Condizioni Tauberiane e Spazi di Hardy

Gianmarco Brocchi

Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Traccia

Traccia

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari,} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari}, \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{n \text{ pari}} s_n \neq \lim_{n \text{ dispari}} s_n$$

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari}, \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \sigma_m = \frac{s_0 + \cdots + s_{m-1}}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} s_k$$

$$\lim_{n \text{ pari}} s_n \neq \lim_{n \text{ dispari}} s_n$$

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari}, \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\sigma_m = \frac{s_0 + \cdots + s_{m-1}}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} s_k$$

$$\lim_{n \text{ pari}} s_n \neq \lim_{n \text{ dispari}} s_n$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1/2 & m \text{ pari} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

Serie e sommabilità

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k, \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari}, \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \sigma_m = \frac{s_0 + \cdots + s_{m-1}}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} s_k$$

$$\lim_{n \text{ pari}} s_n \neq \lim_{n \text{ dispari}} s_n \qquad \sigma_m = \begin{cases} 1/2 & m \text{ pari} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{m \text{ dispari}} \sigma_m = \frac{1}{2} = \lim_{m \text{ pari}} \sigma_m$$

Definizione (Cesàro sommabilità)

$\sum a_k$ è *Cesàro sommabile* se esiste finito

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=o}^{m} s_n = \ell$$

Definizione (Cesàro sommabilità)

$\sum a_k$ è *Cesàro sommabile* se esiste finito

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=o}^{m} s_n = \ell$$

Fatto

Convergenza classica $\Rightarrow$ Cesàro sommabile

Definizione (Cesàro sommabilità)

$\sum a_k$ è *Cesàro sommabile* se esiste finito

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=o}^{m} s_n = \ell$$

Fatto

Convergenza classica $\Rightarrow$ Cesàro sommabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \sigma_m = \ell$$

Definizione (Cesàro sommabilità)

$\sum a_k$ è *Cesàro sommabile* se esiste finito

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=o}^{m} s_n = \ell$$

Fatto

Convergenza classica $\Rightarrow$ Cesàro sommabile e inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \sigma_m = \ell$$

Non tutte le serie Cesàro sommabili sono convergenti:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

è Cesàro sommabile, ma non sommabile.

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1),$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & n \text{ pari}, \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ dispari}. \end{cases}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1),$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & n \text{ pari}, \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ dispari}. \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari}, \\ \dfrac{s_{m-1}}{m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1),$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & n \text{ pari,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari,} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1),$$

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & n \text{ pari}, \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ dispari}. \end{cases}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari}, \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

$$\lim_{m \text{ dispari}} \sigma_m \neq \lim_{m \text{ pari}} \sigma_m$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$$

supponiamo che converga per $|x| < 1$,

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$$

supponiamo che converga per $|x| < 1$, per la nostra serie:

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$$

supponiamo che converga per $|x| < 1$, per la nostra serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad \text{per } |x| < 1,$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$$

supponiamo che converga per $|x| < 1$, per la nostra serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad \text{per } |x| < 1,$$

f è la derivata formale della serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) = \frac{x}{1+x}$$

Serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =: f(x)$$

supponiamo che converga per $|x| < 1$, per la nostra serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad \text{per } |x| < 1,$$

f è la derivata formale della serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) = \frac{x}{1+x}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} F'(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{1+x} \right)' = \lim_{x \to 1} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$$

Definizione (Abel sommabilità)

$\sum a_k$ è *Abel sommabile* se $f(x) = \sum a_k x^k$ converge per $|x| < 1$ e esiste finito

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$$

Definizione (Abel sommabilità)

$\sum a_k$ è *Abel sommabile* se $f(x) = \sum a_k x^k$ converge per $|x| < 1$ e esiste finito

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$$

Proposizione (Cesàro $\Rightarrow$ Abel)

Una serie Cesàro sommabile è Abel sommabile, e le loro somme coincidono.

$$\text{se} \quad \lim_{m \to \infty} \sigma_n = \ell \qquad \text{allora} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$$

Definizione (Abel sommabilità)

$\sum a_k$ è *Abel sommabile* se $f(x) = \sum a_k x^k$ converge per $|x| < 1$ e esiste finito

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$$

Proposizione (Cesàro $\Rightarrow$ Abel)

Una serie Cesàro sommabile è Abel sommabile, e le loro somme coincidono.

$$\text{se} \quad \lim_{m \to \infty} \sigma_n = \ell \quad \text{allora} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \ell$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1 - x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$$

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile,

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

convergenza $\Rightarrow$ Cesàro $\Rightarrow$ Abel

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

$$\text{convergenza} \;\Rightarrow\; \text{Cesàro} \;\Rightarrow\; \text{Abel}$$

Domanda

Sotto quali condizioni valgono le implicazioni inverse?

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

$$\text{convergenza} \ \Rightarrow \ \text{Cesàro} \ \Rightarrow \ \text{Abel}$$

Domanda

Sotto quali condizioni valgono le implicazioni inverse?

Dati due metodi P e Q

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

$$\text{convergenza} \;\Rightarrow\; \text{Cesàro} \;\Rightarrow\; \text{Abel}$$

Domanda

Sotto quali condizioni valgono le implicazioni inverse?

Dati due metodi P e Q

$$P \text{ sommabile} \Rightarrow Q \text{ sommabile.}$$

Fatto

Una serie convergente è Abel sommabile, inoltre

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

$$\text{convergenza} \;\Rightarrow\; \text{Cesàro} \;\Rightarrow\; \text{Abel}$$

Domanda

Sotto quali condizioni valgono le implicazioni inverse?

