Appunti di Fisica I

Dalle lezioni del Prof. Paolo Rossi

Simone Cappellini

A.a. 2014/2015

18 giugno 2015

http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini

Indice

1 Introduzione alla Meccanica **3**
1.1 Prime definizioni 3
1.2 Le equazioni del moto 5
1.3 I Principi della Dinamica 6
1.4 Ancora moti (?) 7
1.5 Leggi di Conservazione 9
1.6 Le leggi di Keplero 11
1.7 Cose (?) 11
1.8 Energia 15
1.9 Urti 24
1.10 Dinamica dei fluidi e Cinematica dei gas 24

2 Meccanica Lagrangiana **27**
2.1 Vincoli 27
2.2 Equazioni Lagrangiane e Hamiltoniana 29

Capitolo 1

Introduzione alla Meccanica

1.1 Prime definizioni

CONTROLLO: per verificare un risultato, si controlla che abbia senso fisico e si verificano i suoi limiti.

SISTEMA INTERNAZIONALE: si compone di 7 unità di grandezza, tra cui:

- Unità di lughezza: *metro* (m)
- Unità di tempo: *secondo* (s)
- Unità di massa. *chilogrammo* (kg)

Queste 3 formano l'MKS (in opposizione al cgs, "centimetro-grammo-secondo" ed altri sistemi).

SECONDO: Si definisce "*secondo*" la durata di 9.192.631.770 periodi della radiazione [...] dell'atomo di Cesio-133.

METRO: Sidefinisce "*metro*" la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in $\frac{1}{299.792.458}$ secondi. Di fatto, si pone fissa la velocità della luce e si definisce il metro di conseguenza.

CHILOGRAMMO: Non ha ancora una definizione accettabile (viene utilizzata ancora una massa campione).

UNITÀ DERIVATE: Ogni unità meccanica avrà struttura:

$$[L]^\alpha[T]^\beta[M]^\gamma$$

Ad esempio, si ha:

$$[v] = [L][T]^{-1}$$
$$[a] = [L][T]^{-2}$$
$$[F] = [L][T]^{-2}[M]$$
$$[W] = [L]^2[T]^{-2}[M] = [M][v]^2 = [E].$$

Spazio: Lo spazio è omogeneo, isocrono e isotropo.

Vettori: Il vettore posizione dipende dall'origine degli assi, il vettore spostamento no.

Prodotto Scalare: Il prodotto scalare deve avere queste proprietà:

1. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
3. $\vec{0} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{0} = \vec{0}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Sia $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, allora:
$\vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2$
$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow$
$\rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 = 2\,|\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 cos\theta \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = abcos\theta.$
dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema dei coseni (teorema di Carnot).

Versori: Sono particolari vettori per i quali si ha:

- $\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$;
- $\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$.

Attraverso le coordinate si ha che $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Prodotto Vettoriale: Direzione e verso sono dati dalla regola della mano destra.
$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$.
Altre proprietà sono:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;

- $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$;
- $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$;
- $\vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}$;
- $\vec{k} \times \vec{i} = -\vec{j}$.

In coordinate, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$.

1.2 Le equazioni del moto

Legge Oraria (di un punto materiale): $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. Il grafico è la traiettoria del punto materiale di cui $\vec{r}(t)$ rappresenta la posizione.

Velocità:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} x(t) \\ \frac{d}{dt} y(t) \\ \frac{d}{dt} z(t) \end{bmatrix}$$

.

Accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \frac{dV_s}{dt}\hat{T} + V_s \frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{dV_s}{dt}\hat{T} + V_s \frac{d\hat{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dV_s}{dt}\hat{T} + V_s^2 \frac{d\hat{T}}{ds}$$

con $\hat{T}$ il versore traiettoria.
Detto

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \frac{\hat{n}}{\rho}$$

con $\hat{n}$ il versore $\perp$ alla traiettoria e ρ è il raggio del cerchio osculatore, allora

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\frac{dV_s}{dt}\hat{T}}_{\textit{variazione del modulo}} + \underbrace{\frac{V_s^2}{\rho}\hat{n}}_{\textit{variazione della direzione}}$$

.

Moto generico:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + O(t^3)$$

.

Moto circolare:

$$\begin{cases} x(\theta) = Rcos\theta \\ y(\theta) = Rsin\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_x = -Rsin\theta \cdot \dot{\theta} \\ V_y = Rcos\theta \cdot \dot{\theta} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_x = -Rcos\theta \cdot \dot{\theta}^2 - Rsin\theta \cdot \ddot{\theta} \\ a_y = -Rsin\theta \cdot \dot{\theta}^2 + Rcos\theta \cdot \ddot{\theta} \end{cases}$$

Quindi $\vec{V} = R\begin{pmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}\dot{\theta} = R\hat{T}\dot{\theta}$, e la velocità scalare $V_s = R\dot{\theta}$. Definendo la velocità angolare $\vec{\omega}$ come un vettore avente direzione l'asse di rotazione e verso risultante dalla regola della mano destra (uscente se la rotazione avviene in senso antiorario), e modulo $|\vec{\omega}| = \dot{\theta}$, si può ottenere un'altra riformulazione della velocità come:

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

. Analogamente alla velocità abbiamo che l'accelerazione

$$\vec{a} = R\begin{pmatrix} -cos\theta \\ -sin\theta \end{pmatrix}\dot{\theta}^2 + R\begin{pmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix}\ddot{\theta} = R\hat{n}\dot{\theta}^2 + R\hat{T}\ddot{\theta} = \frac{\hat{n}V_s^2}{R} + \hat{T}\ddot{s}$$

poiché $s = R\theta$, $\dot{s} = R\dot{\theta}$, $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$. In conclusione

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{V}}}_{accelerazione\ centripeta} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{accelerazione\ tangenziale}$$

.

1.3 I Principi della Dinamica

1.Principio di Inerzia: Un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.

2.$\vec{F} = m\vec{a}$.

3.Principio di Azione e Reazione: Per ogni forza esercitata da un corpo su un altro, ne esiste un'altra uguale in modulo e direzione, ma di verso opposto, causata dal secondo corpo e agente sul primo.

Principio Zero (Assioma di relatività Galileiana): esistono infiniti sistemi di riferimento, costituiti da una terna di assi cartesiani e da un orologio, tali che tutte le leggi della fisica abbiano la stessa forma e che ciascuno di essi si muova di moto rettilineo uniforme rispetto ad ogni altro. Tali sistemi si dicono "*inerziali*" e in essi si intendono validi i tre principi.

Formulazione di Mach: Quando due punti materiali interagiscono tra di loro, essi accelerano in direzioni opposte, e il rapporto delle loro accelerazioni è sempre lo stesso.

