UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Dipartimento di Matematica

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Condizioni Tauberiane e Spazi di Hardy

Relatore:
Prof. **Vladimir Georgiev**

Candidato:
Gianmarco Brocchi

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Alla mia famiglia

Indice

Introduzione

In questa tesi presentiamo alcuni metodi per sommare serie non convergenti. Ci chiediamo sotto quali condizioni serie sommabili con tali metodi risultino convergenti, vedendo anche un'estensione al caso continuo.

Spostandoci sulle serie complesse, caratterizziamo lo Spazio di Hardy H^2 sul disco e sul semipiano e diamo una dimostrazione del Teorema di Paley-Wiener.

Concludiamo con il collegamento tra l'andamento asintotico della serie armonica e quello della Zeta di Riemann nel polo $s = 1$.

Nel primo capitolo vengono dati alcuni metodi per calcolare la somma di serie non convergenti: sia usando la media delle somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (Metodo di Cesàro), che la serie di potenze definita a partire dalla serie data (Metodo di Abel). Tali metodi sono detti *regolari*, poiché estendono il concetto di convergenza: infatti la somma della serie con questi metodi è uguale al limite della serie quando questa converge in senso classico.

In generale, dato un metodo P e un metodo Q, se si ha che ogni serie sommabile con P è anche sommabile con Q allora diciamo che

$$P \text{ sommabile} \Rightarrow Q \text{ sommabile}.$$

Ci chiediamo sotto quali condizioni vale l'implicazione inversa, cioè quando si ha:

$$Q \text{ sommabile } \& \ T(a_n) \Rightarrow P \text{ sommabile}$$

dove $T(a_n)$ è una condizione tauberiana sui coefficienti della serie. Tali condizioni sono dette Tauberiane, dal nome del matematico austriaco Alfred Tauber, che nel 1897 provò la convergenza di una serie Abel sommabile sotto la condizione $na_n \to 0$. Hardy e Littlewood coniarono il termine "tauberiano" per indicare teoremi di questo tipo.

Nello specifico mostriamo che la somma di una serie Cesàro sommabile coincide con la somma secondo Abel e che, per serie convergenti, entrambe coincidono con il limite della serie in senso classico.

Valgono infatti le seguenti implicazioni:

$$\text{convergenza} \Rightarrow \text{Cesàro} \Rightarrow \text{Abel}.$$

Vedremo sotto quali condizioni tauberiane valgono le implicazioni inverse.

Estenderemo poi questi metodi al caso continuo con l'integrale di Lebesgue-Stieltjes, dando definizioni di sommabilità ed un risultato tauberiano per gli integrali.

Nel secondo capitolo studieremo la convergenza dell'estensione complessa delle serie. Mostreremo come, partendo da una funzione in $L^1(S^1)$, sia possibile estenderla in modo armonico e olomorfo sul disco aperto $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Nello stile tauberiano, diamo condizioni sufficienti per ottenere l'implicazione inversa, ovvero condizioni per cui una funzione olomorfa sul disco ammetta limite radiale, e definisca una funzione in $L^1(S^1)$.

Vedremo il problema analogo nel caso non limitato (su $\mathbb{R}$) con la relativa estensione armonica e olomorfa in un semipiano.

Quanto visto ci porterà a caratterizzare uno spazio di funzioni olomorfe, che potremo identificare anche come un sottospazio di $L^2(S^1)$: lo Spazio di Hardy H^2. Tale spazio, oltre a soddisfare le nostre "condizioni tauberiane" di crescita, lega l'estensione olomorfa di una funzione su un dominio di $\mathbb{C}$ e i suoi valori al bordo.

Nel caso continuo, questo collegamento verrà portato avanti dal Teorema di Paley-Wiener, che caratterizza le funzioni di $L^1(\mathbb{R})$ la cui trasformata di Fourier ha supporto compatto.

Nel Capitolo 3 studiamo la serie armonica: vediamo che la successione delle sue somme parziali ha crescita logaritmica e che la differenza tra la somma della serie e la funzione $\log n$ tende a un valore finito: la costante di Eulero-Mascheroni.

Con accenni alla Teoria Tauberiana, dimostriamo in modo analogo che la differenza tra la funzione $\zeta(s)$ di Riemann e la funzione meromorfa $\frac{1}{s-1}$, per s che tende al polo semplice in 1, tende ancora alla stessa costante γ.

Capitolo 1

Serie divergenti

Le serie divergenti erano largamente usate già prima del 1800, ma il loro utilizzo generava spesso confusione e contraddizioni. Eulero, ad esempio, pensava che ogni serie divergente dovesse avere una naturale somma, senza però definire cosa questo significasse. Negli anni i matematici hanno dato diversi metodi per sommare serie divergenti [7]. In generale, avere un *metodo* per sommare una serie infinita $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ risulta utile, sia quando non si voglia calcolare direttamente la somma della serie, sia perché questa potrebbe anche *non* convergere. Vorremmo però, anche in questo caso, attribuire un valore numerico alla serie.

1.1 Metodi di sommabilità

Consideriamo la serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tag{1.1}$$

questa non converge, infatti non converge la successione delle sua somme parziali:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \quad \text{uguale a} \quad s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari,} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

dato che

$$\lim_{n \text{ pari}} s_n \neq \lim_{n \text{ dispari}} s_n \quad .$$

Consideriamo allora la media aritmetica delle somme parziali:

$$\sigma_m = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{m-1}}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} s_k \quad . \tag{1.2}$$

Allora abbiamo che:

$$\sigma_1 = s_0 = 1, \quad \sigma_2 = \frac{s_0 + s_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{s_0 + s_1 + s_2}{3} = \frac{2}{3}, \dots$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1/2 & m \text{ pari} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

ed esiste $\lim_{m\to\infty} \sigma_m$ dato che

$$\lim_{m \text{ dispari}} \sigma_m = \frac{1}{2} = \lim_{m \text{ pari}} \sigma_m \quad .$$

Diamo allora la seguente definizione:

Definizione 1 (Cesàro sommabilità)**.** Una serie $\sum a_k$ è *Cesàro sommabile* se esiste finito il $\lim_{m\to\infty} \sigma_m$ della media aritmetica delle somme parziali s_n. Tale limite è detto *somma di Cesàro* della serie.