Dati due metodi P e Q

$$P \text{ sommabile} \Rightarrow Q \text{ sommabile.}$$

Schema Teorema Tauberiano

$$Q \text{ sommabile } \& \; T(a_n) \Rightarrow P \text{ sommabile}$$

Teorema (Tauber)

$$\sum a_n \textit{ Abel sommabile } \ \& \quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \textit{ convergente.}$$

Teorema (Tauber)

$$\sum a_n \textit{ Abel sommabile } \& \quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \textit{ convergente.}$$

Idea della dimostrazione

Detto $\lim f(x) \xrightarrow{x \to 1} \ell$ stimiamo la differenza tra ℓ e la successione $\{s_N\}_{N \in \mathbb{N}}$:

$$\left| \sum_{n=0}^{N} a_n - f(x) \right| \leqslant (1-x) \left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \frac{1}{N(1-x)} \sup_{n>N} |na_n| \right] \qquad \text{per ogni } \ |x| < 1$$

prendendo $x = 1 - \frac{1}{N}$:

$$\left| s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right| \leqslant \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n| \right] \xrightarrow{N \to \infty} 0$$

$$\lim_{N \to \infty} s_N = \lim_{N \to \infty} f(1 - {}^1\!/\!_N) = \ell$$

□

Fatto (Tauber Cesàro)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Fatto (Tauber Cesàro)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Teorema (Hardy)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Fatto (Tauber Cesàro)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Teorema (Hardy)

$\sum a_n$ *Cesàro sommabile &* $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ *convergente*

abbiamo un risultato più forte ancora

Fatto (Tauber Cesàro)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Teorema (Hardy)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

abbiamo un risultato più forte ancora

Teorema (Littlewood)

*$\sum a_n$ **Abel sommabile** & $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente*

Fatto (Tauber Cesàro)

$\sum a_n$ Cesàro sommabile & $\quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Teorema (Hardy)

$\sum a_n$ *Cesàro sommabile &* $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ *convergente*

abbiamo un risultato più forte ancora

Teorema (Littlewood)

$\sum a_n$ ***Abel sommabile*** *&* $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ *convergente*

Useremo un risultato di Karamata per

$$\text{Abel sommabile \& } T(a_n) \quad \Rightarrow \quad \text{Cesàro}$$

Teorema (Karamata)

$\sum a_n$ *Abel sommabile* & $\;s_n \geqslant -C \;\Rightarrow\; \sum a_n$ *Cesàro sommabile*

Teorema (Karamata)

$\sum a_n$ *Abel sommabile* & $\quad s_n \geqslant -C \; \Rightarrow \; \sum a_n$ *Cesàro sommabile*

(supponiamo $s_n \geqslant 0$, poiché $s_n + C \geqslant 0$)

Teorema (Karamata)

$\sum a_n$ *Abel sommabile* & $s_n \geqslant -C \Rightarrow \sum a_n$ *Cesàro sommabile*

(supponiamo $s_n \geqslant 0$, poiché $s_n + C \geqslant 0$)

Abel sommabilità di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \longrightarrow \ell \quad \text{per } x \to 1^-$$

Teorema (Karamata)

$\sum a_n$ *Abel sommabile* & $\quad s_n \geqslant -C \;\Rightarrow\; \sum a_n$ *Cesàro sommabile*

(supponiamo $s_n \geqslant 0$, poiché $s_n + C \geqslant 0$)

Abel sommabilità di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \longrightarrow \ell \quad \text{per } x \to 1^-$$

Cesàro sommabilità:

$$\sigma_N = \frac{\alpha_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} s_n \longrightarrow \ell \quad \text{per } N \to \infty$$

Karamata

Idea della dimostrazione

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{kn} = \frac{1-x}{1-x^k} f(x^k) \xrightarrow{x\to 1} \frac{\ell}{k}$$

Scriviamo

$$\frac{\ell}{k} = \ell \int_0^1 t^k \frac{dt}{t} \quad . \tag{1}$$

Dato $p(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k t^k$, si ha

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n p(x^n) \xrightarrow{\text{per } x\to 1} \ell \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{k} = \ell \int_0^1 p(t) \frac{dt}{t}$$

Karamata

Idea della dimostrazione

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{kn} = \frac{1-x}{1-x^k} f(x^k) \xrightarrow{x\to 1} \frac{\ell}{k}$$

Scriviamo

$$\frac{\ell}{k} = \ell \int_0^1 t^k \frac{dt}{t} \quad . \tag{1}$$

Dato $p(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k t^k$, si ha

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n p(x^n) \xrightarrow{\text{per } x\to 1} \ell \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{k} = \ell \int_0^1 p(t)\frac{dt}{t}$$

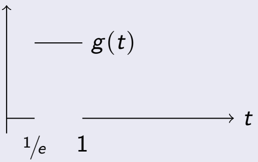
vorremmo mettere al posto di p una g tale che:

$$\alpha_N = \sum_{n=1}^{N} s_n = (1-x)\sum_{n=1}^{\infty} s_n g(x^n) \ , \ \int_0^1 g(t)\frac{dt}{t} = 1$$

Karamata

Idea della dimostrazione

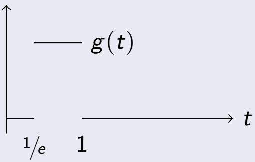
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{e}\right) \\ 1 & \text{per } t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$



Karamata

Idea della dimostrazione

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{e}\right) \\ 1 & \text{per } t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

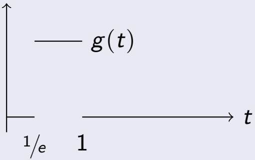


$$\alpha_N = \sum_{k \leqslant N} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k g\left(\left({}^1\!/_e\right)^{k/N}\right)$$

Karamata

Idea della dimostrazione

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{e}\right) \\ 1 & \text{per } t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$



$$\alpha_N = \sum_{k \leqslant N} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k g\left(\left({}^1\!/_e\right)^{k/N}\right)$$

$$\sigma_N = \frac{\alpha_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N}) = \left(\frac{1 - e^{-1/N}}{1 - e^{-1/N}}\right) \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N})$$

$$= \underbrace{\left((1 - e^{-1/N})N\right)^{-1}}_{\to 1} \left((1 - e^{-1/N}) \sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N})\right) \xrightarrow{N \to \infty} \ell$$