$\begin{cases} \vec{a}_2 = -C_{2,1}\vec{a}_1 \\ \vec{a}_1 = -C_{1,2}\vec{a}_2 \end{cases}$ con $C_{i,j}$ coefficiente positivo che dipende dai due corpi.
Allora $C_{1,2}C_{2,1} = 1$.

Analogamente con 3 corpi, $\begin{cases} \vec{a}_3 = -C_{3,1}\vec{a}_1 \\ \vec{a}_3 = -C_{3,2}\vec{a}_2 \end{cases}$, si scopre empiricamente che $\frac{C_{3,1}}{C_{3,2}} = C_{2,1}$.

In generale si ha che $\frac{C_{x,y}}{C_{x,z}} = C_{z,y}$ e la soluzione generale è:

$$C_{x,y} = \frac{m(y)}{m(x)}$$

dove $m(x)$ è la massa di x, da cui:

$$\vec{a}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{a}_1 \rightarrow m_2\vec{a}_2 = -m_1\vec{a}_1$$

.

La massa è una proprietà del corpo. Integrando l'uguaglianza qui sopra, si ottiene:

$$\int \left(m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V}_2}{dt} \right) dt = \int 0 \ dt$$

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = costante$$

che è il vero principio, valido anche nella fisica moderna, detto *conservazione della quantità di moto*.

Forza: È la derivata della quantità di moto rispetto al tempo, quindi $\vec{F} = m\vec{a}$.

$$\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}) = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

è un'equazione differenziale del secondo ordine, che per essere risolta univocamente ha bisogno di avere i due dati iniziali $\vec{r}(0)$ e $\vec{v}(0)$.

1.4 Ancora moti (?)

Moto Uniformemente Accelerato: Dati

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{g} \\ \vec{r}(0) = \vec{r}_0 \\ \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

.
Posso scegliere un sistema di riferimento con origine in $\vec{r}_0$ e direzione dell'asse y tale che $\vec{g}$ sia verso il basso, e ruotare attorno a tale asse fino a rendere nulla la componente z di $\vec{v}_0$. Allora:

$$\begin{cases} x(t) = v_{0_x} t \\ y(t) = v_{0_y} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \end{cases}$$

.

Molla:

$$-k(x - x_e) = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = x_e + Acos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x = x_e + Acos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + Bsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ x_0 = x_e + A \\ v_0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad x = x_e + (x_0 - x_e)cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Posto $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ si ottiene:

$$x = x_e + (x_0 - x_e)cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}sin(\omega t)$$

Tutti gli oggetti che oscillano sono, in un intorno sufficientemente piccolo dell'equilibrio, approssimabili con un moto armonico.
Il periodo del moto armonico, dalla formula, è:

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

In 3 dimensioni: Oscillatore isotropo (il k è lo stesso in ogni direzione).

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{A}cos(\omega t) + \vec{B}sin(\omega t)$$

con $\vec{A} = \vec{r}_0 - \vec{r}_e$; $\vec{B} = \frac{\vec{v}_0}{\omega}$
Osservazione: Il moto è sempre planare. Infatti $\vec{r}$ è parametrizzato da solamente 2 vettori indipendenti.

Oscillatore 3D: Lavoriamo con un oscillatore tridimensionale:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r} \quad \to \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 cos(\omega t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} sin(\omega t)$$

Derivo: $\vec{v}(t) = -\omega\vec{r}_0 sin(\omega t) + \vec{v}_0 cos(\omega t)$.
Cerchiamo un istante di tempo in cui $\vec{r}$ e $\vec{v}$ siano in una posizione reciproca particolare. Di sicuro non potranno mai essere paralleli, altrimenti il moto avverrebbe su una retta. Studiamo la perpendicolarità.

$$\vec{r} \perp \vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow \;\left[-\omega\vec{r}_0^2 + \frac{\vec{v}_0^2}{\omega}\right] sin(\omega t_0) cos(\omega t_0) + \vec{r}_0\vec{v}_0 \Big(cos^2(\omega t_0) - sin^2(\omega t_0)\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \; sin(2\omega t_0)\left[-\omega^2\vec{r}_0^2 + \vec{v}_0^2\right] + 2\omega\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 cos(2\omega t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow tan(2\omega t_0) = \frac{2\omega\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{\omega^2\vec{r}_0^2 - \vec{v}_0^2}$$

Ma essendo la tangente una funzione surgettiva, $\Rightarrow \exists\; t_0$ tale che $\vec{v} \perp \vec{r}$.
Inoltre, dalla formula, si vede che i momenti di perpendicolarità sono 4 ed equidistanziati temporalmente.

$\begin{cases} x(t) = r_0 cos(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0}{\omega} sin(\omega t) \end{cases}$ $\Rightarrow$ ellisse. Se $r_0 = \frac{v_0}{\omega} \;\to\; v_0 = \omega r_0 \;\to$ moto circolare uniforme

Moto Circolare Uniforme: $\begin{cases} \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{cases}$

1.5 Leggi di Conservazione

Leggi di Conservazione: Da ogni simmetria deriva un'invarianza, e dunque una "*legge di conservazione*". Ad esempio,

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0 \;\Rightarrow\; m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = costante$$

La conservazione della quantità di moto corrisponde all'invarianza per traslazione spaziale, così come l'invarianza per traslazione temporale è la conservazione dell'energia. L'invarianza per rotazione è:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad\qquad [\text{Momento Angolare}]$$

Abbiamo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \times m\vec{a} \;\to\; \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Ne segue che tutte le forze centrali (cioè dirette verso un punto fisso), avendo $\vec{r} \parallel \vec{F}$, hanno $\vec{L} = costante$ e dunque producono un moto piano (perché $\vec{r}$, come $\vec{n}$, rimane $\perp$ a $\vec{L}$).
Consideriamo il momento angolare totale di due particelle:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2$$

Derivando:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{L}} &= \vec{v}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_1 \times m_1\vec{a}_1 + \vec{v}_2 \times m_2\vec{v}_2 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{a}_2 \\ &= (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times m_1\vec{a}_1\end{aligned}$$

perché, se non esistono altre particelle, $-m_1\vec{a}_1 = m_2\vec{a}_2$.
Ma poiché sia $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ che $\vec{a}_1$ sono rivolti lungo la congiungente delle due particelle, dunque

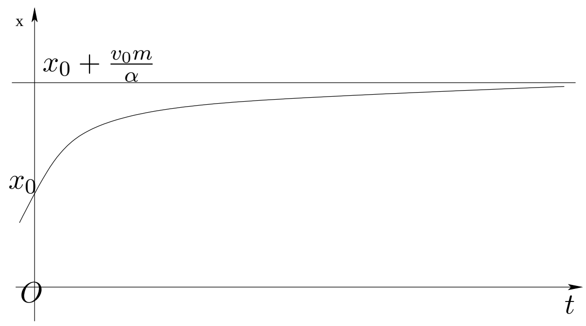
$$\dot{\vec{L}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}\ costante$$

In generale, attraverso una *simmetria assiale*, si conserva la componente di L diretta come l'asse di simmetria.
Il momento angolare può non conservarsi, conservarsi soltanto in una componente, oppure conservarsi del tutto (ma non in 2 componenti, ad esempio).

