Incontro di Preparazione
Gara Provinciale 2016

Simone Cappellini
http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini

16 febbraio 2016

In questo incontro a ridosso della Gara di Febbraio 2016 vorrei non tanto focalizzare l'attenzione su concetti o conoscenze utili nella preparazione quanto invece fornire un'idea di quali strategie è possibile adottare mentre si affrontano i quesiti e i problemi dimostrativvi della gara di Febbraio.

0.1 Logica

Spesso tra i quesiti a risposta multipla ve ne sono alcuni di *logica*: il testo sarà volutamente reso il più incomprensibile possibile; la prima cosa da fare dunque è cercare di "tradurre" in linguaggio matematico (sintetico e preciso) tutte le informazioni del problema.

Tutta la logica matematica si basa su **quantificatori logici** e **connettivi logici**:
$\exists$:="esiste", serve ad indicare l'esistenza di almeno un elemento che gode di una certa proprietà;
$\forall$:="per ogni", serve ad indicare che comunque preso un elemento allora esso gode di una certa proprietà;
$\wedge$:="et", serve a congiungere più proprietà indicando la condizione di validità di tutte contemporaneamente;
$\vee$:="vel", indica la disgiunzione inclusiva tra più proprietà indicando la condizione di validità di almeno una tra di esse.

Attraverso questi 4 simboli possiamo riscrivere il testo di ogni quesito di logica (o di matematica in generale) senza dare spazio ad interpretazioni diverse da quella esatta, per cui è utile saper utilizzarli soprattutto quando il testo risulta poco chiaro.

Inoltre, negare una proposizione risulta estremamente più semplice se si utilizzano i quantificatori logici: infatti, per negare che *"$\forall x$ vale la proprietà P"* basta invertire il quantificatore logico e negare la proprietà (*"$\exists x$ tale per cui NON vale la proprietà P"*. Dunque il $\exists$ si scambia con il $\forall$, il $\wedge$ si scambia con il $\vee$ e le proprietà vengono negate.

Vediamo qualche esempio:

1. 100 delegati sono riuniti in congresso. Non tutti portano la cravatta, ma si sa che comunque se ne scelgano due, almeno uno dei due la porta. Quanti sono i congressisti con cravatta?
   (A) Almeno 2, ma possono essere meno di 50
   (B) Esattamente 50
   (C) Più di 50, ma non si può dire esattamente quanti
   (D) La situazione descritta è impossible
   (E) Nessuna delle precedenti
2. 5 amici fanno, rispettivamente, le seguenti affermazioni:
   "Comunque si scelga uno di noi, gli altri 4 mentono".

"Comunque si scelga uno di noi, gli altri 4 dicono il vero".
"Comunque si scelga uno di noi, ce n'è un altro che dice il vero".
"C'è uno di noi tale che ogni altro dice il vero".
"C'è uno di noi tale che ogni altro mente".
Quale delle seguenti può essere dedotta dalle precedenti?

(A) Esattamente 1 dice il vero

(B) Esattamente 2 dicono il vero

(C) Esattamente 3 dicono il vero

(D) Esattamente 4 dicono il vero

(E) Non è possibile determinare il numero di coloro che dicono il vero

Nel caso del primo esempio, l'enunciato può essere tradotto così:

$$\exists \text{ delegato senza cravatta} \wedge \forall \text{ coppia di delegati}, \exists \text{ uno tra essi con la cravatta.}$$

Risulta semplice osservare quindi che se ci fossero 2 delegati senza cravatta allora (poiché la proprietà "$\exists$ uno tra essi con la cravatta" vale su ogni coppia di delegati) si avrebbe che scegliendo proprio loro 2 come coppia la proprietà detta sopra non varrebbe, il che conduce quindi ad un assurdo. Allora il numero di delegati senza cravatta è 0 o 1. Qui entra in gioco la prima proprietà (che vale assieme alla seconda, come ci dice il connettore logico $\wedge$), che dice che almeno un delegato è senza cravatta. Quindi la risposta è **(E)** (in particolare i delegati con la cravatta sono esattamente 99).

Passiamo al secondo esempio: le 5 affermazioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\forall \text{ persona}, \forall \text{ amico (diverso da lui), l'amico mente.}$$
$$\forall \text{ persona}, \forall \text{ amico (diverso da lui), l'amico dice il vero.}$$
$$\forall \text{ persona}, \exists \text{ amico (diverso da lui) che dice il vero.}$$
$$\exists \text{ persona tale che } \forall \text{ amico (diverso da lui), l'amico dice il vero.}$$
$$\exists \text{ persona tale che } \forall \text{ amico (diverso da lui), l'amico mente.}$$

Se il primo dicesse il vero, allora scegliendo un'altra persona e proprio lui come amico, si otterrebbe una contraddizione (dice il vero ma mente). Dunque il primo mente. Ma allora anche il secondo mente, perché altrimenti scegliendo il secondo come persona e il primo come amico, il primo dovrebbe dire il vero (cosa falsa). Poiché abbiamo già trovato 2 persone che mentono, allora anche il quarto non può dire la verità (altrimenti dovrebbero esistere 4 persone che dicono il vero). A questo punto notiamo come il terzo e il quinto dicono ognuno la negazione dell'affermazione dell'altro, e quindi esattamente uno tra loro 2 mente (il terzo). La risposta esatta è quindi la **(A)**.