Fatto 1. Ogni serie convergente è Cesàro sommabile.
Inoltre la somma di Cesàro risulta uguale al limite della serie stessa:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{m\to\infty} \sigma_m = \ell.$$

Osservazione 1 (Cesàro per successioni)*.* Per ogni successione convergente la sommabilità di Cesàro dice che

$$a_n \to a \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} a_n \to a$$

Non tutte le serie Cesàro sommabili sono convergenti: ad esempio la serie (1.1) è Cesàro sommabile, ma non sommabile.

Consideriamo ora la serie:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \tag{1.3}$$

anch'essa non convergente. Le sue somme parziali sono date da:

$$s_0 = 1, \quad s_1 = -1, \quad s_2 = 2, \quad s_3 = -2, \quad s_4 = 4, \quad s_5 = -4, \dots$$

quindi in generale si ha

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (k+1) \quad \text{uguale a} \quad s_n = \begin{cases} \dfrac{n+2}{2} & n \text{ pari}, \\ -\dfrac{n+1}{2} & n \text{ dispari}. \end{cases}$$

Calcolando le medie aritmetiche otteniamo:

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari}, \\ \dfrac{s_{m-1}}{m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

quando m è dispari, $m-1$ è pari e $s_{m-1} = \frac{(m-1)+2}{2} = \frac{m+1}{2}$. Sostituendo in σ_m abbiamo

$$\sigma_m = \begin{cases} 0 & m \text{ pari} \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2m} & m \text{ dispari} \end{cases}$$

calcolando il limite si ha

$$\lim_{k\to\infty} \sigma_{2k+1} = \frac{1}{2} \quad \text{mentre} \quad \lim_{k\to\infty} \sigma_{2k} = 0$$

per cui la serie (1.3) non è Cesàro sommabile essendo

$$\lim_{m \text{ dispari}} \sigma_m \neq \lim_{m \text{ pari}} \sigma_m \quad .$$

Cerchiamo un nuovo metodo per sommare questa serie.
Consideriamo i termini della (1.3) come coefficienti di una serie di potenze:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

supponiamo che questa converga per $|x| < 1$, e che quindi definisca una funzione $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n \quad \text{per } |x| < 1,$$

f è la derivata formale della serie

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \right) = \frac{x}{1+x}$$

perché serie geometrica di ragione $-x$. Quindi esiste il limite per $x \to 1^-$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} F'(x) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$$

Abbiamo allora un altro metodo di sommabilità:

Definizione 2 (Abel sommabilità)**.** Una serie $\sum a_k$ è *Abel sommabile* se la serie di potenze $\sum a_k x^k$ converge per $|x| < 1$ e se, detta $f(x) = \sum a_k x^k$, esiste finito il

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

Tale limite è detto *somma di Abel* della serie.

Vale la seguente implicazione:

Proposizione 1 (Cesàro $\Rightarrow$ Abel)**.** Una serie Cesàro sommabile è Abel sommabile, e le loro somme coincidono, ovvero

$$\text{se } \lim_{m\to\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{allora} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell$$

Dimostrazione. Riscriviamo la serie di potenze in termini delle sue somme parziali:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1}) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} x^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{n+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n\right)(1-x)$$

evidenziamo l'identità trovata, che ci tornerà utile in seguito:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad . \tag{1.4}$$

Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$ come serie a sé: per la (1.2) le sue somme parziali sono date da $\sum_{n=0}^{m} s_n = (m+1)\sigma_{m+1}$. Riapplichiamo (1.4) a $\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ ottenendo

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\sigma_{n+1} x^n$$

usando che $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per $|x| < 1$, riscriviamo $(1-x)^2$ come

$$(1-x)^2 = \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}\right)^2 = \frac{1}{(1+x+x^2+\dots)^2} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}$$

sostituendo otteniamo:

$$\cdots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n} = \ell + \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n - \ell\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n}$$

dove abbiamo aggiunto e sottratto ℓ. Notiamo che il denominatore

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}nx^n + \sum_{n=0}^{\infty}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}x^n =$$
$$= x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' + \sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

si mantiene limitato per $|x| < 1$. Poiché $\sigma_{n+1} \to \ell$ per ipotesi, si ha

$$\ell + \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\sigma_{n+1}-\ell\right)x^n}{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n} \to \ell$$

□

Dal Fatto 1 e da quanto appena visto segue che

Fatto 2. Una serie convergente è Abel sommabile.
Inoltre la somma di Abel è uguale al limite della serie.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \ell.$$

Viste le implicazioni sui metodi di sommabilità presentati è naturale chiedersi sotto quali condizioni valgono le implicazioni inverse. Ci poniamo le seguenti domande

Domanda 1. Quali serie $\sum_0^\infty a_n$ Abel sommabili sono anche Cesàro sommabili?

Domanda 2. Che condizioni mettere sui termini di una serie Abel o Cesàro sommabile per avere convergenza?

Queste condizioni vanno sotto il nome di Condizioni Tauberiane, dal nome del matematico Alfred Tauber. Più in generale, i Teoremi Tauberiani daranno condizioni sui termini di una serie sommabile con qualche metodo, per ottenere la convergenza o una sommabilità in un senso più debole.