Forze frenanti:

$$\vec{F} = -\alpha\vec{v} \ \rightarrow \ \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\vec{v} \ \rightarrow \ \vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$x(t) = \frac{v_0 m}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + x_0$$



Resistenza dell'Aria:

$$m\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = -m\vec{g} - \alpha\frac{d\vec{y}}{dt}$$

È una equazione differenziale lineare, quindi:
Soluzione omogenea: $m\ddot{y} + \alpha\dot{y} = 0 \ \rightarrow \ y = A + Be^{-\frac{\alpha}{m}t}$
Soluzione particolare: $\dot{y} = -\frac{mg}{\alpha} \ \rightarrow \ y = -\frac{mg}{\alpha}t$.
Quindi la soluzione generale sarà del tipo: $y(t) = A + Be^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}t$.
Con $y(0) = h$ e $\dot{y}(0) = 0$, ad esempio:

$$\begin{cases} A + B = h \\ -\frac{mg}{\alpha} - B\frac{\alpha}{m} = 0 \end{cases} \rightarrow \ y(t) = h + \frac{m^2}{\alpha^2}g - \frac{m^2}{\alpha^2}ge^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha}t$$

Da cui $\begin{cases} \ddot{y} = -ge^{-\frac{\alpha}{m}t} \\ \dot{y} = \frac{m}{\alpha}ge^{-\frac{\alpha}{m}t} - \frac{mg}{\alpha} \end{cases}$ e la velocità limite $\dot{y}_\infty = -\frac{mg}{\alpha}$.

1.6 Le leggi di Keplero

1. Le orbite sono ellissi di cui il Sole occupa un fuoco.

2. La velocità areolare è costante.

3. $T^2 \propto R^3$, con R il semiasse maggiore.

Chiamando A l'area spazzata si ha che la velocità areolare è:

$$v_a = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rvsin\theta = \frac{1}{2m}\left|\vec{L}\right| = costante$$

Dalla **3**. si ha:

$$F(R) = m\frac{v^2}{R} = m\frac{\left(\frac{2\pi R}{T}\right)^2}{R} = \frac{m4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 mR}{KR^3} = \frac{4\pi^2 m}{KR^2}$$

Definendo $GM := \frac{4\pi^2}{K}$ l'equazione diventa $F(R) = \frac{GMm}{R^2}$.

1.7 Cose (?)

Molle appese: Analizziamo il moto di una massa m attaccata ad una molla con coefficiente di elasticità k e prendendo come origine del sistema di riferimento il punto di contatto della molla con il soffitto e direzione e verso positivo dello spostamento gli stessi di $\vec{g}$.

$$F = mg - kr = \frac{d^2r}{dt^2}m$$

Se $r_{eq.} = \frac{mg}{k}$, $\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k}{m}(r - r_{eq.})$ e quindi

$$r = \frac{mg}{k} + Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$$

Vincoli Olonomi: Sono vincoli che non modificano l'aspetto del moto, e per questo sono $\perp$ alla direzione del moto.

Pendolo: Sia l la lunghezza del filo e θ l'angolo formato rispetto alla verticale.

$$a_t = -gsin\theta \qquad \begin{aligned} s &= l\theta \\ \dot{s} &= l\dot{\theta} \\ \ddot{s} &= a_t = l\ddot{\theta} = -gsin\theta \approx g\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta \ \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \ \rightarrow \ T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Piani Inclinati: Sia α l'angolo di inclinazione del piano, sia $\vec{N}$ la forza vincolare normale alla superficie del piano inclinato, e sia $\vec{A}$ la forza parallela alla superficie del piano che ha direzione opposta alla componente di $\vec{g}$. Se l'oggetto è fermo:

$$\begin{cases} \left|\vec{A}_s\right| = mgsin\alpha \\ \left|\vec{N}\right| = mgcos\alpha \end{cases}$$

Attrito Radente: $\left|\vec{A}_s\right| \leq \left|\vec{N}\right| \mu_s$.
Quindi un comportamento limite si ha quando

$$mg\ sin\alpha_s^* = mg\ cos\alpha_s^*\mu_s \ \rightarrow \ tan\ \alpha_s^* = \mu_s$$

Se l'attrito è dinamico: $\left|\vec{A}_d\right| = \left|\vec{N}\right| \mu_d$.
Se fosse $\mu_d \geq \mu_s$, l'oggetto, superato il limite, andrebbe verso l'alto o starebbe fermo, il che è assurdo. Dunque $\mu_d < \mu_s$.
Se $tan\alpha_d^* = \mu_d$:

- $\alpha \geq \alpha_s^*$ L'oggetto inizia a muoversi e non si ferma più;
- $\alpha_s^* > \alpha \geq \alpha_d^*$ L'oggetto se è fermo resta fermo, se si muove non rallenta ma continua a muoversi;
- $\alpha_s^* > \alpha$ L'oggetto sta fermo o frena e prima o poi si ferma.

Sistemi di Punti Materiali: La forza totale su un sistema è pari alla forza totale esterna (quella interna si annulla), e dunque:

$$\vec{F}_{esterna} = \sum_i m_i\vec{a}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{esterna} \qquad [1^{\text{a}}\ \text{Equazione Cardinale}]$$

$\vec{P} = \sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\vec{r}_i$. Se $\vec{R} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$ e $M = \sum_i m_i$ allora

$$\dot{\vec{R}} = \vec{V}_{centro\ di\ massa} = \frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

e

$$\ddot{\vec{R}} = \vec{a}_{centro\ di\ massa} = \frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{\sum_i m_i} \quad\rightarrow\quad \vec{P} = M\vec{V}_{cm}$$

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{esterna}$$

Dunque possiamo trattare un corpo esteso come un punto materiale posizionato nel centro di massa.