□

Littlewood

$$\sum a_n \textbf{ Abel sommabile } \& \quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ convergente}$$

Littlewood

$\sum a_n$ **Abel sommabile &** $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Dimostrazione.

$$\left| s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leqslant \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n|\right]$$

Littlewood

$$\sum a_n \ \textbf{Abel sommabile \&} \quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \ \text{convergente}$$

Dimostrazione.

$$\left| s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leqslant \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n|\right]$$

$$|na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad s_n \geqslant -C'$$

Littlewood

$\sum a_n$ **Abel sommabile &** $\quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n$ convergente

Dimostrazione.

$$\left| s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right| \leqslant \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n| \right]$$

$$|na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad s_n \geqslant -C'$$

Per Karamata $\Rightarrow$ Cesàro sommabilità;

Littlewood

$$\sum a_n \textbf{ Abel sommabile \&} \quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ convergente}$$

Dimostrazione.

$$\left| s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right) \right| \leqslant \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n| \right]$$

$$|na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad s_n \geqslant -C'$$

Per Karamata $\Rightarrow$ Cesàro sommabilità; per Hardy:

$$\text{Cesàro} \;\; \& \;\; |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ converge}$$

□

Estendiamo i metodi di sommabilità.

Estendiamo i metodi di sommabilità.

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k (n-k)$$

Estendiamo i metodi di sommabilità.

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k (n-k)$$

Estendiamo $\sigma(n)$ su tutto $\mathbb{R}^+$ nel modo seguente:

$$\sigma(u) := \int_0^u (u-t) ds(t)$$

integrando per parti e cambiando variabile

$$\sigma(u) = \int_0^u s(v) dv \quad \text{per } u \in [0, \infty)$$

Estendiamo i metodi di sommabilità.

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k (n-k)$$

Estendiamo $\sigma(n)$ su tutto $\mathbb{R}^+$ nel modo seguente:

$$\sigma(u) := \int_0^u (u-t)ds(t)$$

integrando per parti e cambiando variabile

$$\sigma(u) = \int_0^u s(v)dv \quad \text{per } u \in [0, \infty)$$

Definizione

Un integrale $\int_0^\infty ds(v)$ è Cesàro sommabile se esiste

$$\lim_{u \to \infty} \sigma(u) = \lim_{u \to \infty} \int_0^u s(v)dv = \ell$$

Per le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ riscriviamo $x = e^{-t}$:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn}$$

Per le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ riscriviamo $x = e^{-t}$:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{t\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn}$$

se la serie a destra converge per ogni $t > 0$, possiamo scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn} = \int_0^{\infty} e^{-tv} ds(v) = t \int_0^{\infty} s(v) e^{-tv} dv$$

Per le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ riscriviamo $x = e^{-t}$:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{t\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn}$$

se la serie a destra converge per ogni $t > 0$, possiamo scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn} = \int_0^{\infty} e^{-tv} ds(v) = t \int_0^{\infty} s(v) e^{-tv} dv$$

l'Abel sommabilità diventa:

$$\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ell \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{t\to 0} \int_0^{\infty} ts(v) e^{-tv} dv = \ell$$

Per le serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ riscriviamo $x = e^{-t}$:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn}$$

se la serie a destra converge per ogni $t > 0$, possiamo scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-tn} = \int_0^{\infty} e^{-tv} ds(v) = t \int_0^{\infty} s(v) e^{-tv} dv$$

l'Abel sommabilità diventa:

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ell \quad \rightsquigarrow \quad \lim_{t \to 0} \int_0^{\infty} t s(v) e^{-tv} dv = \ell$$

Definizione

Un integrale $\int_0^{\infty} ds(v)$ è Abel sommabile se esiste per ogni $t > 0$ il limite

$$\lim_{t \to 0} \int_0^{\infty} e^{-tv} ds(v) = \ell$$

Teorema (Abel $\Rightarrow$ Cesàro per integrali)

Sia $s(v)$ non descrescente, continua a destra, nulla per $v < 0$, tale che

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tv} ds(v) \quad \textit{esiste per ogni } t > 0$$

Se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$t^\alpha F(t) \longrightarrow \ell \quad \textit{per } t \to 0$$

allora

$$s(u) \sim \ell u^\alpha \left(\Gamma(\alpha + 1)\right)^{-1} \quad \textit{per } u \to \infty$$

Teorema (Abel $\Rightarrow$ Cesàro per integrali)

Sia $s(v)$ non descrescente, continua a destra, nulla per $v < 0$, tale che

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tv} ds(v) \quad \textit{esiste per ogni } t > 0$$

Se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$t^\alpha F(t) \longrightarrow \ell \quad \textit{per } t \to 0$$

allora

$$s(u) \sim \ell u^\alpha \left(\Gamma(\alpha+1)\right)^{-1} \quad \textit{per } u \to \infty$$

Osservazione

Nel caso $\alpha = 0$ ritroviamo l'Abel sommabilità la Casàro sommabilità.

Teorema (Abel $\Rightarrow$ Cesàro per integrali ($\alpha = 0$))

Sia $s(v)$ *non descrescente, continua a destra, nulla per* $v < 0$, *tale che*

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tv} ds(v) \quad \textit{esiste per ogni } t > 0$$

Se

$$F(t) \longrightarrow \ell \quad \textit{per } t \to 0$$

allora

$$s(u) = \ell \qquad\qquad \textit{per } u \to \infty$$

Osservazione

Nel caso $\alpha = 0$ ritroviamo l'Abel sommabilità la Casàro sommabilità.