La Teoria Tauberiana ha inizio con il seguente risultato sull'Abel sommabilità, dovuto a Tauber:

Teorema 2 (Tauber)**.**

$$\sum a_n \text{ Abel sommabile } \& \quad na_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ convergente.}$$

Dimostrazione. Chiedere che la serie $\sum a_n$ sia convergente equivale a chiedere che la successione delle somme parziali s_N sia convergente. Sapendo che esiste $\lim f(x) \xrightarrow{x\to 1} \ell$ cercheremo di stimare la differenza tra tale limite e quello della successione $\{s_N\}_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - f(x)\right| &= \left|\left(a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n\right) - \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n) - \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right|
\end{aligned}$$

considerando che $1 - x^n < n(1-x)$ per $|x| < 1$ e che $\frac{n}{N}$ è maggiore di 1 per $n > N$, maggioriamo ogni termine ottenendo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} n\,|a_n|\,(1-x) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{n}{N}\,|a_n|\,x^n \leqslant \\
&\leqslant (1-x)\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \frac{1}{N}\sum_{n=N+1}^{\infty} |na_n|\,x^n
\end{aligned}$$

maggioriamo ancora la somma degli $|na_n|\,x^n$ con il $\sup |na_n|$ e raccogliamo:

$$(1-x)\left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \frac{1}{N(1-x)}\sup_{n>N} |na_n|\right] \qquad \text{per ogni } \; |x| < 1,$$

possiamo quindi prendere $x = 1 - \frac{1}{N}$, così

$$\left|s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leqslant \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)\right)\left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \underbrace{(N(1/N))^{-1}}_{=1}\sup_{n>N} |na_n|\right]$$

$$\left|s_N - f\left(1 - \frac{1}{N}\right)\right| \leqslant \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} |na_n| + \sup_{n>N} |na_n|\right] \xrightarrow{N\to\infty} 0 \tag{1.5}$$

infatti per l'ipotesi $na_n \to 0$ si ha che

i) $\sup_{n>N} |na_n| \to 0$;

ii) per l'Osservazione 1 se $na_n \to 0$ anche $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |na_n| \to 0$

e la loro somma va a 0. Poiché $\lim_{x\to 1} f(x) = \ell$, possiamo concludere che:

$$\lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} f(1 - {}^1\!/\!{}_N) = \ell$$

$\square$

Poiché la Abel sommabilità implica la Cesàro sommabililità, la condizione $na_n \to 0$ è sufficiente per avere la convergenza di una serie Cesàro sommabile. Hardy mostrò tuttavia che questa richiesta poteva essere rilassata chiedendo solo che la successione $\{na_n\}_n$ fosse limitata.

Teorema 3 (Hardy)**.**

$$\sum a_n \text{ Cesàro sommabile } \ \& \quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ convergente.}$$

Non dimostriamo qui questo teorema, ma lo useremo per dimostrare un risultato più forte. Anni dopo infatti, John Edensor Littlewood, rispondendo a una domanda di Hardy, dimostrò la convergenza di una serie Abel sommabile sotto le stesse ipotesi di limitatezza su $\{a_n\}_n$.

Teorema 4 (Littlewood)**.**

$$\sum a_n \text{ Abel sommabile } \ \& \quad |na_n| \leqslant C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ convergente.}$$

La dimostrazione che ottenne Littlewood era molto tecnica e negli anni successivi sono state trovate dimostrazioni meno complesse. Per quella che riporteremo qui servirà un risultato preliminare: il Metodo di Karamata.

Karamata per serie di potenze

Il seguente risultato, sotto la condizione tauberiana di limitatezza dal basso delle somme parziali, mostra l'implicazione Abel $\Rightarrow$ Cesàro.

Teorema 5 (Karamata)**.**

$$\sum a_n \text{ Abel sommabile } \ \& \quad s_n \geqslant -C \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \text{ Cesàro sommabile.}$$

Nel seguito useremo l'ipotesi di Abel sommabilità di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, in virtù della (1.4), in questa versione: sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $|x| < 1$, allora

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \longrightarrow \ell \qquad \text{per } x \to 1^-$$

Mentre la tesi di Cesàro sommabilità sarà

$$\frac{\alpha_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} s_n \longrightarrow \ell \qquad \text{per } N \to \infty$$

Dimostrazione. A meno di sommare una costante C possiamo supporre $s_n \geqslant 0$ per ogni n. Per ogni k fissato, sviluppando con Taylor $1 - x^k$ abbiamo che

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{kn} = \frac{1-x}{1-x^k} f(x^k) \xrightarrow{x\to 1} \frac{\ell}{k}$$

Scriviamo l'ultimo termine come

$$\frac{\ell}{k} = \ell \int_0^1 t^k \frac{dt}{t} \quad . \tag{1.6}$$

Dato allora un polinomio a coefficienti reali $p(t) = \sum_{k=1}^{m} b_k t^k$, si ha

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n p(x^n) &= (1-x)\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n b_k x^{kn}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n b_k x^{kn}\right) \xrightarrow{\text{per } x\to 1} \sum_{k=1}^{m}\frac{\ell b_k}{k} = \ell\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{k}\end{aligned}$$

scrivendo $\frac{1}{k}$ come in (1.6) e scambiando poi somma e integrale, si ha:

$$= \ell\left(\sum_{k=1}^{m} b_k \int_0^1 t^k \frac{dt}{t}\right) = \ell \int_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^{m} t^k b_k}_{p(t)} \frac{dt}{t} = \ell \int_0^1 p(t)\frac{dt}{t}$$

in definitiva abbiamo ottenuto

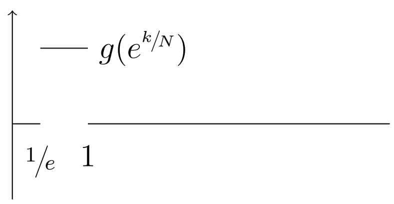
$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n p(x^n) \xrightarrow{x\to 1} \ell \int_0^1 p(t)\frac{dt}{t}. \tag{1.7}$$