Esempio di sistema con 2 punti materiali: In generale si ha che la forza totale agente su un punto materiale è:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_{esterna_i} + \sum_{i\neq j}\vec{F}_{ji}$$

Nel caso specifico di 2 punti materiali il centro di massa è $\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$, e chiamando $\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$$\begin{cases} m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1+m_2)\vec{R} \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{S} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{S} \\ (m_1+m_2)\vec{r}_1 + m_2\vec{S} = (m_1+m_2)\vec{R} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2\vec{S}}{m_1+m_2} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{S} = \vec{R} + \frac{m_1\vec{S}}{m_1+m_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{R} \text{ sta sulla retta che congiunge } \vec{r}_1 \text{ e } \vec{r}_2$$

Sistema isolato di 2 punti:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_{21} \\ m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_{12} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_12}{m_2} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} \\ \frac{d\vec{S}^2}{dt^2} = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \end{cases}$$

Chiamando $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ si ha $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ e

$$\vec{F}_{12}(\vec{S}) = \mu\frac{d\vec{S}^2}{dt^2}$$

Oscillatore Smorzato: Siano $\frac{g}{l} := \omega_0^2$ e $\frac{\gamma}{m} := \frac{1}{\tau}$ con l la lunghezza del filo, γ resistenza dell'aria (ha dimensioni di una massa per un tempo^{-1}, visto a pag.10) e τ tempo di frenaggio.

$$F = -mg\ sin\theta - \gamma l\dot{\theta} \approx -mg\theta - \gamma l\dot{\theta} = ma = ml\ddot{\theta}$$

$$\rightarrow\ \ \ddot{\theta} \approx -\frac{g}{l}\theta - \frac{\gamma}{m}\dot{\theta}\ \rightarrow\ \ddot{\theta} + \frac{\dot{\theta}}{\tau} + \omega_0^2\theta = 0$$

- Se $\frac{1}{2\tau} \geq \omega_0$ la soluzione dell'equazione differenziale è del tipo

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}+t\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_0^2}} + Be^{-\frac{t}{2\tau}-t\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-\omega_0^2}}$$

  oppure

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}} + Bte^{-\frac{t}{2\tau}}$$

  e gli esponenti sono reali e negativi. Perciò il pendolo frena verso il punto di equilibrio senza oscillare;

- Se $\frac{1}{2\tau} < \omega_0$ la soluzione è del tipo

$$\theta(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}cos(\Omega t + \varphi)$$

  con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$. Il pendolo frena oscillando fino al punto di equilibrio. Se $\tau \rightarrow +\infty \Rightarrow \gamma \rightarrow 0^+ \Rightarrow$ non c'è freno e $\theta(t)$ diventa un coseno.

Oscillatore Forzato: $m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F(t)$. Se $F(t) = F_0cos(\omega t)$, posto $f_0 = \frac{F_0}{m}$ l'equazione diventa

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 = f_0cos(\omega t)$$

$x(t) = x_{omog.}(t) + x_{part.}(t)$, ma $x_{omog.}(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$ (vedi sopra) e quindi possiamo ignorarla.

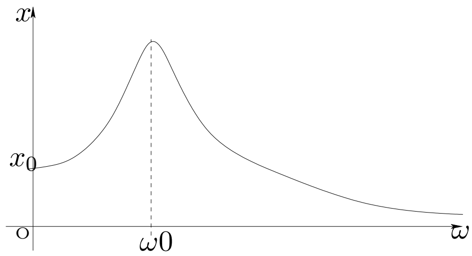
$$x_p(t) = x_0e^{i(\omega t-\varphi)} \rightarrow -\omega^2x_p + i\frac{\omega}{\tau}x_p + \omega_0^2x_p = f_0cos(\omega t)$$

$$\left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}\right]x_p = f_0e^{i\omega t} \rightarrow \left[\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}\right]x_0 = f_0e^{i\varphi}$$

Uguagliando parte reale e parte immaginaria:

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)x_0 = f_0cos\varphi \\ \frac{\omega}{\tau}x_0 = f_0sen\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tan\varphi = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2-\omega^2)} \\ x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}} \end{cases}$$

Senso fisico: se si forza un pendolo ad una certa frequenza, il pendolo tenderà ad oscillare alla stessa frequenza (e non più alla propria), con ampiezza pari a $x_0(\omega)$.
Quando $\omega \to \omega_0$ si va in risonanza e l'ampiezza ha un massimo, che aumenta all'aumentare di $\omega_0 t$.



Piano Inclinato non Fissato: Sia α l'inclinazione del piano, R e R' le reazioni vincolari della massa m con il piano e del piano con il pavimento. Il sistema di riferimento è standard, con $\hat{x} \perp \hat{y}$ e $\hat{y} = -\frac{\vec{g}}{|g|}$.

$$\begin{cases} m\vec{a}_x = R_x = Rsin\alpha \\ m\vec{a}_y = R_y - mg = Rcos\alpha - mg \\ M\vec{A}_x = -R_x = -Rsin\alpha \\ M\vec{A}_y = R' - R_y - Mg = R' - Rcos\alpha - Mg = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \frac{R_x}{R_y} = tan\alpha \\ (X - x) = \frac{y}{tan\alpha} \end{array}\right\} \text{vincoli} \end{cases}$$

con x e y l'ascissa e l'ordinata del punto materiale e X l'ascissa dell'intersezione tra la superficie inclinata e il pavimento.

$$\to \begin{cases} a_y = (A_x - a_x)tan\alpha \\ A_x = -\frac{m}{M}a_x \\ a_x = R_x sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = \frac{gsin\alpha cos\alpha}{1+\frac{m}{M}sin^2\alpha} \\ a_y = \frac{gsin\alpha cos\alpha}{\left(1+\frac{m}{M}sin^2\alpha\right)tan\alpha} - g \\ A_x = -\frac{m}{M}\frac{gsin\alpha cos\alpha}{1+\frac{m}{M}sin^2\alpha} \end{cases}$$

1.8 Energia

Variazione Energia Cinetica: Definiamo potenza $W := \vec{F}\cdot\vec{v} = m\vec{a}\cdot\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}E_c$ ponendo $E_{cinetica} := \frac{1}{2}mv^2$.
Ne segue:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= \int \vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int \vec{F}(\vec{R})d\vec{r} \\ &= \int F_x dx + F_y dy + F_z dz := \mathcal{L} \qquad \text{[Lavoro]} \end{aligned}$$

Osservazione: Dal secondo passaggio siamo passati da una dipendenza dell'energia cinetica dal moto in funzione del tempo ad una dipendenza alla sola traiettoria.
Se $\vec{F} = \vec{F}_0$ *costante* allora $\mathcal{L} = \vec{F}_0 \cdot \Delta\vec{r}$, che non dipende dalla traiettoria.