Traccia

Traccia

1. Serie divergenti
   - Metodi di sommabilità
   - Dalle serie agli integrali
2. Spazi di Hardy
   - Spazi di Hardy sul disco
   - Spazi di Hardy sul semipiano
3. Teoria dei Numeri
   - Costante di Eulero-Mascheroni
   - Funzione di Möbius

Preliminari

Ω aperto connesso di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua

Preliminari

Ω aperto connesso di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua

Definizione

f si dice *olomorfa* se è $\mathbb{C}$-differenziabile, ovvero se esiste

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell$$

Preliminari

Ω aperto connesso di $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua

Definizione

f si dice *olomorfa* se è $\mathbb{C}$-differenziabile, ovvero se esiste

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell$$

Notazione ($\mathcal{H}(\Omega)$)

$\Omega \subset \mathbb{C}$, indichiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ le funzioni olomorfe su Ω.

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $u \colon A \to \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{C}^2(A)$

Definizione (Laplaciano)

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $u\colon A \to \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{C}^2(A)$

Definizione (Laplaciano)

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ su } \mathbb{R}^2$$

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $u\colon A \to \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{C}^2(A)$

Definizione (Laplaciano)

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ su } \mathbb{R}^2$$

Definizione (Funzione armonica)

Una funzione u è armonica se $\triangle u = 0$.

$A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $u\colon A \to \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{C}^2(A)$

Definizione (Laplaciano)

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ su } \mathbb{R}^2$$

Definizione (Funzione armonica)

Una funzione u è armonica se $\triangle u = 0$.

Fatto

Ogni funzione olomorfa è armonica

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

Spazi di Hardy sul disco

Data $g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $g \in L^1([-\pi, \pi])$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier

Spazi di Hardy sul disco

Data $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

Spazi di Hardy sul disco

Data $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

Siano $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

Spazi di Hardy sul disco

Data $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

Siano $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$$\begin{aligned} u_0\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ e^{i\theta} &\mapsto g(\theta) \end{aligned}$$

Spazi di Hardy sul disco

Data $g\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $g \in L^1([-\pi,\pi])$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

Siano $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$$\begin{aligned} u_0\colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ e^{i\theta} &\mapsto g(\theta) \end{aligned}$$

Domanda

È possibile estendere g a una funzione *olomorfa* su $\mathbb{D}$?

Poiché f olomorfa $\Rightarrow$ f armonica,

Poiché f olomorfa $\Rightarrow$ f armonica,

Domanda

Si può estendere u_0 a una funzione *armonica* su tutto $\mathbb{D}$?

Poiché f olomorfa $\Rightarrow$ f armonica,

Domanda

Si può estendere u_0 a una funzione *armonica* su tutto $\mathbb{D}$? Cerchiamo una soluzione del Problema di Poisson sul disco

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{D} \\ u = u_0 & \text{su } S^1 \end{cases}$$

Poiché f olomorfa $\Rightarrow$ f armonica,

Domanda

Si può estendere u_0 a una funzione *armonica* su tutto $\mathbb{D}$? Cerchiamo una soluzione del Problema di Poisson sul disco

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{D} \\ u = u_0 & \text{su } S^1 \end{cases}$$

Proposizione

Date $g(t)$ (e quindi u_0), questa si estende a soluzione di $(\wp)$ su $\mathbb{D}$.

$$u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$

Poiché f olomorfa $\Rightarrow$ f armonica,

Domanda

Si può estendere u_0 a una funzione *armonica* su tutto $\mathbb{D}$? Cerchiamo una soluzione del Problema di Poisson sul disco

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{D} \\ u = u_0 & \text{su } S^1 \end{cases}$$

Proposizione

Date $g(t)$ (e quindi u_0), questa si estende a soluzione di $(\wp)$ su $\mathbb{D}$.

$$u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \overline{z}^n$$

$$g(\theta) = u_0(e^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\theta}$$

Cenno della dimostrazione

Data $u_0(e^{it})$, distinguiamo due casi:

$(n \geqslant 0)$ z^n è olomorfa su S^1 e si estende su $\mathbb{D}$

$(n < 0)$ $z^{-n} = (\bar{z})^n$ si estende in modo anti-olomorfo su $\mathbb{D}$

Cenno della dimostrazione

Data $u_0(e^{it})$, distinguiamo due casi:

$(n \geqslant 0)$ z^n è olomorfa su S^1 e si estende su $\mathbb{D}$

$(n < 0)$ $z^{-n} = (\bar{z})^n$ si estende in modo anti-olomorfo su $\mathbb{D}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} z^n$$

sono continue poiché convergono totalmente su $\overline{\mathbb{D}}$.
Allora $u(z)$ è armonica su $\mathbb{D}$ e risolve $(\wp)$. $\square$

Cenno della dimostrazione

Data $u_0(e^{it})$, distinguiamo due casi:

$(n \geqslant 0)$ z^n è olomorfa su S^1 e si estende su $\mathbb{D}$

$(n < 0)$ $z^{-n} = (\bar{z})^n$ si estende in modo anti-olomorfo su $\mathbb{D}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} z^n$$

sono continue poiché convergono totalmente su $\overline{\mathbb{D}}$.
Allora $u(z)$ è armonica su $\mathbb{D}$ e risolve $(\wp)$. $\square$

Vediamo che

$$u(re^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int} = c_0 + \underbrace{\sum_{n>0} c_n z^n}_{\text{olomorfa}} + \underbrace{\sum_{n>0} c_{-n} \bar{z}^n}_{\text{anti-olomorfa}}$$

Cenno della dimostrazione

Data $u_0(e^{it})$, distinguiamo due casi:

$(n \geqslant 0)$ z^n è olomorfa su S^1 e si estende su $\mathbb{D}$

$(n < 0)$ $z^{-n} = (\bar{z})^n$ si estende in modo anti-olomorfo su $\mathbb{D}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} z^n$$

sono continue poiché convergono totalmente su $\overline{\mathbb{D}}$.
Allora $u(z)$ è armonica su $\mathbb{D}$ e risolve $(\wp)$. □