Vorremmo ora scrivere $\alpha_N = \sum_{n=1}^{N} s_n$ nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} s_n p(x^n)$ in modo da poter passare al limite come in (1.7); vorremmo inoltre che il valore dell'integrale in (1.7) fosse uguale a 1. Usiamo quindi la funzione caratteristica:

$$g(t) = \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{e},1\right]}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \in \left[0, \frac{1}{e}\right) \\ 1 & \text{per } t \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] \end{cases}$$

questa valutata in $\left(\frac{1}{e}\right)^{k/N}$ è uguale a

$$g(e^{-k/N}) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \leqslant N \\ 0 & \text{se } k > N \end{cases}$$



per cui possiamo riscrivere le somme parziali come una serie infinita:

$$\alpha_N = \sum_{k \leqslant N} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} s_k g(e^{-k/N}) \tag{1.8}$$

Notiamo inoltre che

$$\int_0^1 g(t) \frac{dt}{t} = 1.$$

Sostituiamo ora $g(t)$ a $p(t)$ nel limite in (1.7). Possiamo farlo perché possiamo costruire un polinomio p tale che

$$p(t) \geqslant g(t) \quad \text{e} \quad \int_0^1 |p(t) - g(t)| \frac{dt}{t} < \epsilon \tag{1.9}$$

Costruzione di $p(t)$ Procederemo per passi.

Passo 1 Possiamo approssimare g con una funzione $\mathscr{C}^\infty$, su $[0, 2]$. Questo può essere fatto ad esempio per convoluzione: data una $\varphi \in \mathscr{C}^\infty([0, 2])$ a supporto compatto, φ sta in L^p per ogni $p < \infty$. Consideriamo allora

$$\varphi_\delta(t) = \frac{1}{\delta} \varphi\left(\frac{t}{\delta}\right)$$

e prendiamo la convoluzione con g:

$$(\varphi_\delta * g)(x) = \int_0^2 \varphi_\delta(x-t)g(t)dt \xrightarrow{\text{in } L^p} g \qquad \text{per } \delta \to 0,\ p < \infty.$$

In generale (vedi [2]) si ha

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g},$$

in particolare, poiché sia φ_δ che g sono a supporto compatto, anche $\varphi_\delta * g = h_\delta$ è a supporto compatto. Dunque $h_\delta \to g$ per $\delta \to 0$ e h_δ sta in $\mathscr{C}_0^\infty([0,2])$. Essendo nulla in un intorno destro dell'origine, possiamo dividere per t e avere

$$\frac{h_\delta(t)}{t} \in \mathscr{C}_0^\infty([0,2])$$

Passo 2 Chiamiamo $h_\epsilon(t) = \mathbb{1}_{[0,1]}(t)h_\delta(t)$. Per Stone-Weierstrass esiste un polinomio che approssima h_ϵ in $\mathscr{C}^\infty([0,1])$, cioè esiste Q_ϵ tale che

$$\left\| \frac{h_\epsilon}{t} - Q_\epsilon \right\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{h_\epsilon(t)}{t} - Q_\epsilon(t) \right| < \epsilon.$$

Passo 3 Prendiamo $P_\epsilon = tQ_\epsilon$, allora abbiamo che P_ϵ sta in $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ e $P(0) = 0$, inoltre:

$$\int_0^1 |h_\epsilon(t) - P_\epsilon(t)| \frac{dt}{t} = \int_0^1 \left| \frac{h_\epsilon(t)}{t} - Q_\epsilon(t) \right| dt \leqslant \epsilon.$$

In definitiva abbiamo costruito $P_\epsilon \geqslant g$ che approssima h_ϵ che approssimava g. Quindi a meno di riscalare e rinominare ϵ abbiamo la (1.9).

Prendendo dunque p come in (1.9) e sostituendo in (1.7) abbiamo

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n g(x^n) \xrightarrow{x\to 1} \ell \int_0^1 g(t)\frac{dt}{t} = \ell \tag{1.10}$$

Usando la (1.8) e dividendo per $\frac{1}{N}$ ambo i membri si ha

$$\frac{1}{N}\alpha_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N}) = \left(\frac{1-e^{-1/N}}{1-e^{-1/N}}\right)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N})$$

e raccogliendo vediamo che

$$= \left((1-e^{-1/N})N\right)^{-1}\left((1-e^{-1/N})\sum_{k=0}^{N} s_k g(e^{-k/N})\right) \xrightarrow{N\to\infty} \ell$$

poiché $\lim_{t\to 0} \frac{1-e^t}{t} \to 1$ mentre il resto tende a ℓ per la (1.10). Dunque

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha_N}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} s_n = \ell$$

□

Vediamo ora la dimostrazione del Teorema 4 .

Dimostrazione. (Littlewood).
Per la (1.5) la limitatezza di $|na_n|$ implica la limitatezza di $\{s_n\}$. Allora in particolare questa è limitata dal basso: siamo nelle ipotesi di Karamata e abbiamo la Cesàro sommabilità di $\sum a_n$. Per il teorema di Hardy, Cesàro sommabilità di $\sum a_n$ e la condizione $|na_n| \leqslant C$ implicano la convergenza della serie.

□

1.2 Dalle serie agli integrali

Oltre i teoremi tauberiani per le serie possiamo avere risultati analoghi per gli integrali. Occorre prima introdurre una nuova famiglia di integrali detti integrali di Stieltjes.

Integrale di Lebesgue-Stieltjes

L'integrale di Lebesgue-Stieltjes estende l'integrale di Lebesgue.