Conservazione dell'Energia Cinetica: Se $\vec{F} = \vec{F}_0$ *costante* è la gravità:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \textit{ costante}$$

Vincoli Lisci: Sono quei vincoli che agiscono senza attrito. Essi non alterano l'energia, perché la loro reazione vincolare è $\perp$ al moto e dunque $\vec{R} \cdot \vec{v} = 0$.

Oscillatore Armonico:

$$\vec{F} = -k\vec{r} \;\rightarrow\; \mathcal{L} = -k\int \vec{r}d\vec{r} = -\frac{1}{2}k\left(r_2^2 - r_1^2\right)$$

$$\rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kr^2 = \textit{ costante}$$

Forze Conservative: Sono quelle forze in cui il lavoro non dipende dalla traiettoria. Equivalentemente possiamo dire che sono quelle per cui i percorsi chiusi hanno lavoro nullo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

cioè le forze per cui esiste una funzione $\mathcal{U}$ scalare tale che

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}(\vec{r})$$

con ∇ che sta ad indicare il gradiente della funzione, ossia il vettore che ha come componenti le derivate parziali rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortonormale.

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial\mathcal{U}(x,y,z)}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial\mathcal{U}(x,y,z)}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial\mathcal{U}(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Ne segue:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_2 = E_{c_2} - E_{c_1}$$

$$\rightarrow E_{c_1} + \mathcal{U}_1 = E_{c_2} + \mathcal{U}_2$$

$$\Rightarrow E_c + \mathcal{U} = \textit{ costante} \qquad \text{[Energia Meccanica Totale]}$$

Sono conservative le forze costanti, quelle centrali (dunque anche tutte quelle fra 2 soli corpi) e quelle $\perp \vec{v}$.

$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{f(r)}{r}\vec{r} = f(r)\hat{r}$ Forza centrale. Allora

$$\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int \frac{f(r)}{r} \underbrace{\vec{r} \cdot d\vec{r}}_{\substack{= \frac{1}{2}d\vec{r}^2 \\ = \frac{1}{2}dr^2 \\ = rdr}} = \int f(r)dr = \Delta\mathcal{U}(r)$$

Piano inclinato Mobile (parte 2): Sotto le stesse ipotesi e notazioni della Parte 1 (pag.15).

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy$$

Ma $y = tan\ \alpha(x - X)$, quindi $v_y = tan\ \alpha(v_x - V)$ e

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}m(v_x - V)^2 tan^2\ \alpha + mg\ tan\ \alpha(x - X)$$

Applicando anche la conservazione della quantità di moto $MV + mv_x = cost.$, si riesce a scrivere tutto in funzione di v_x e x.

Pendolo:

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + 2\omega^2 sin^2\frac{\theta}{2} = \ cost.$$

Esempio: Caso di sistema con 2 Corpi:

$$\underbrace{\begin{array}{ll} M\vec{R} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 & \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M}\vec{S} \\ \vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 & \vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\vec{S} \\ M\vec{R} + m_1\vec{S} = M\vec{r}_2 & \vec{v}_2 = \vec{V} + \frac{m_1}{M}\dot{\vec{S}} \\ & \vec{v}_1 = \vec{V} - \frac{m_2}{M}\dot{\vec{S}} \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \mathcal{U}(\vec{S})$$

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}MV^2}_{\substack{\text{en. cinetica} \\ \textbf{del}\text{ c.m.}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{S}^2}_{\substack{\text{en.cinetica} \\ \textbf{nel}\text{ c.m.}}} + \mathcal{U}(\vec{S})$$

con $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, detta massa ridotta.

$$\rightarrow 0 = \frac{d}{dt}E = 0 + \mu\dot{\vec{S}} \cdot \ddot{\vec{S}} + \dot{\vec{S}} \cdot \vec{\nabla}\mathcal{U}$$

$$\rightarrow \dot{\vec{S}}(\mu\ddot{\vec{S}} - F(\vec{S})) = 0 \;\Rightarrow\; F(\vec{S}) = \mu\ddot{\vec{S}}$$

Momento angolare:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 \\
&= \left(\vec{R} - \tfrac{m_2}{M}\vec{S}\right) \times m_1 \left(\vec{V} - \tfrac{m_2}{M}\dot{\vec{S}}\right) + \left(\vec{R} + \tfrac{m_1}{M}\vec{S}\right) \times m_2 \left(\vec{V} + \tfrac{m_1}{M}\dot{\vec{S}}\right) \\
&= \underbrace{\vec{R} \times M\vec{V}}_{\substack{\text{mom.ang.} \\ \textbf{del}\text{ c.m.}}} + \underbrace{\vec{S} \times \mu\dot{\vec{S}}}_{\substack{\text{mom.ang.} \\ \textbf{nel}\text{ c.m.}}}
\end{aligned}$$

In un Campo Centrale: Prendiamo le coordinate polari e riscriviamo l'energia meccanica totale.

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{U}(r)$$

In un campo centrale il momento angolare L si conserva, riscriviamo quindi la relazione in funzione di esso.

$$L = mr^2\dot{\theta}$$

Quindi $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \;\rightarrow E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} + \mathcal{U}(r)$.
Si ha

$$\dot{r} = f(r,t,L) \;\rightarrow\; t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr'}{f(r',t,L)}$$

Potenziale Efficace: $\mathcal{U}_{\text{eff}} = \frac{L^2}{2mr^2} + \mathcal{U}(r)$, da cui:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{U}_{\text{eff}}(r)$$

Potenziale Efficace nel caso della Gravità:

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \;\rightarrow\; \mathcal{U}(r) = -\frac{GMm}{r} \;\rightarrow \mathcal{U}_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Vediamo quando $\mathcal{U}_{\text{eff}}(r)$ è al minimo, ovvero quando $\mathcal{U}'_{\text{eff}}(r) = 0$.

$$\frac{L^2}{mr_e^3} = \frac{GMm}{r_e^2} \Leftrightarrow L^2 = GMm^2 r_e$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{(r_e + x)^2 2m} - \frac{GMm}{r_e + x}$$

E quindi, per piccole oscillazioni,

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{U}_0 + \frac{3}{2}\frac{L^2}{mr_e^4}x^2 - \frac{GMm}{r_e^3}x^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{U}_0 + \frac{1}{2}\frac{GMm}{r_e^3}x^2$$

Come dimostrare le leggi di Keplero:

(1.) $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{U}_{\text{eff}}(r) \rightarrow \dot{r} = f(r, E, L) \rightarrow t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{f(r)}$, $\rightarrow t = t(r) \rightarrow r = r(t)$; $L = mr^2\dot{\theta} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}(t) \rightarrow \theta = \int \frac{L}{mr(t)}dt$; da cui $\begin{cases} \theta(t) \\ r(t) \end{cases} \rightarrow r(\theta)$. Dimostrazione valida, ma molto lunga.

