Azioni di Gruppi: aspetti algebrici e geometrici

Simone Cappellini

`http://poisson.phc.unipi.it/~cappellini`

26 settembre 2015

Definizione: Sia G un gruppo e sia X un insieme. Si definisce *azione sinistra* di G s X una funzione $F : G \times X \to X$ tale che:

- $F(1, x) = x \ \forall x \in X$;
- $F(g, F(g', x)) = F(gg', x) \ \forall g, g' \in G \ \forall x \in X$.

Notazione. $F(g, x) = g(x)$.

Esempi:

1. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $X = \mathbb{C}$.
   $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \delta \rangle \quad : \quad \delta^2 = 1$
   Il coniugio è quindi un'azione di gruppo definita come $\delta(z) = \bar{z}$ e $1(z) = z$.

2. $\begin{array}{ccc} S_n \times \{1, \ldots, n\} & \to & \{1, \ldots, n\} \\ (\tau, i) & \mapsto & \tau(i) \end{array}$

3. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \\ (v, P) & \mapsto & P + v \end{array}$ la traslazione in uno spazio affine.

4. $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
   $F : G \times X \to X$ tale che $F(\lambda, v) = \lambda v$.

5. $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $X = S^n = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\right\}$.
   $F(\delta, x) = -x$.

6. $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ campi.
   $G = \{\delta : \mathbb{L} \to \mathbb{L} \text{ automorfismi } \mid \delta|_{\mathbb{K}} = id_{\mathbb{K}}\}$, detto gruppo di Galois.
   Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ per cui esista $a \in \mathbb{L}$ tale che $f(a) = 0$ e prendiamo l'insieme $R = \{\text{radici di } f \text{ in } \mathbb{L}\} \neq \emptyset$.
   Definiamo l'azione di gruppo $F : G \times R \to R$ tale che $F(g, y) = g(y)$. Verifichiamo che si tratti di una buona definizione, ovvero che $g(y) \in R$:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longrightarrow f(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i = 0$$

$$\underbrace{0 = g(f(y))}_{\substack{\text{perché}\\ 0=f(y)\in\mathbb{K}\\ \text{e } g|_{\mathbb{K}}=id_{\mathbb{K}}}} = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{g(a_i)}_{\in\mathbb{K}} g(y)^i = \sum_{i=0}^{n} a_i g(y)^i = f(g(y))$$

$\Rightarrow g(y) \in R.$

Fatto: Data $F : G \times X \to X$ una azione, allora $\forall g \in G$ $F_g : X \to X$ tale che $F_g(x) = F(g, x) = g(x)$ è biunivoca e la sua inversa è $F_{g^{-1}}$.
Inoltre $\psi : G \to S(X) = \{\text{mappe biunivoche da } X \text{ in sé}\}$ che associa ad ogni $g \in G$ la mappa F_g è un omomorfismo *****.

Definizione: Sia $x \in X$. Si chiama *orbita* di x

$$O_x := \{F(g, x) \mid g \in G\} = \{g(x) \mid g \in G\} \subseteq X$$

Definizione: Sia $x \in X$. Si chiama *stabilizzatore* di x

$$Stab_x := \{g \in G \mid g(x) = x\} < G$$

Definizione: Definiamo una relazione di equivalenza su X tale che, dati $x, y \in X$, $x \sim y \Leftrightarrow y \in O_x$ ($\Leftrightarrow \exists g \in G$ tale che $y = g(x)$).
Quindi possiamo scrivere

$$X = \bigsqcup_{x\in X} O_x$$

Osservazione. Poiché $Stab_x < G$ allora $G/Stab_x$ è un insieme (l'insieme delle classi laterali sinistre).

Proposizione: Sia $F : G \times X \to X$ una azione di G su X e sia $x \in X$. Allora la funzione

$$\begin{aligned} \Pi : \quad G/Stab_x &\longrightarrow O_x \\ gStab_x &\longmapsto F(g, x) \end{aligned}$$

è biunivoca.

Dimostrazione.