Seguendo [4], dato $[0,b] \subset \mathbb{R}$, sia $\mathscr{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi del tipo $[0,t]$ con $t \in (0,b]$ o $\{0\}$.
Data una funzione $F\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ che sia *continua a destra*, nulla in 0 e a *variazione finita*, possiamo definire una misura finitamente additiva su $[0,b]$:

$$\begin{aligned} \mu_F\colon\ ([0,b],\mathscr{F}) &\to \mathbb{R} \\ [0,t] &\mapsto F(t) - F(0) = F(t) \end{aligned}$$

Per il Teorema di estensione di Caratheodory esiste un'unica misura con segno μ^* definita sulla σ-algebra dei boreliani $\mathscr{B}([0,b])$ tale che $\mu^*(E) = \mu_F(E)$ per ogni $E \in \mathscr{F}$.

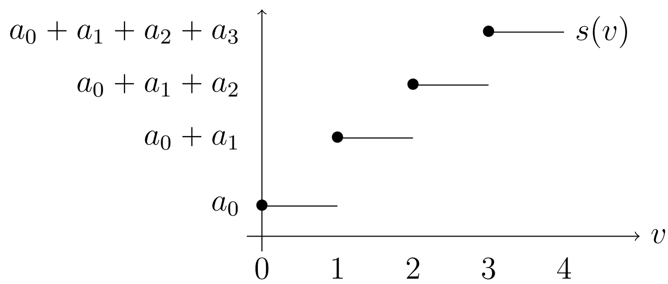
Consideriamo adesso, data una serie, la successione delle sue somme parziali $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ come una funzione su $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^+ \\ n &\mapsto s_n \end{aligned}$$

e la estendiamo ad una funzione a gradino su tutto $\mathbb{R}$:

$$s(v) = \sum_{k \leqslant v} a_k \quad \text{per } v \geqslant 0 \tag{1.11}$$

mettendola a 0 per ogni $v < 0$.



Tale funzione è continua a destra e a variazione limitata, quindi, per quanto visto sopra, possiamo definire una misura con segno

$$\mu_s^*\colon \mathscr{B}(\mathbb{R}^+) \to \mathbb{R}^+$$

tale che $\mu_s^*(E) = \mu_s(E)$ per ogni $E \in \mathscr{F}$, dove $\mathscr{F}$ è la famiglia degli intervalli $[0, b]$ al variare di b in $\mathbb{R}^+$ e μ_s è la misura definita a partire da s come sopra.

Definizione 3. La misura μ_s^* è detta misura di Lebesgue-Stieltjes associata a $s(v)$.

Indicheremo nel seguito μ_s^* con μ per semplicità.
Ora che abbiamo una misura, data una funzione $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ possiamo definire l'integrale di Lebesgue-Stieltjes prima per funzioni semplici, quindi per funzioni misurabili limitate e per funzioni misurabili positive.

Estendiamo poi la definizione a una qualsiasi funzione misurabile scomponendo f come somma della sua parte positiva e negativa e definendo

$$\int_{[0,v]} f(t)ds(t) := \int_{[0,v]} f^+(t)ds(t) - \int_{[0,v]} f^-(t)ds(t)$$

se almeno uno dei due addendi è finito.

1.3 Tauber e integrali

Daremo ora le definizioni analoghe di Cesàro e Abel sommabilità per integrali.

Avevamo definito in (1.2) la media aritmetica delle somme parziali con σ_m, la riscriviamo adesso in termini degli a_k rinumerando, se necessario, i termini a partire da $n = 1$:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k \leqslant n} a_k (n - k)$$

Estendiamo $\sigma(n)$ su tutto $\mathbb{R}^+$ nel seguente modo:

$$\sigma(u) := \int_0^u (u - t) ds(t)$$

integrando per parti e cambiando variabile diventa

$$\sigma(u) = \int_0^u s(v) dv = \int_0^1 s(uv) dv \qquad \text{per } u \in [0, \infty)$$

Definizione 4. Un integrale $\int_0^\infty ds(v)$ è Cesàro sommabile se esiste

$$\lim_{u \to \infty} \sigma(u) = \lim_{u \to \infty} \int_0^u (u - t) ds(t) = \ell$$

Nel caso delle serie di potenze $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ riscriviamo $x = e^{-t}$ in modo che

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \lim_{t \to 0} \sum_{n=0}^\infty a_n e^{-tn}$$

se la serie a destra converge per ogni $t > 0$, possiamo riscrivere la (1.11) come

$$\sum_{n=0}^\infty a_n e^{-tn} = \int_0^\infty e^{-tv} ds(v)$$

integrando per parti, poiché $s(0) = 0$ e $\lim_{v \to \infty} e^{-tv} = 0$, otteniamo

$$\int_0^\infty e^{-tv} ds(v) = t \int_0^\infty s(v) e^{-tv} dv$$

la condizione di Abel sommabilità

$$\lim_{x \to 1} \sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \ell \qquad \text{diventa} \qquad \lim_{t \to 0} \int_0^\infty t s(v) e^{-tv} dv = \ell$$

Definizione 5. Un integrale $\int_0^\infty ds(v)$ è Abel sommabile se esiste per ogni $t > 0$ il limite

$$\lim_{t\to 0}\int_0^\infty e^{-tv}ds(v) = \ell$$

o, per quanto detto sopra, se esiste

$$\lim_{t\to 0}\int_0^\infty ts(v)e^{-tv}dv = \ell$$

Vediamo un risultato tauberiano per Abel $\Rightarrow$ Cesàro per integrali.