Vediamo che

$$u(re^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{int} = c_0 + \underbrace{\sum_{n>0} c_n z^n}_{\text{olomorfa}} + \underbrace{\sum_{n>0} c_{-n} \bar{z}^n}_{\text{anti-olomorfa}}$$

Affinché l'estensione sia olomorfa dovrà essere $c_{-n} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Sostituendo a c_n l'espressione dei coefficienti di g, troviamo:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2\Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-int}) \right) \right]}_{h(t,z)} dt$$

Sostituendo a c_n l'espressione dei coefficienti di g, troviamo:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2\Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-int}) \right) \right]}_{h(t,z)} dt$$

possiamo scrivere u come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) h(t,z) dt$$

Sostituendo a c_n l'espressione dei coefficienti di g, troviamo:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-int})\right)\right]}_{h(t,z)} dt$$

possiamo scrivere u come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) h(t,z) dt$$

sostituendo $z = re^{i\theta}$, $h(t,z)$ diventa

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}$$

chiamiamo ϕ l'angolo $(\theta - t)$ e definiamo

Sostituendo a c_n l'espressione dei coefficienti di g, troviamo:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \underbrace{\left[1 + 2\Re \left(\sum_{n=1}^{\infty} (z^n e^{-int}) \right) \right]}_{h(t,z)} dt$$

possiamo scrivere u come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) h(t,z) dt$$

sostituendo $z = re^{i\theta}$, $h(t,z)$ diventa

$$P_r(\theta - t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}$$

chiamiamo ϕ l'angolo $(\theta - t)$ e definiamo

Definizione (Nucleo di Poisson per il disco)

$$P_r(\phi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\phi) + r^2}$$

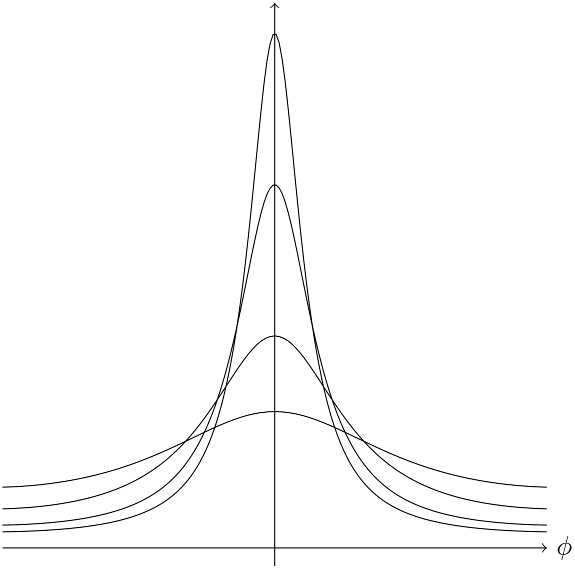


Figura: Nucleo di Poisson, per $r \to 1$

Data u_0 su S^1, la soluzione al problema $(\wp)$ è data da

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}(P_r * g)(\theta)$$

Data u_0 su S^1, la soluzione al problema $(\wp)$ è data da

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}(P_r * g)(\theta)$$

Osservazione

Fissato $r \in (0,1)$, possiamo scrivere i coefficienti di Fourier di $P_r(\theta)$:

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Data u_0 su S^1, la soluzione al problema $(\wp)$ è data da

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}(P_r * g)(\theta)$$

Osservazione

Fissato $r \in (0,1)$, possiamo scrivere i coefficienti di Fourier di $P_r(\theta)$:

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$$

Se $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, i coefficienti della sua estensione armonica sono

$$c_n(u) = c_n\left(\frac{1}{2\pi}(P_r * g)\right) = c_n(P_r)c_n(g) = a_n r^{|n|}$$

Data u_0 su S^1, la soluzione al problema $(\wp)$ è data da

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}(P_r * g)(\theta)$$

Osservazione

Fissato $r \in (0,1)$, possiamo scrivere i coefficienti di Fourier di $P_r(\theta)$:

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$$

Se $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$, i coefficienti della sua estensione armonica sono

$$c_n(u) = c_n\left(\frac{1}{2\pi}(P_r * g)\right) = c_n(P_r)c_n(g) = a_n r^{|n|}$$

Fatto (Approssimazione per convoluzione)

Esiste il $\lim_{r\to 1} u(re^{it}) = \lim_{r\to 1}(P_r * g)(t) = g(t)$.

Limiti radiali

Definizione

Sia $f(r, \theta) = f(re^{i\theta})$ funzione continua su $\mathbb{D}$. f ha limite radiale se esiste finito

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{per quasi ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Limiti radiali

Definizione

Sia $f(r,\theta) = f(re^{i\theta})$ funzione continua su $\mathbb{D}$. f ha limite radiale se esiste finito

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \qquad \text{per quasi ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Fatto (già)

Se $g \in L^1([-\pi,\pi])$ con $c_n = 0$ per $n < 0$, la sua estensione olomorfa ha limite radiale, poiché

$$u(re^{it}) = (P_r * g) \xrightarrow{r\to 1} g$$

Limiti radiali

Definizione

Sia $f(r,\theta) = f(re^{i\theta})$ funzione continua su $\mathbb{D}$. f ha limite radiale se esiste finito

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \qquad \text{per quasi ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Fatto (già)

Se $g \in L^1([-\pi,\pi])$ con $c_n = 0$ per $n < 0$, la sua estensione olomorfa ha limite radiale, poiché

$$u(re^{it}) = (P_r * g) \xrightarrow{r\to 1} g$$

Domanda (∼Tauber)

Quali funzioni olomorfe su $\mathbb{D}$ ammettono limite radiale per $|z| \to 1$?