- Dimostriamo che sia una buona definizione.

$$\begin{aligned} gStab_x &= g'Stab_x \\ \left((g')^{-1}g\right) Stab_x &= id_X \\ \left(g'^{-1}g\right)(x) &= x \\ g'(g'^{-1}g)(x) &= g'(x) \\ g(x) &= g'(x) \end{aligned}$$

- Surgettività.

$$y \in O_x \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tale che } y = g(x) \Rightarrow y = g(x) = \Pi(gStab_x)$$

- Iniettività.

$$\begin{aligned} \Pi(gStab_x) &= \Pi(g'Stab_x) \\ g(x) &= g'(x) \\ \left((g')^{-1}g\right)(x) &= x \quad \Rightarrow (g')^{-1}g \in Stab_x \Leftrightarrow gStab_x = g'Stab_x \end{aligned}$$

□

Corollario: Se $|G| < \infty$, allora $|(G/Stab_x)| = \frac{|G|}{|Stab_x|} = |O_x|$, da cui deriva l'equazione delle classi:

$$|G| = |Stab_x| \cdot |O_x|$$

Esempi:

7. Avendo G gruppo e $X = G$, $F : G \times G \to G$ tale che $F(g,h) = gh$ è una azione (moltiplicazione a sinistra).
8. Avendo G gruppo e $X = G$, $F : G \times G \to G$ tale che $F(g,h) = ghg^{-1}$ è una azione (coniugio).
   Sia $h \in G$, $Stab_h = \left\{g \in G \mid ghg^{-1} = h\right\} = \{g \in G \mid gh = hg\} =$ centralizzatore di h

Definizione: F azione di gruppo si dice *fedele* se $\Psi : G \to S(X)$ che associa a g l'applicazione F_g è un omomorfismo iniettivo, cioè $Ker\Psi = \{1\}$

$$Ker\Psi = \{g \in G \mid F_g = id\} = \{g \in G \mid F(g,x) = x \ \forall x \in X\} = \bigcap_{x \in X} Stab_x$$

Esempio: $F : G \times G \to G$ il coniugio. Allora $Ker\Psi = Z(G)$ il centro di G.

Definizione: Un'azione di gruppo si dice *transitiva* se $\forall x, y \in X \ \exists g \in G$ tale che $y = g(x)$ (esiste cioè una sola orbita).

Esempi:

9. $F : O(n+1) \times S^n \to S^n$ tale che $F(A,v) = Av$.
   Fissiamo $e_1 \in S^n$ e definiamo $p : O(n+1) \to S^n$ tale che $p(A) = Ae_1 = A^1$.
   p è surgettiva $\Leftrightarrow$ l'azione di $O(n+1)$ su S^n è transitiva.

   Prendiamo $v_1 \in S^n$ e completiamolo a base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$. Poiché le basi sono ortogonali allora $\exists A \in O(n+1)$ tale che $Ae_i = v_i \ \forall i$ e quindi p è surgettiva (e l'azione è transitiva).

Cerchiamo $Stab_{e_1} = \{A \in O(n+1) \mid Ae_1 = e_1\} = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right) \in O(n+1) \right\}$

Ma $\delta_{1j} = [{}^tAA]_{1j} = \sum_k [{}^tA]_{1k}[A]_{kj} = \sum [A]_{k1}[A]_{kj} = [A]_{1j}$, quindi $A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$.

Allora

$$Stab_{e_1} = \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right) \middle| \, B \in O(n) \right\} \cong O(n)$$

Poiché abbiamo visto che l'azione è transitiva, $O_{e_1} = S^n$ e quindi

$$\begin{tikzcd} O(n+1) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & S^n \\ & O(n+1)/O(n) \arrow[ur, dashed, "\pi \text{ biunivoca}"'] & \end{tikzcd}$$

10. $G(k,n) = \{$sottospazi di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k\}$ si dice Grassmanniana.

$$G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\} /\!\sim$$

con la relazione di equivalenza definita dall'azione di gruppo dell'esempio 4.

Dato un $V \in G(k,n)$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, scagliamo una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_k\}$ di V e prendiamo

$$\begin{array}{cccccc} O(n) & \times & G(k,n) & \to & G(k,n) \\ (A & , & Span(v_1, \dots, v_k)) & \mapsto & Span(Av_1, \dots, Av_k) \end{array}$$

Sia (come nell'esempio precedente) $p : O(n) \to G(k,n)$ tale che $p(A) = Span(Ae_1, \dots, Ae_k)$. p è surgettiva (la dimostrazione è analoga a sopra). Allora l'azione agisce transitivamente (e $O_{Span(e_1,\dots,e_k)} = G(k,n)$).

Cerchiamo $Stab_{Span(e_1,\dots,e_k)} = \{A \in O(n) \mid Span(Ae_1, \dots, Ae_k) = Span(e_1, \dots, e_k)\}$.
$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$ Ma ${}^tAA = I \Rightarrow C = 0$.

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \text{ con } B \in O(k) \text{ e } D \in O(n-k)$$

Quindi il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
O(n) \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & G(k,n) \\
& O(n)/_{O(k)\times O(n-k)} \arrow[ur, dashed, "\pi \text{ biunivoca}"'] &
\end{tikzcd}$$