(2.) $\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{r}}{r^3}$, poiché $\frac{dr}{dt} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{r}$. $\frac{\vec{v}}{r} - \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{r}}{r^3} = -\frac{\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{v})}{r^3} = -\frac{\vec{r}\times\vec{L}}{mr^3}$, da cui possiamo definire $\vec{N} := \vec{v} \times \vec{L} - GMm\hat{r}$ che ha derivata

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{a} \times \vec{L} + \frac{\vec{r} \times \vec{L}}{mr^3}GMm = \left(\frac{\vec{F}}{m} + \frac{\vec{r}GMm}{mr^3}\right) \times \vec{L} = 0$$

Abbiamo quindi trovato una legge di conservazione: $\vec{N}$ si dice vettore di Lenz.

Allora $\vec{N} \cdot \vec{r} = Nr\ cos\theta = \vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{L}) - GMmr = \frac{L^2}{m} - GMmr \rightarrow r = \frac{L^2}{m}\frac{1}{Ncos\theta + GMm}$, che è l'equazione di una conica.

Inoltre $N^2 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}\right)L^2 + (GMm)^2 = \frac{2E}{m}L^2 + (GMm)^2$.

Allora, sostituendo, otteniamo

$$r = \frac{L^2}{m}\frac{1}{Ncos\theta + GMm} = \left(\frac{L^2}{GMm^2}\right)\frac{1}{1 + e\ cos\theta}$$

con

$$e = \frac{N}{GMm} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \qquad \text{l'eccentricità}$$

- $e < 1 \rightarrow$ ellisse
- $e = 1 \rightarrow$ parabola
- $e = 0 \rightarrow$ circonferenza
- $e > 1 \rightarrow$ iperbole

Usando $p = \frac{L^2}{GMm^2}$ possiamo riassumere la conica come $r = \frac{p}{1+e\ cos\theta}$.

$$r_{\text{min}} = \frac{p}{1+e} \qquad r_{\text{max}} = \frac{p}{1-e}$$

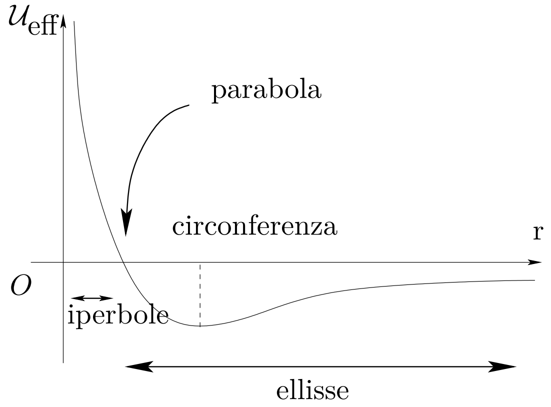
$$a = \text{semiasse magg.} = \frac{r_{\text{min}} + r_{\text{max}}}{2} = \frac{p}{1-e^2}$$

$$b = \text{semiasse min.} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} = a\sqrt{1-e^2} \qquad \text{perché } e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

L'energia in un'orbita ellittica è:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

cioè dipende solamente dal semiasse maggiore.
Il momento angolare è massimo (a parità di energia), quando l'orbita è circolare.



Dal grafico possiamo vedere come l'energia meccanica totale in un campo centrale sia negativa in un moto ellittico, positiva in un moto iperbolico e nulla in caso di moto parabolico.

(3.) La velocità areolare è costante, quindi $T = \frac{\textit{area ellisse}}{\frac{L}{2m}} = \frac{2m}{L}\pi ab = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}} \ \rightarrow\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{GM}}{R^{\frac{3}{2}}}$.
Le coppie $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} r_{\text{max}} \\ r_{\text{min}} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E \\ L \end{pmatrix}$ determinano univocamente la forma dell'orbita.

Velocità di fuga: $E = 0 \leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{\text{fuga}}^2 = \frac{GMm}{r}$

$$\rightarrow v_{\text{fuga}} = \sqrt{\frac{2gM}{r}}$$

Pendolo sferico: Sia r la lunghezza del filo, θ l'angolo rispetto all'asse z e φ l'angolo rispetto all'asse x. Allora:

$$h = -rcos\theta \ \rightarrow \mathcal{U} = -mgrcos\theta$$

$$\begin{cases} x = r sin\theta cos\varphi \\ y = r sin\theta sin\varphi \\ z = r cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_x = r\dot{\theta} cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi} sin\theta sin\varphi \\ v_y = r\dot{\theta} cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi} sin\theta cos\varphi \\ v_z = -r\dot{\theta} sin\theta \end{cases}$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 sin^2\theta$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} m r^2 (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta) - mgr cos\theta$$

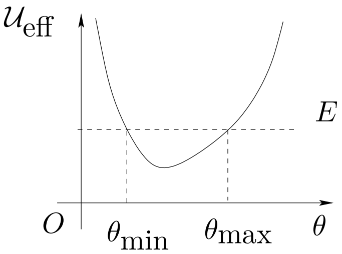
E dipende solo da $\dot{\varphi}$, e non da φ: si dice quindi che φ è una *coordinata ciclica*. Se esiste una coordinata ciclica allora esiste sempre una legge di conservazione.
La componente lungo l'asse z del momento angolare si conserva:

$$\begin{aligned} L_z &= (x v_y - y v_x) m \\ &= m(r sin\theta cos\varphi)(r\dot{\theta} cos\theta sin\varphi + r\dot{\varphi} sin\theta cos\varphi) - \\ &\qquad -m(r sin\theta sin\varphi)(r\dot{\theta} cos\theta cos\varphi - r\dot{\varphi} sin\theta sin\varphi) \\ &= m r^2 \dot{\varphi} sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2 sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2m} \frac{L_z^2}{r^2 sin^2\theta} - mgr cos\theta$$

Possiamo quindi definire anche qui un potenziale efficace.



Quando $\mathcal{U}'_{\text{eff}} = 0$, ovvero al minimo valore possibile per E, il pendolo si muove di moto circolare; per valori maggior di E il pendolo si muove tra un θ_{min} e un θ_{max}.