Teorema 6. Sia $s(v)$ una funzione nondescrescente, continua a destra, nulla per $v < 0$ e tale che

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tv}ds(v) \quad \text{esiste per ogni } t > 0.$$

Se esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$t^\alpha F(t) \longrightarrow \ell \quad \text{per } t \to 0$$

allora

$$\frac{s(u)}{u^\alpha} = \frac{\ell}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{per } u \to \infty.$$

Osservazione 2. Notiamo che nel caso $\alpha = 0$ ritroviamo esattamente l'Abel sommabilità appena definita, e come tesi la Casàro sommabilità, dato che

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{e dunque} \quad \lim_{u\to\infty} s(u) = \ell.$$

Dimostrazione. Come in Karamata, si ha che

$$t^\alpha F(t) = \int_0^\infty e^{-tv}ds(v) \xrightarrow{t\to 0} \ell \qquad \text{allora:}$$

$$(tk)^\alpha F(tk) = \int_0^\infty e^{-tkv}ds(v) \xrightarrow{t\to 0} \ell$$

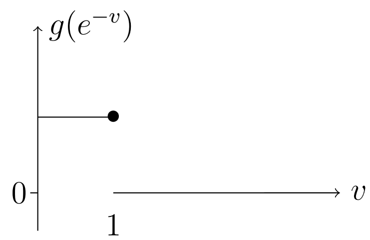
allora

$$F(tk) = \int_0^\infty e^{-tkv}ds(v) \sim \ell t^{-\alpha}k^{-\alpha} \text{ per } t \to 0.$$

Riscriviamo $k^{-\alpha}$ come

$$k^{-\alpha} = k^{-\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty v^\alpha e^{-v}dv$$

poiché
$$\int_0^\infty e^{-v} dv^\alpha = \underbrace{\left[v^\alpha e^{-v}\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty e^{-v} v^\alpha dv$$
abbiamo
$$\begin{aligned} k^{-\alpha} &= \frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-v} dv^\alpha = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-v} \frac{dv^\alpha}{k^\alpha} = \qquad \text{(cambio di variabile } v = kw\text{)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-kw} dw^\alpha \end{aligned}$$
Sia $p(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ polinomio a coefficienti reali, e sia $\ell' = \ell/\Gamma(\alpha+1)$, si ha
$$\int_0^\infty p(e^{-tv}) ds(v) \sim \ell' t^{-\alpha} \int_0^\infty p(e^{-v}) dv^\alpha \quad \text{per } t \to 0\,. \tag{1.12}$$
Prendiamo $g(t) = \mathbb{1}_{[1/e,1]}$ come in (1.1), valutata in e^{-v} questa è uguale a
$$g(e^{-v}) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } v > 1 \end{cases}$$



Come in Karamata, possiamo sostituire g a p in (1.12), infatti possiamo costruire un polinomio $P(t)$ che approssimi g dall'alto in modo che
$$P(t) \geqslant g(t) \text{ su } [0,1] \text{ e } \int_0^1 |P(t) - g(t)|\, \alpha \left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\alpha-1} \frac{dt}{t} \leqslant \epsilon \tag{1.13}$$

Nota La forma nell'integrando deriva dalla richiesta
$$\int_0^\infty g(e^{-v}) dv^\alpha = 1$$

per eliminare l'integrale di $P(t)$ nel limite della (1.12). Vedi [3].

Vale la pena di notare che, quando useremo la (1.12), avremo

$$g(e^{-tv}) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \leqslant 1/t \\ 0 & \text{se } v > 1/t \end{cases} \quad ;$$

e dunque

$$\int_0^\infty g(e^{-tv})ds(v) = \int_0^{1/t} ds(v) = s(1/t).$$

Preso P come in (1.13) abbiamo che

$$\begin{aligned} s(1/t) = \int_0^\infty g(e^{-tv})ds(v) \leqslant \int_0^\infty P(e^{-tv})ds(v) \quad & \text{per la (1.12) maggioriamo} \\ \leqslant (\ell' + \epsilon)t^{-\alpha} \int_0^\infty P(e^{-v})dv^\alpha & \end{aligned}$$

Maggiorando ancora l'integrale con

$$\int_0^\infty P(e^{-v})dv^\alpha \leqslant \int_0^\infty g(e^{-v})dv^\alpha + \epsilon = 1 + \epsilon,$$

otteniamo

$$s(1/t) \leqslant (\ell' + \epsilon)t^{-\alpha}(1 + \epsilon)$$

Approssimando g con un polinomio Q come in (1.13), ma dal basso, con minorazioni analoghe otteniamo:

$$(\ell' - \epsilon)t^{-\alpha}(1 - \epsilon) \leqslant s(1/t)$$

Poiché ϵ è arbitrariamente piccolo, per $t \to 0$ si ha

$$s(1/t) \longrightarrow \frac{\ell'}{t^\alpha}$$

cambiando variabile: $u = 1/t$ abbiamo la tesi:

$$\lim_{u\to\infty} s(u) \sim \ell' u^\alpha = \frac{\ell}{\Gamma(\alpha + 1)} u^\alpha.$$

$\square$

Capitolo 2

Spazi di Hardy

In questo capitolo vedremo estensioni di serie nel piano complesso, in particolare emergerà il legame tra le condizioni al bordo e l'estensione olomorfa nella parte interna di un dominio. Mostreremo alcune motivazioni che porteranno alla caratterizzazione degli Spazi di Hardy.

2.1 Definizioni preliminari

Iniziamo dando alcuni concetti dell'analisi complessa.
Sia Ω un aperto connesso di $\mathbb{C}$, che chiaremo dominio di $\mathbb{C}$, e sia f una funzione continua da Ω in $\mathbb{C}$.

Definizione 6. Una funzione f si dice *olomorfa* se è differenziabile in senso complesso. Più precisamente f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $z_0 \in \mathbb{C}$ se esiste

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \ell$$

Diremo che f è olomorfa su Ω se è $\mathbb{C}$-differenziabile in ogni suo punto.