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right) \ \ \textit{per q.o. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \quad per\ q.o.\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione

f è olomorfa, su $\overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}_{r<1}$, dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r\to 1} f\left(re^{i\theta}\right) \ \text{per q.o. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione

f è olomorfa, su $\overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}_{r<1}$, dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Questa è la serie di Fourier di f vista su S_r^1

$$f\left(re^{it}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right) \quad \textit{per q.o. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione

f è olomorfa, su $\overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}_{r<1}$, dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Questa è la serie di Fourier di f vista su S_r^1

$$f\left(re^{it}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

$$\|f\|^2_{L^2_\theta(S^1_r)} = \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 \, r^{2n} \xrightarrow{r \to 1} \sum_{n \geqslant 0} |a_n|^2 \leqslant M^2$$

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r\to 1} f\left(re^{i\theta}\right) \quad per\ q.o.\ \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione

f è olomorfa, su $\overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}_{r<1}$, dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Questa è la serie di Fourier di f vista su S_r^1

$$f\left(re^{it}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

$$\|f\|^2_{L^2_\theta(S^1_r)} = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} \xrightarrow{r\to 1} \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 \leqslant M^2$$

allora $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

Teorema (Teorame di Fatou)

Sia f olomorfa e **limitata** *su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \quad \textit{per q.o. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione

f è olomorfa, su $\overline{\mathbb{D}_r} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}_{r<1}$, dunque

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Questa è la serie di Fourier di f vista su S_r^1

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

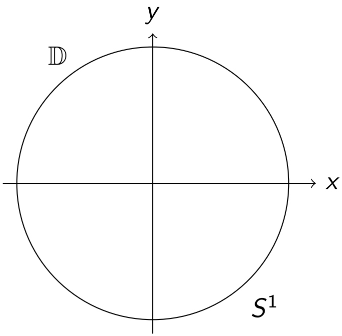
$$\|f\|^2_{L^2_\theta(S^1_r)} = \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} \xrightarrow{r\to 1} \sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 \leqslant M^2$$

allora $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int} = f(e^{it})$ in $L^2(S^1)$ $\square$

Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,

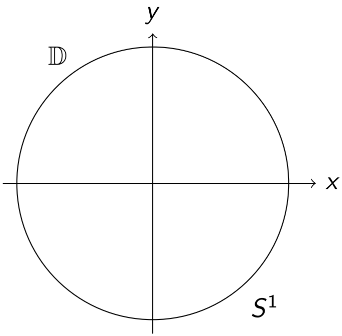


Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

$$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D}),$$

$$u(re^{it}) \sim (P_r * g)(t) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$$



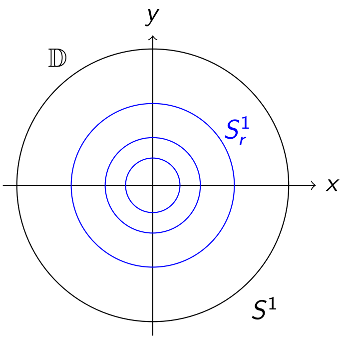
Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,

$u(re^{it}) \sim (P_r * g)(t) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$

inoltre $u(re^{it}) \in L^2(S^1_r)$ per ogni $r \in (0,1)$



Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

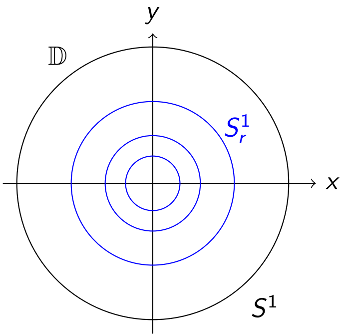
$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,

$u(re^{it}) \sim (P_r * g)(t) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$

inoltre $u(re^{it}) \in L^2(S_r^1)$ per ogni $r \in (0,1)$

Viceversa

$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ limitata $\Rightarrow f(re^{it}) \xrightarrow{r \to 1} f(e^{it})$



Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

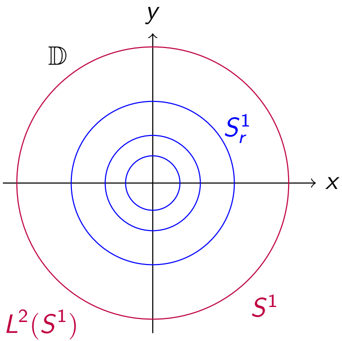
$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,

$u(re^{it}) \sim (P_r * g)(t) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$

inoltre $u(re^{it}) \in L^2(S^1_r)$ per ogni $r \in (0,1)$

Viceversa

$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ limitata $\Rightarrow f(re^{it}) \xrightarrow{r \to 1} f(e^{it}) \in L^2(S^1)$



Riassumendo

Data $g \in L^2(S^1)$ con $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$

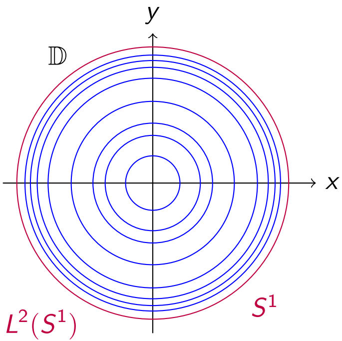
$u(re^{it}) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$,

$u(re^{it}) \sim (P_r * g)(t) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$

inoltre $u(re^{it}) \in L^2(S^1_r)$ per ogni $r \in (0, 1)$

Viceversa

$f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ limitata $\Rightarrow f(re^{it}) \xrightarrow{r \to 1} f(e^{it}) \in L^2(S^1)$



inoltre $f(re^{it}) \in L^2(S^1_r)$ per ogni $r \in (0, 1)$

Diamo un nome allo spazio

$$\mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(S^1)$$

Diamo un nome allo spazio

$$\mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(S^1)$$

Definizione (Spazio di Hardy su $\mathbb{D}$)

Lo spazio

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{r \in [0,1)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{i\theta}) \right|^2 d\theta < \infty \right\}$$