Cambio di Sistema di Riferimento: Sia $\hat{\imath}_1,\ \hat{\imath}_2,\ \hat{\imath}_3$ un sistema di riferimento centrato in O e sia $\hat{\imath}'_1,\ \hat{\imath}'_2,\ \hat{\imath}'_3$ un nuovo sistema di riferimento centrato in O'.

$$\vec{r}' = \sum_\alpha x'_\alpha \hat{\imath}'_\alpha$$

$$\vec{r} = \sum_\alpha x_\alpha \hat{\imath}_\alpha = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$\frac{dr}{dt} = \sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} \hat{\imath}_\alpha \ ; \qquad \frac{dr'}{dt} = \sum_\alpha \frac{dx'_\alpha}{dt} \hat{\imath}'_\alpha + \sum_\alpha x'_\alpha \frac{d\hat{\imath}'_\alpha}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \underbrace{\vec{v}_{O'}}_{\text{veloc. del sistema O'}} + \underbrace{\sum_\alpha x'_\alpha \frac{d\hat{\imath}'_\alpha}{dt}}_{\text{rotazione del sistema O'}} + \underbrace{\vec{v}_{r'}}_{\text{veloc. del punto nel sistema O'}}$$

Abbiamo $\frac{d\hat{\imath}'_\alpha}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}'_\alpha$, dove $\vec{\omega}$ è la velocità angolare istantanea di rotazione. Dunque $\sum_\alpha x'_\alpha \frac{d\hat{\imath}'_\alpha}{dt} = \sum_\alpha x'_\alpha (\vec{\omega} \times \hat{\imath}'_\alpha) = \vec{\omega} \times \sum_\alpha x'_\alpha \hat{\imath}'_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}'$.

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}_{r'}$$

L'accelerazione è invece:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{r'} + \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_t + \vec{a}_c + \vec{a}_{r'}$$

con $\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} + \frac{d\omega}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ l'accelerazione di "trascinamento", e $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{r'}$ l'accelerazione di "Coriolis".

Pendolo di Foucault: ???

Momento Angolare in un Sistema di Punti Materiali:

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Volendo considerare separatamente le forze interne e quelle esterne:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times (F_i^{(est)} + \sum_{j \neq i} F_{ji}^{(int)}) = \vec{M}^{(est)} + \sum_{i<j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})$$

Ma $\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ji} = 0$, perché $\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{ji}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(est)} \qquad \text{[Momento tot. forze Esterne]}$$

Il momento totale delle forze interne è nullo in qualsiasi sistema di riferimento.

Equazioni Cardinali della Dinamica dei Sistemi:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_e \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_e \end{cases}$$

Momento Angolare rispetto a O e al CM:

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{s}_i \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{R} \times M\vec{V} + \sum_i \vec{s}_i \times m\dot{\vec{s}}_i$$

L'energia meccanica è:

$$E = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i \dot{s}_i^2 + \mathcal{U}$$

Infine

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^{(e)} + \vec{M}_{cm}^{(e)}$$

Quindi anche se le forze esterne si annullano posso avere variazione di momento angolare.

Corpo Rigido:

- $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$;
- $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)}$;
- $E = \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}\sum_i m_i s_i^2$;
- $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_i \vec{s}_i \times m\dot{\vec{s}}_i$;
- $\dot{\vec{s}}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$;
- $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{s}_i$;
- $\vec{v}_t = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{s}_i$;
- $\vec{v}_{r'} = \vec{v}_{i,r'} + \vec{v}_t$;
- $E_{cm} = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega} \times \vec{s}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i \left(m_i s_i^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i \vec{s}_{i\alpha} \cdot \vec{s}_{i\beta}\right) \vec{\omega}_\alpha \cdot \vec{\omega}_\beta$.

Detto *Tensore di inerzia*: $T_{\alpha\beta} := \sum_i m_i \left(s_i^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{s}_{i\alpha} \cdot \vec{s}_{i\beta}\right)$, con $\delta_{\alpha\beta}$ il delta di Kronecker, si ha:

$$E_{cm} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta} \vec{\omega}_\alpha \cdot \vec{\omega}_\beta$$

T è quindi una matrice. Per ogni corpo rigido, esiste un sistema di riferimento in cui T è diagonale.
Se l'origine del sistema di riferimento non coincide con il centro di massa il tensore di inerzia si modifica così:

$$T_{\alpha\beta}^{(R)} = T_{\alpha\beta}^{(cm)} + M(R^2 \delta_{\alpha\beta} - R_\alpha R_\beta)$$

Momento di Inerzia: [...]

1.9 Urti

Conservazione della quantità di moto: Durante un urto tra due corpi, essi si comportano come un sistema isolato, e quindi la quantità di moto di conserva.

Urto Elastico: Un urto si dice elastico se in esso si conserva (oltre alla quantità di moto) anche l'energia cinetica totale dei corpi che interagiscono.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases}$$

Urto anelastico: Un urto si dice completamente anelastico se i due corpi che collidono rimangono uniti dopo l'urto. La velocità finaledei due corpi è determinata dalla sola conservazione della quantità di moto

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

1.10 Dinamica dei fluidi e Cinematica dei gas

Liquidi Perfetti: Sono fluidi caratterizzati da incomprimibilità e assenza di attriti interni.

Gas Perfetti: Gas privi di attriti interni e durante gli urti tra particelle non vi è dispersione di energia cinetica.

Pressione: $P = \frac{dF_\perp}{dS}$, con S la superficie e $F_\perp$ la componente normale alla superficie della forza.

Principio di Pascal: In un fluido perfetto, la forza è sempre normale alla superficie.

Portata: $\Pi = \frac{dM}{dt}$ con M la massa.

Densità: $\rho = \frac{dM}{dV}$ con M la massa e V il volume.
Quindi

$$\Pi = \frac{dM}{dt} = \frac{dM}{dV}\frac{dV}{dt} = \rho \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{\substack{\text{portata} \\ \text{volumetrica}}}$$

$$\frac{dV}{dt} = Sv \qquad \text{con } v \text{ la velocità} \qquad [\textsc{Legge di Leonardo}]$$

In un condotto la portata del fluido perfetto è costante.

Legge di Stevino: La pressione esercitata da una colonna di fluido di densità ρ su un punto a profondità h è direttamente proporzionale alla profondità e all'accelerazione gravitazionale.

$$PS = F_p = mg = V\rho g = Sh\rho g \Rightarrow P = \rho gh$$

Principio di Archimede: Ogni corpo immerso parzialmente o completamente in un fluido riceve una spinta verticale dal basso verso l'alto, uguale per intensità al peso del volume del fluido spostato.

$$F = (\rho gh_1 - \rho gh_2)S = \rho g\Delta hS = \rho gV$$

Legge di Boyle: Nei gas perfetti:

$$PV = \textit{ costante}$$

La costante in questione è Nk_bT, con N numero di molecole e:

$$k_bT = \frac{1}{2}m\left\langle v^2\right\rangle$$

con m la massa di una molecola e $\langle v^2\rangle$ la velocità quadratica media delle molecole.
Per cui:

$$PV = \frac{1}{2}\underbrace{mN}_{M}\left\langle v^2\right\rangle \Rightarrow P = \frac{1}{2}\left\langle v^2\right\rangle\rho$$

Ne segue:

$$\frac{dP}{dz} = \rho g = -\frac{2P}{\langle v^2\rangle}g \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{2g}{\langle v^2\rangle}dz$$

$$\Rightarrow P = P_0e^{-\frac{2gh}{\langle v^2\rangle}} = P_0e^{-\frac{h}{h_0}}$$

dove $h_0 = \frac{\langle v^2\rangle}{2g}$ è l'altezza massima media a cui può arrivare una molecola sparata verso l'alto.
Tipicamente, $\langle v^2\rangle$ è il quadrato della velocità del suono; h_0 è in genere 5 km.