Notazione 1. Dato Ω un dominio di $\mathbb{C}$, le funzioni differenziabili in senso complesso su Ω formano uno spazio vettoriale che indicheremo con $\mathcal{H}(\Omega)$.

Essere differenziabile in senso complesso è una richiesta *più forte* della normale differenziabilità, infatti data $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vale la seguente

Proposizione 7. f è $\mathbb{C}$-differenziabile in $z_0 = (x_0, y_0)$ se e solo se è differenziabile in (x_0, y_0) in senso classico e se soddisfa le *condizioni di Cauchy-Riemann*

$$f_x + i f_y = 0 \tag{2.1}$$

Studiamo queste funzioni poiché sono strettamente legate alle serie, in quanto sono *analitiche*, ovvero sono funzioni per cui per ogni punto z_0 del loro dominio esiste un intorno $U \ni z_0$ in cui sono sviluppabili in serie di potenze $\sum a_n(z - z_0)^n$ centrata nel punto[1]. Le funzioni olomorfe sono analitiche, e quindi $\mathscr{C}^\infty$. Ciò non è vero per funzioni $\mathscr{C}^\infty$ reali, ad esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x \leqslant 0 \end{cases}$$

non è analitica in $x = 0$, pur essendo $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, perché le sue derivate si annullano tutte nell'origine.

Le funzioni olomorfe sono contenute in una classe più ampia di funzioni, con cui condividono diverse proprietà: le funzioni armoniche.

Dato $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, sia $u \colon A \to \mathbb{R}$, $u \in \mathscr{C}^2(A)$.
Il laplaciano è un operatore differenziale definito in generale per funzioni $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Nel nostro caso

$$\triangle u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Definizione 7. Una funzione u è armonica se $\triangle u = 0$.

Fatto 3. Scrivendo gli operatore differenziali

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)$$

si vede che ogni funzione olomorfa è armonica.

2.2 Spazi di Hardy sul disco

Data una funzione $g \colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, sia $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ la sua serie di Fourier formale, cioè tale che

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt \quad \text{con} \quad \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

[1] Ovvero esiste una serie di potenze che converge assolutamente a $f(z)$ in ogni punto di U. Questa può essere, ad esempio, la serie di Taylor di f centrata nel punto.

Questo è vero se ad esempio $g \in \mathscr{C}^1([-\pi, \pi])$.

Indichiamo con $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mentre con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ il bordo di $\overline{\mathbb{D}}$. Consideriamo la funzione data da

$$\begin{aligned} u_0 \colon S^1 &\to \mathbb{C} \\ e^{i\theta} &\mapsto g(\theta) \end{aligned}$$

Domanda 3. È possibile estendere g a una funzione *olomorfa* su tutto $\overline{\mathbb{D}}$?

Per rispondere ci chiediamo prima:

Domanda 4. Si può estendere u_0 a una funzione *armonica* su tutto $\mathbb{D}$? Quello che cerchiamo quindi è una soluzione del Problema di Poisson sul disco con dato al bordo u_0, cioè una funzione u che risolva:

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{D} \\ u = u_0 & \text{su } S^1 \end{cases}$$

Estensioni armoniche

Per come abbiamo definito u_0, per ogni $z \in S^1$ scriviamo $z = e^{i\theta}$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$, allora

$$u_0(e^{i\theta}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\theta}$$

e abbiamo la seguente:

Proposizione 8. Sia $g(t)$ una funzione con coefficienti di Fourier sommabili, e sia u_0 definita come sopra, allora l'estensione

$$u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \overline{z}^n$$

è continua su $\overline{\mathbb{D}}$, in particolare è soluzione di $(\wp)$.

Dimostrazione. Data $u_0(e^{it})$ come sopra, distinuiamo due casi per i singoli addendi:

$(n \geqslant 0)$ z^n è olomorfa su S^1 e si estende in modo olomorfo su $\mathbb{D}$

$(n < 0)$ $z^{-n} = e^{-in\theta} = \overline{e^{in\theta}} = (\bar{z})^n$ si estende in modo anti-olomorfo su $\mathbb{D}$

scriviamo allora

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n\geqslant 0} c_n z^n + \sum_{n<0} c_n \bar{z}^n = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{(\overline{c_{-n}} z^n)} \end{aligned}$$

le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{-n} z^n$$

poiché $\|c_n z^n\|_\infty = |c_n|$ e per l'ipotesi di sommabilità sui coefficienti, convergono totalmente su $\mathbb{D}$, quindi sono continue su $\overline{\mathbb{D}}$. Allora u_0 si estende a

$$u(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n \tag{2.2}$$

che è continua su $\overline{\mathbb{D}}$, armonica su $\mathbb{D}$ e uguale a u_0 su S^1, pertanto è soluzione di ($\wp$). $\square$

Adesso, data $u_0 \colon S^1 \to \mathbb{C}$ e $u_0(e^{it}) = g(t)$ con coefficienti di Fourier c_n come sopra, cerchiamo una formula esplicita per estendere u_0 su $\mathbb{D}$ in modo armonico. Sviluppiamo l'espressione (2.2) sostituendo a c_n l'espressione dei coefficienti di g:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt\right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int}dt\right) \bar{z}^n \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((z^n e^{-int}) + (\bar{z}^n e^{int})\right)\right] dt \end{aligned}$$

ora notiamo che $(\bar{z}^n e^{int}) = \overline{(z^n e^{-int})}$, e ricordandoci che $z + \bar{z} = 2\Re(z)$

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\Re(z^n e^{-int})\right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\left[1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty}(z^n e^{-int})\right)\right] dt \end{aligned}$$

dunque $u(z)$ può essere scritta in modo più conciso come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(t,z)dt$$

dove

$$h(t,z) := 1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}\right) \text{ è il } \textit{nucleo di Poisson}$$