è uno spazio vettoriale normato con:

$$\left\| f(re^{i\theta}) \right\|_{H^2} := \sup_{r \in [0,1)} \| f \|_{L^2_\theta(S^1_r)}$$

Spazi di Hardy sul semipiano

Definizione (Transfomata di Fourier)

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile, la sua trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i s\xi} ds \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}$$

Spazi di Hardy sul semipiano

Definizione (Transfomata di Fourier)

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile, la sua trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i s \xi} ds \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}$$

Definizione (Transfomata inversa di Fourier)

Data $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrabile la sua anti-trasformata di Fourier è

$$\check{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi s} d\xi$$

Spazi di Hardy sul semipiano

Definizione (Transfomata di Fourier)

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile, la sua trasformata di Fourier è

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-2\pi i s \xi} ds \qquad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}$$

Definizione (Transfomata inversa di Fourier)

Data $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrabile la sua anti-trasformata di Fourier è

$$\check{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi s} d\xi$$

Definizione (Decrescita moderata)

f e $\widehat{f}$ sono moderatamente decrescenti su $\mathbb{R}$ se

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{e} \qquad \left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{A'}{1+\xi^2}$$

Sia $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Il bordo di $\mathbb{R}^2_+$ è $\mathbb{R}$.

Sia $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Il bordo di $\mathbb{R}^2_+$ è $\mathbb{R}$.

Domanda

Si può estendere $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a una funzione *armonica* su $\mathbb{R}^2_+$?

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^2_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$$

Sia $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Il bordo di $\mathbb{R}^2_+$ è $\mathbb{R}$.

Domanda

Si può estendere $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a una funzione *armonica* su $\mathbb{R}^2_+$?

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u_0}(s) e^{2\pi i x s}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{\widehat{u_0}(s) e^{izs}}_{\text{olomorfa}} + \underbrace{\widehat{u_0}(-s) e^{-i\bar{z}s}}_{\text{anti-olomorfa}}\, ds \end{aligned}$$

Sia $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Il bordo di $\mathbb{R}^2_+$ è $\mathbb{R}$.

Domanda

Si può estendere $u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a una funzione *armonica* su $\mathbb{R}^2_+$?

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^2_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u_0}(s) e^{2\pi i x s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \underbrace{\widehat{u_0}(s) e^{izs}}_{\text{olomorfa}} + \underbrace{\widehat{u_0}(-s) e^{-i\bar{z}s}}_{\text{anti-olomorfa}} ds \end{aligned}$$

Chiediamo $\widehat{u_0}(s) = 0$ per $s < 0$.

Domanda

Quali f in $L^2(\mathbb{R})$ hanno $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, +\infty)$?

Domanda

Quali f in $L^2(\mathbb{R})$ hanno supp $\widehat{f} \subset [0, +\infty)$?

Teorema

Siano f e $\widehat{f}$ moderatamente decrescenti. Allora f si estende a $F(z)$ continua e limitata su $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{z = x + iy : y \geqslant 0\}$, olomorfa su $\mathbb{R}^2_+$ se e solo se $\widehat{f}(\xi) = 0$ per ogni $\xi < 0$.

Domanda

Quali f in $L^2(\mathbb{R})$ hanno supp $\widehat{f} \subset [0, +\infty)$?

Teorema

Siano f e $\widehat{f}$ moderatamente decrescenti. Allora f si estende a $F(z)$ continua e limitata su $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{z = x + iy : y \geqslant 0\}$, olomorfa su $\mathbb{R}^2_+$ se e solo se $\widehat{f}(\xi) = 0$ per ogni $\xi < 0$.

Teorema (Paley-Wiener)

Sia f continua e moderatamente decrescente. f si estende a una funzione intera tale che

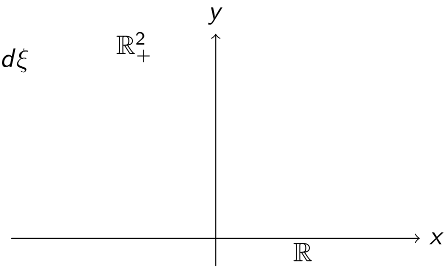
$$|f(z)| \leqslant Ae^{2\pi M|z|}$$

con $A > 0$, se e solo se supp $\widehat{f} \subset [-M, M]$.

Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$

$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

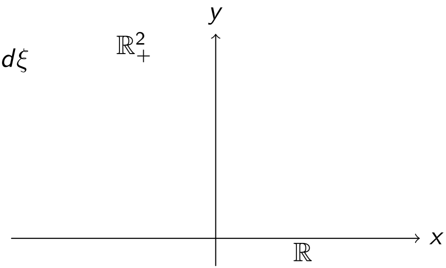


Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$

$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

$F(x+iy) \sim (h_y * g)(x) \xrightarrow{y \to 0} g(x)$



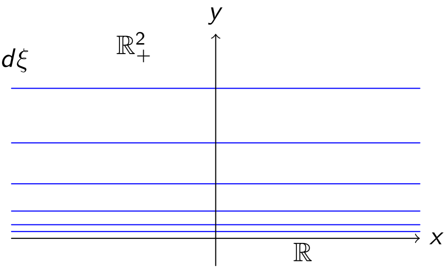
Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$