0.2 Algebra

Altri quesiti presenti nella gara di Febbraio ogni anno sono di tipo algebrico: calcolo di radici di polinomi, approssimazioni, numero di soluzioni di equazioni in più variabili e cose del genere.

Se vi sembra che per arrivare ad una soluzione ci sia bisogno di verificare delle disuguaglianze che credete (o che effettivamente sono) infattibili senza una calcolatrice, allora molto spesso significa che è necessario trovare una **stima** astuta di ciò che ci serve calcolare.

Esempi:

3. Quante volte il simbolo di radice quadrata, come minimo, deve comparire nell'espressione $\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{123.456.789}}}$ affinché il risultato sia minore di 2?

   (A) 5

(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

4. Quanti interi n sono tali che $\sqrt{n}$ differisce da $\sqrt{101}$ per meno di 1?

(A) 19
(B) 21
(C) 40
(D) 41
(E) 42

5. Sia α la più piccola delle due soluzioni dell'equazione $x^2 - 4x + 2 = 0$. Quali sono le prime tre cifre dopo la virgola nella scrittura (in base 10) del numero $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{2009}$?

Analizziamoli uno alla volta.

3. Poiché $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ allora, riformulando il problema in simboli, il quesito chiede il minimo n tale che $123.456.789^{\frac{1}{2^n}} < 2$. Possiamo elevare dunque entrambi i membri alla potenza 2^n ottenendo $123.456.789 < 2^{2^n}$. Utilizziamo adesso delle stime piuttosto grossolane ma utilissime per calcolare questo n: poiché $2^{10} = 1.024 > 1.000 = 10^3$, allora $2^{2^5} = 2^{32} > 2^{30} > 10^9 = 1.000.000.000 > 123.456.789$ allora di sicuro $n \leq 5$.
Dimostriamo adesso che per $n = 4$ non vale la disuguaglianza cercata. Un metodo è calcolare esplicitamente $2^{2^4} = 2^{16}$ (cosa non impossibile), altrimenti possiamo ancora una volta giocare con le disuguaglianze senza sporcarsi le mani nei calcoli: $2^{16} = 4^8 < 10^8 = 100.000.000 < 123.456.789$.
Dunque la risposta esatta è la **(A)**.

4. Anche qui, riformulandolo, il testo chiede il numero di soluzioni intere positive della disuguaglianza $|\sqrt{n} - \sqrt{101}| < 1$. In generale, osserviamo come varia la differenza $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ in funzione di n:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Dunque la differenza tra le radici di 2 numeri consecutivi decresce al crescere di n.
Ma allora $\sqrt{82} - \sqrt{81} > \sqrt{101} - \sqrt{100}$, e cioè $\sqrt{101} - \sqrt{82} < \sqrt{100} - \sqrt{81} = 10 - 9 = 1$; quindi $n = 82$ è soluzione così come tutti gli $101 \geq n \geq 82$. 81 invece non è soluzione, dato che $\sqrt{101} - \sqrt{81} > \sqrt{100} - \sqrt{81} = 1$.
Analogamente vediamo che $n = 122$ è anch'essa soluzione: $\sqrt{122} - \sqrt{121} < \sqrt{101} - \sqrt{100} \Rightarrow \sqrt{122} - \sqrt{101} < \sqrt{121} - \sqrt{100} = 1$, e allo stesso modo ogni $122 \geq n \geq 101$.
Resta da verificare se $n = 123$ sia o meno una soluzione. Ancora una volta, una strada possibile è quella di calcolare $(\sqrt{123} - \sqrt{101})^2$ e verificare che sia maggiore di 1; altrimenti, usiamo altre stime:

$$\sqrt{123} - \sqrt{101} = (\sqrt{123} - \sqrt{101}) \cdot \frac{\sqrt{123} + \sqrt{101}}{\sqrt{123} + \sqrt{101}} = \frac{22}{\sqrt{123} + \sqrt{101}} \stackrel{?}{>} 1$$

$$22 \stackrel{?}{>} \sqrt{123} + \sqrt{101} \Leftrightarrow 484 \stackrel{?}{>} 123 + 101 + 2 \cdot \sqrt{12423}$$

$$130 \stackrel{?}{>} \sqrt{12423}$$

che risulta essere una disuguaglianza vera poiché $130^2 = 16900 > 12423$.
Quindi il numero di soluzioni è 41 ($82 \leq n \leq 122$), ovvero la lettera **(D)**.