Teorema di Bernoulli:

$$\underbrace{\frac{1}{2}dM(v_2^2 - v_1^2) + dMg(h_2 - h_1)}_{\text{variaz. di energia}} = \underbrace{P_1S_1dx_1 - P_2S_2dx_2}_{\text{lavoro}}$$

Ma $S_1 dx_1 = S_2 dx_2 = dV$, poiché la portata è costante, quindi

$$\frac{1}{2}dM(v_2^2 - v_1^2) + dMg(h_2 - h_1) = (P_1 - P_2)dV \Rightarrow P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \ costante$$

Questo vale in qualsiasi fluido con moto sufficientemente "non turbolento", in cui le linee di flusso non si intersecano.
Possiamo riscriverla come:

$$\underbrace{\frac{P}{\rho g}}_{\text{altezza "piezometrica"}} + \underbrace{\frac{v^2}{2g}}_{\text{altezza "cinetica"}} + \underbrace{h}_{altezza``fisica} = costante$$

Con altezza piezometrica si intende la distanza dal "pelo del fluido"; con altezza cinetica si intende l'altezza da cui deve cadere un oggetto per assumere velocità v.

Effetto Venturi: La pressione è minore se il fluido si muove velocemente.
In un recipiente la velocità di uscita del fluido da un buco è la stessa che avrebbe il liquido in cima in caduta libera fino al foro.

Gas Perfetto: È costituito da punti materiali che interagiscono elasticamente. [...]

Capitolo 2

Meccanica Lagrangiana

2.1 Vincoli

PROBLEMI CON VINCOLI: Se ho g gradi di libertà, ma v vincoli, allora il numero di effettivi gradi di libertà è $g - v$. In generale servono $g + v$ equazioni per risolvere completamente il problema, ma è possibile sempre ridursi a $g - v$ equazioni, infatti:
detti $\delta\vec{r}_i$ gli spostamenti virtuali delle molecole, se abbiamo N molecole posso scomporli in $3N$ componenti. Allora:

$$\sum_i (\vec{F}_i - m\vec{a}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \qquad \text{[lavoro forze interne =0]}$$

$$\vec{F}_i = \underbrace{\vec{F}_i^{(a)}}_{\text{forze attive}} + \underbrace{\vec{R}_i}_{\text{reazione per vincolo olonomo}}$$

$\sum_i \vec{R}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, per cui:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i \cdot \delta\vec{r}_i \Rightarrow \sum_i \underbrace{(\vec{F}_i^{(a)} - m_i\vec{a}_i)}_{\text{la loro somma fa 0}} \cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

Quindi $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i \forall i$ e $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_j, t) \forall i$. Le q_j sono coordinate generalizzate, che vanno bene per tutti gli $\vec{r}_i$.
Scriviamo quindi $\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$.

$$\Rightarrow \sum_{i,j} (\vec{F}_i^{(a)} - m_i\vec{a}_i)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0$$

Adesso le q_j sono linearmente indipendenti (contrariamente agli $\vec{r}_i$), e quindi deve essere

$$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - m_i\vec{a}_i)\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \ \forall j$$

Queste sono in totale $g - v$ equazioni.

Forze Generalizzate: Definiamo:

$$Q_j := \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \; \forall j$$

Ma vale anche:

$$\vec{F}_i^{(a)} = -\frac{\partial \vec{V}(\{\vec{r}_k\})}{\partial \vec{r}_i} \; \forall i \qquad \text{(en.potenziale espressa in coordinate } r_k\text{)}$$

Per cui

$$\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial V(r_k(q))}{\partial q_j}$$

Possiamo quindi riscrivere:

$$\left(\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \; \forall j \quad \rightarrow$$

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_i \left(m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

Ma scrivendo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

Tenendo conto che $K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2$, con K l'energia cinetica:

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} - \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial K}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0$$

Ponendo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) = K - V$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \qquad \text{[Lagrangiana]}$$

Piano Inclinato (Parte 3): Impostiamo la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - mg \; j \; sin\alpha$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(m\dot{s}) + mgsin\alpha = m(\ddot{s} + gsin\alpha) = 0 \;\rightarrow\; \ddot{s} = -gsin\alpha$$

Pendolo (Parte 2): Impostiamo la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\ cos\theta$$

$$\rightarrow\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\ sin\theta = 0 \;\rightarrow\; \ddot{\theta} = -\frac{g}{r}sin\theta$$

Il risultato è valido anche per forze non necesariamente conservative, ma comunque scindibili come:

$$Q_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{U}(q,\dot{q})}{\partial\dot{q}j} - \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial q_j}$$

dunque con $\mathcal{U}$ dipendente anche dalla velocità:

$$\mathcal{U}(\vec{r},\vec{v}) = \mathcal{V}(\vec{r}) + \vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{v}$$

2.2 Equazioni Lagrangiane e Hamiltoniana

Meccanica Lagrangiana:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \mathcal{L} = K - V \\ \bullet\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \end{array}\right\}\text{Equazioni Lagrangiane}$$

Momento Generalizzato:

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}$$

Se poi $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} = 0$, allora q_i si dice *coordinata ciclica* e una sua variazione non incide sulla Lagrangiana.
Si ha che $\dot{p}_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}$.

Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i\dot{q}_i - \mathcal{L}$$

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}$$

Infatti:

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_i \dot{p}_i \dot{q}_i + \sum_i p_i \ddot{q}_i - \frac{d\mathcal{L}}{dt}$$

Ma

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Quindi, risostituendo:

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\rightarrow \ \dot{\mathcal{H}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \ \ \dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \\ \bullet \ \ \dot{\mathcal{H}} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{array}\right\} \text{ legame tra simmetrie e leggi di conservaz.}$$

Se la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo, allora l'Hamiltoniana si conserva (cioè è costante, avendo derivata nulla).