$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

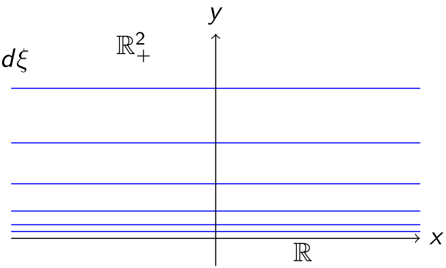
$F(x+iy) \sim (h_y * g)(x) \xrightarrow{y \to 0} g(x)$

inoltre $F(x+iy) \in L^2_x(\mathbb{R})$ per ogni $y \in \mathbb{R}_+$



Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$



$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

$F(x+iy) \sim (h_y * g)(x) \xrightarrow{y \to 0} g(x)$

inoltre $F(x+iy) \in L^2_x(\mathbb{R})$ per ogni $y \in \mathbb{R}_+$

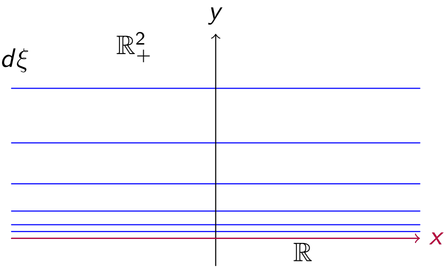
Viceversa

$F(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$ limitata $\Rightarrow F(z)$ è estensione olomorfa di $f(x)$

con $\widehat{f}(\xi) = 0 \quad$ per $\xi < 0$

Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$



$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

$F(x+iy) \sim (h_y * g)(x) \xrightarrow{y \to 0} g(x)$

inoltre $F(x+iy) \in L^2_x(\mathbb{R})$ per ogni $y \in \mathbb{R}_+$

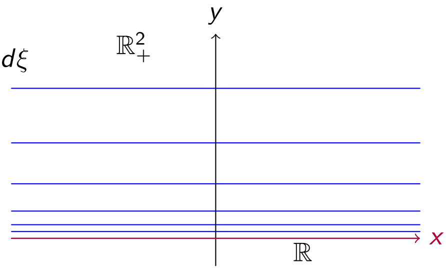
Viceversa

$F(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$ limitata $\Rightarrow F(z)$ è estensione olomorfa di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

con $\widehat{f}(\xi) = 0 \quad$ per $\xi < 0$

Riassumendo

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $F(z) = \int_0^\infty \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$



$F(x+iy) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$,

$F(x+iy) \sim (h_y * g)(x) \xrightarrow{y \to 0} g(x)$

inoltre $F(x+iy) \in L^2_x(\mathbb{R})$ per ogni $y \in \mathbb{R}_+$

Viceversa

$F(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+)$ limitata $\Rightarrow F(z)$ è estensione olomorfa di $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

con $\widehat{f}(\xi) = 0 \quad$ per $\xi < 0$

inoltre $F(x+iy) \in L^2(\mathbb{R})$ per ogni $y \in (0, +\infty)$

$F(z)$ sta in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+) \cap L^2_x(\mathbb{R})$

$$F(z) \text{ sta in } \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+) \cap L^2_x(\mathbb{R})$$

Definizione (Spazio di Hardy su $\mathbb{R}^2_+$)

Lo spazio

$$H^2(\mathbb{R}^2_+) = \left\{ F \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+) : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx < \infty \right\} = H^{2+}$$

è uno spazio vettoriale normato con:

$$\|F(x+iy)\|_{H^{2+}} := \sup_{y>0} \|F\|_{L^2_x(\mathbb{R})}$$

Traccia

Traccia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = s_m - \log n \quad \searrow \qquad b_n = s_{m-1} - \log n \quad \nearrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = s_m - \log n \quad \searrow \qquad b_n = s_{m-1} - \log n \quad \nearrow$$

$$a_n = b_n + \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = s_m - \log n \quad \searrow \qquad b_n = s_{m-1} - \log n \quad \nearrow$$

$$a_n = b_n + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$a_n = s_m - \log n \quad \searrow \qquad b_n = s_{m-1} - \log n \quad \nearrow$$

$$a_n = b_n + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

Definizione (costante di Eulero-Mascheroni)

γ è definita come

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right) =: \gamma$$

Funzione di Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ è prodotto di } r \text{ primi distinti} \\ 0 & \text{se } n \text{ ha almeno un fattore multiplo} \end{cases}$$

Funzione di Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ è prodotto di } r \text{ primi distinti} \\ 0 & \text{se } n \text{ ha almeno un fattore multiplo} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

Funzione di Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ è prodotto di } r \text{ primi distinti} \\ 0 & \text{se } n \text{ ha almeno un fattore multiplo} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \ \text{converge?}$$

Funzione di Möbius

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ è prodotto di } r \text{ primi distinti} \\ 0 & \text{se } n \text{ ha almeno un fattore multiplo} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \quad \text{converge?}$$

Teorema

Sia $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *su* $\{\Re(s) > 1\}$.

$$f \text{ analitica su } \{\Re(s) = 1\} \;\&\; |a_n| \leqslant C \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fatto

$\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) > 1\}$ e $\zeta(s) \neq 0$ su $\{\Re(s) = 1, s \neq 1\}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fatto

$\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) > 1\}$ e $\zeta(s) \neq 0$ su $\{\Re(s) = 1, s \neq 1\}$,
$f(s) = {}^1/_{\zeta(s)}$ analitica su $\{\Re(s) \geqslant 1\}$ e $|\mu(s)| \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fatto

$\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) > 1\}$ e $\zeta(s) \neq 0$ su $\{\Re(s) = 1, s \neq 1\}$,
$f(s) = {}^1\!/\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) \geqslant 1\}$ e $|\mu(s)| \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ converge}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fatto

$\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) > 1\}$ e $\zeta(s) \neq 0$ su $\{\Re(s) = 1, s \neq 1\}$,
$f(s) = {}^1/_{\zeta(s)}$ analitica su $\{\Re(s) \geqslant 1\}$ e $|\mu(s)| \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ converge}$$

$$F(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \quad \text{si estende } \Re(s) > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \text{ dove } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Fatto

$\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) > 1\}$ e $\zeta(s) \neq 0$ su $\{\Re(s) = 1, s \neq 1\}$,
$f(s) = {}^1\!/\zeta(s)$ analitica su $\{\Re(s) \geqslant 1\}$ e $|\mu(s)| \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \text{ converge}$$

$$F(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \quad \text{si estende } \Re(s) > 0$$

inoltre:

$$F(1) = \lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$$