5. Utilizzando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si ottiene che $\alpha = 2 - \sqrt{2}$.
Conoscendo la formula per la somma di una progressione geometrica, abbiamo

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{2009} = \alpha(1 + \alpha + \ldots + \alpha^{2008}) = \alpha \frac{1 - \alpha^{2009}}{1 - \alpha} = \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\alpha^{2010}}{1-\alpha}$$

Il buon senso ci dice che il secondo termine della somma dovrebbe essere molto piccolo, e che quindi non influirebbe nella ricerca delle prime 3 cifre decimali.
Usiamo ancora una volta quindi stime grossolane per dimostrare questo presentimento:

$$\alpha^{2010} = (2-\sqrt{2})^{2010} < (0,6)^{2010} = ((0,6)^2)^{1005} < (0,5)^{1005} = \frac{1}{2^{1005}}$$

$$1-\alpha = \sqrt{2}-1 > 0,4 > \frac{1}{2^2}$$

Mettendo insieme numeratore e denominatore si ha

$$\frac{\alpha^{2010}}{1-\alpha} < \frac{2^2}{2^{1005}} = \frac{1}{2^{1003}} < \frac{1}{(2^{10})^{100}} < \frac{1}{10^{300}}$$

dimostrando l'intuizione avuta.

Resta solamente da calcolare il valore di $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ per giungere al risultato:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(2-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = 1,414\ldots$$

0.3 Combinatoria

Per la parte di Combinatoria gli approcci ai problemi non sono molti, dato che più o meno tutti i quesiti di questo genere sono basati su formule da applicare, ragionamenti da seguire o calcoli espliciti da eseguire. Ogni problema può essere totalmente diverso dagli altri, non c'è un filo conduttore come potrebbe esserci ad esempio con la geometria.

Quando i numeri tirati in ballo non sono enormi e nel caso in cui non sappiate la breve formula che vi farebbe trovare la soluzione in un istante un consiglio (molto poco serio e professionale) è provare ad arrivare alla soluzione "*a mano*", provando cioè per tentativi o calcolando esplicitamente tutto quello che serve per arrivare ad una soluzione.
Attenzione però, questa strada porta via molto tempo che in una gara come quella di Febbraio è preziosissimo!

0.4 Geometria

Il primo consiglio, che dovrebbe essere ovvio quando si parla di problemi geometrici, è quello di disegnare la figura (in grande) ed evidenziare tutti gli elementi noti (lunghezze dei segmenti, misure degli angoli, uguaglianze tra misure ecc.).
Nel caso il problema tratti un oggetto geometrico tridimensionale risulta di vitale importanza saperlo visualizzare nonostante le grosse difficoltà nel disegnarlo su un foglio. Possono quindi essere utili proiezioni,sviluppi sul piano, disegni da varie angolazioni, numerazione delle facce e qualsiasi scarabocchio vi sia di aiuto.

Secondo metodo di approccio al problema (non molto ortodosso): l'approccio brutale. Non riuscite a capire come arrivare a calcolare/dimostrare ciò che vi viene chiesto? Provate a calcolare *TUTTO* quello che è presente in figura (lunghezze e angoli), in modo tale da trasformare un teorema geometrico in uno algebrico. Forse così facendo arriverete alla soluzione.

Terzo metodo (ancora meno ortodosso): tracciare circonferenze (a caso). Spesso nella risoluzione di un problema geometrico sono di vitale importanza le circonferenze (se tracciate con centro e raggio giusti); se non sapete quale sia il centro giusto o il raggio giusti provatele tutte! Quella con più punti di intersezione con la figura iniziale potrebbe essere quella voluta.

Quarto e ultimo metodo: *la creazione della soluzione* (o approccio della vergogna). "Creazione" nel vero senso della parola: armatevi di righello, compasso e goniometro, scegliete una scala di rappresentazione (più fate grande la figura e più possibilità ci sono di trovare la risposta esatta) e disegnate la figura in modo preciso. A questo punto basta misurare il segmento o l'angolo cercato e usare un po' di malizia e buon senso, approssimando ad esempio una lunghezza di $3,9$cm a 4cm. Se la risposta trovata sarà quella esatta avrete vinto!

0.5 Problemi Dimostrativi

Le tecniche più utilizzate nella risoluzione di problemi dimostrativi sono l'Induzione (se di mezzo c'è una proprietà o relazione che coinvolge i numeri naturali) e l'Assurdo.

Il **Principio di Induzione** è la matematizzazione dell'effetto-domino. Per far sì che tutte le tessere di un domino cadano è sufficiente che cada la prima e che ogni tessera sia posizionata vicino a quella precedente, così che se la tessera precedente cade allora essa viene colpita e cade a sua volta.
In matematica dimostrare che una certa proprietà $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$ per induzione significa dimostrare che $P(0)$ vale (passo base, ovvero deve cadere la prima tessera del domino) e poi, ipotizzando la proprietà $P(n)$ vera, dimostrare che anche $P(n+1)$ vale. A questo punto abbiamo dunque dimostrato che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La tecnica dell'**Assurdo** si usa ipotizzando che la tesi non sia vera e trovando una contraddizione con le ipotesi date dal problema (oppure, analogamente dimostrando che allora non valgono le ipotesi).

Al seguente URL potete trovare delle dispense utili nella preparazione teorica del programma olimpico:
`http://www.dmi.units.it/divulgazione/matCultSoc/olimpia10/gomut/dispense_olimpioniche.pdf`