}}$

Sia $Y:=\{f\ continua \mid \|f\|_2<\infty\}$. Allora su Y possiamo definire il prodotto scalare $<f,g>=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx$.

Osservazione 3. Il prodotto scalare è ben definito su Y.

Dimostrazione. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)\bar{g(x)}|dx = (\int_{-\infty}^{\infty} 2|f(x)g(x)|dx)\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{infty} |f(x)|^2 + |g(x)|^2 dx < \infty$ quindi $< f, g >< \infty$ $\square$

Quindi $\|\cdot\|_2$ è una norma su Y.

Definizione 3. Data $f \in X$ la trasformata di Fourier di f è $\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx$ con $\hat{f} \in Y$

Osservazione 4. $\hat{f}$ è ben definita $\forall y$. per le ipotesi sulla norma e $|f(x)e^{-iyx}| = |f(x)|$

Definizione 4. Data $g \in X$ definisco l'antitrasformata di Fourier di$g$ come $\check{g} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{iyx}dy$

Osservazione 5. $\hat{f}$ è limitata e continua (inoltre $\hat{f}(y) \to 0$ se $y \to piu \pm \infty$)

Dimostrazione. Limitatezza: $|\hat{f}(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \|f\|_1 \forall y \Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$
Continuità: se $y_n \to y allora \hat{f}(y_n) \to \hat{f}(y)$
infatti per convergenza dominata (con dominante $|f|$)

$$\hat{f}(y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iy_n x}dx \xleftarrow{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx = \hat{f}(y).$$

$\square$

Teorema 1. Se $f \in C^1$ $f, f' \in X, \|f'\|_2 < +\infty$ allora $\hat{f} \in X$ e $f(x) = \check{\hat{f}}(x)$ cioè $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{iyx}dy$

Dimostrazione. Caso particolare:
Per $f \in C_c^1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ f \in C^1 \textit{ con supporto compatto}\}, \|\hat{f}\|_1 < +\infty$.
$\forall x \in [-L\pi, L\pi]$ con L abbastanza grande, f estesa con periodicità e C^1 quindi $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi L}(\int_{-\pi L}^{\pi L} f(t)e^{\frac{-int}{L}}dt)e^{\frac{inx}{L}}$.
Considero $\forall h \in \mathbb{R}$ e applico quello di sopra a $f(x)e^{-ihx}$
$\Rightarrow f(x) = \sum_n \frac{1}{2\pi L}(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(\frac{n}{L}+h)t}dt)e^{i(\frac{n}{L}+h)x} = \sum_n \frac{1}{2\pi L}\hat{f}(\frac{n}{L}+h)e^{i(\frac{n}{L}+h)x}$
e ponendo $\delta = \frac{1}{L} = \sum_n \frac{\delta}{2\pi}\hat{f}(n\delta + h)e^{i(n\delta+h)x}$.
Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{\delta}\int_0^\delta f(x)dh &= \int_0^\delta (\sum_n \frac{1}{2\pi}\hat{f}(n\delta + h)e^{i(n\delta+h)x})dh \\ &= \sum_n \frac{1}{2\pi}(\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f(y)e^{iyx}dy) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)e^{iyx}dy \end{aligned}$$

Caso generale: ne daremo un idea dopo. $\square$

Notazione: $\hat{f} = \mathcal{F}f$

Proposizione 1.
1. $\mathcal{F}: X \to C$ è lineare e soddisfa $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$.
   Quindi $\|\mathcal{F}f_1\mathcal{F}f_2\|_\infty \leq \|f_1 - f_2\|_1$ cioè $\mathcal{F}$ è continua da $(X, \|\cdot\|_1)$ a $(C, \|\cdot\|_\infty)$.
2. Se $f in X, a \in \mathbb{R}$ allora $(\tau_a f)(x) := f(x-a)$ traslata di a.
   Allora $(\hat{\tau_a} f)(y) = e^{-iya}\hat{f}$.
3. $f \in X$ $a \in \mathbb{R}^*$ allora $(\sigma_a f)(x) := f(\frac{x}{a})$ dilatazione di a.
   Allora $\hat{\sigma_a} f(y) = |a|\hat{f}(\frac{y}{a})$.
4. Se $f \in X$ e $\|xf(x)\|_1 < +\infty$, allora $\hat{f} \in C^1$ e $hatf' = -\hat{ix}f$
5. Se $f \in C^1$, $f, f' \in X$ allora $\hat{f'} = iy\hat{f}$.

Dimostrazione.
1. ok
2. ok
3. ok
4. $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}$ derivando si ottiene
   $$\frac{d\hat{f}}{dy}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}(f(x)e^{-iyx})dx = -\hat{ix}f(y)$$
   dove abbiamo utilizzato l'ipotesi che $\|xf(x)\|_1 < +\infty$ perchè gli integrali su $\mathbb{R}$ abbiano senso e nella prima uguaglianza abbiamo passato la derivata sotto l'integrale. Infatti $\frac{\hat{f}(y+h)-\hat{f}(y)}{h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-i(y+h)x}\_{}^{-iyx}}{h}dx$, per $h \to 0$ il primo membro dell'uguaglianza tende a $\hat{f}'(y)$ e il secondo a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-iyx}dx$ (per convergenza dominata con dominante $|f(x)| \cdot |ixe^{-ix\xi}| \leq |f(x)| \cdot |-ix|$ per il teorema di Lagrange, dove $y \leq \xi \leq y+h$).
5. $\hat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-iyx}dx = |f(x)e^{-iyx}|_{-\infty}^{\infty} + (iy)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)a^{-iyx}dx$ dove il secondo termine della somma è uguale a $(iy)\hat{f}(y)$ e primo termine è uguale a 0 per il seguente

$\square$

Lemma 1. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^1$ e $\int_{-\infty}^{\infty} |f|, \int_{-\infty}^{\infty} |f'| < \infty$ allora $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Dimostrazione. Per assurdo se f non tendesse a zero, allora $\exists \epsilon > 0 : |f(x)| \geq \epsilon$ frequentemente per $x \to \infty$. Ma siccome $\int_{-\infty}^{\infty} |f| < +\infty$, allora $|f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ frequentemente per $x \to \infty$. Quindi $\exists \{x_n\}_n$ crescente: $f(x_{2n}) \geq \epsilon$ e $f(x_{2n+1}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ da cui $\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f'(x)|dx \geq \frac{\epsilon}{2}$, assurdo in quanto $\int_{-\infty}^{\infty} |f'|dx < \infty$ $\square$

Teorema 2. Disuguaglianza di Bessel e uguaglianza

1. $\forall f \in X \qquad \|\hat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_2$

2. $\forall f \in X$ con $\|f\|_2 < \infty \quad \|\hat{f}\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_2$
   e $\forall f, g \in X$ con $\|f\|_2, \|g\|_2 < \infty \qquad < \hat{f}, \hat{g} >= 2\pi < f, g >$.