Cerchiamo di riscrivere $h(t,z)$ eliminando la sommatoria poco maneggiabile nella formula diretta:

$$\begin{aligned} h(t,z) &= 1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}\right) \\ &= 1 + 2\Re\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(ze^{-it}\right)^n\right) \end{aligned}$$

la sommatoria è una serie geometrica di ragione $q = ze^{-it}$, allora sapendo che

$$\sum_{1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} \text{ per } |a| < 1 \tag{2.3}$$

per $|z| < 1$, cioè per $z \in \mathbb{D}$ otteniamo

$$\begin{aligned} \ldots &= 1 + 2\Re\left(\frac{ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\right) \\ &= 1 + 2\Re\left(\frac{ze^{-it}\overline{(1-ze^{-it})}}{(1-ze^{-it})\overline{(1-ze^{-it})}}\right) \\ &= 1 + 2\Re\left(\frac{ze^{-it} - (ze^{-it})(\bar{z}e^{it})}{|1-ze^{-it}|^2}\right) \\ &= 1 + 2\Re\left(\frac{ze^{-it} - |z|^2}{|1-ze^{-it}|^2}\right) \\ &= 1 + 2\frac{\Re\left(ze^{-it}\right) - |z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} \end{aligned}$$

svolgendo i conti e ricordandoci che $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ si ottiene

$$h(t,z) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$$

dove abbiamo usato che $|1-ze^{-it}| = |e^{it}-z|$ e che $|e^{it}-z|$ e $2\Re(ze^{-it})$ si sommano a 1.
Scriviamo ora z come $re^{i\theta}$ con $r \in \mathbb{R}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, abbiamo:

$$\left|e^{it}-z\right|^2 = (e^{it}-z)(e^{-it}-\bar{z}) = 1 - 2\Re(ze^{it}) + r^2$$

inoltre $\Re(ze^{-it}) = \Re(re^{i\theta}e^{-it}) = r\Re(e^{i(\theta-t)}) = r\cos(\theta-t)$, otteniamo una formula in funzione t, r, θ:

$$P_r(\theta - t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$$

chiamiamo ϕ l'angolo $(\theta - t)$ e definiamo

Definizione 8 (Nucleo di Poisson per il disco)**.**

$$P_r(\phi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\phi)+r^2}$$

Data una u_0 al bordo, la soluzione armonica al problema ($\wp$) è data da

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta-t)g(t)dt = P_r * g$$

Fissato $r \in [0,1)$ possiamo scrivere i coefficienti di Fourier di $P_r(\theta)$, avremo così un'altra formula per il nucleo di Poisson:

$$P_r(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}$$

Dimostrazione. Spezziamo la serie in

$$\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} = 1 + \sum_{n>0}(re^{-i\theta})^n + \sum_{n>0}(re^{i\theta})^n$$

ottenendo due serie geometriche di ragione

$$q_1 = re^{-i\theta} \quad \text{e} \quad q_2 = re^{i\theta}$$

usando la (2.3) calcoliamo le somme, ottenendo

$$1 + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}$$

che sommati danno $P_r(\theta)$. □

Data $g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, la sua estensione armonica su $\mathbb{D}$ si può ottenere come convoluzione con il nucleo di Poisson

$$\begin{aligned} u(z) = (P_r * g)(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{int} \\ &= c_0 + \sum_{n>0} c_n r^n e^{int} + \sum_{n>0} c_{-n}r^n e^{-int} \\ &= c_0 + \sum_{n>0} c_n z^n + + \sum_{n>0} c_{-n} z^{-n} \end{aligned}$$

ritrovando l'espressione in (2.2).

Possiamo adesso rispondere anche alla prima domanda, dato che $u(z)$ è composta da una parte *olomorfa* e una *anti-olomorfa*:

$$u(z) = c_0 + \underbrace{\sum_{n>0} c_n z^n}_{\text{olomorfa}} + \underbrace{\sum_{n>0} c_{-n} \overline{z}^n}_{\text{anti-olomorfa}}$$

Affinché l'estensione u risulti olomorfa i coefficienti di Fourier di g dovranno quindi essere nulli per $n < 0$.

Limiti radiali

Iniziamo dando la definizione:

Definizione 9. Sia $f(r, \theta) = f(re^{i\theta})$ una funzione continua sul disco aperto $\mathbb{D}$. Diremo che f ha limite radiale se esiste finito

$$\lim_{r \to 1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}) \quad \text{per quasi ogni } \theta \in [0, 2\pi].$$

Osservazione 3. Grazie ai risultati di approssimazione per convoluzione (già usati nel primo capitolo, vedi anche [2]) e poiché $P_r(\theta)$ è un buon nucleo, abbiamo che

$$\lim_{r \to 1} P_r * g = g$$

cioé, se g era olomorfa, la sua estensione olomorfa su $\mathbb{D}$ ha limite radiale, ovvero $u(re^{it}) \xrightarrow{r \to 1} g(t)$ per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi]$. Questo non è vero in generale per funzioni olomorfe qualsiasi su $\mathbb{D}$.

Ci possiamo chiedere, nello stile di Tauber, quali condizioni occorrono su g, o sui suoi coefficienti di Fourier, per l'implicazione inversa, ovvero:

Domanda 5. Quali funzioni olomorfe su $\mathbb{D}$ ammettono limite radiale per $|z| \to 1$?

Una risposta più generale è data dal teorema di Fatou, che richiede soltanto che $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ sia limitata.

Prima del teorema vediamo la seguente

Proposizione 9. Sia f una funzione in $L^1([\pi, \pi])$, cioè f integrabile su $[-\pi, \pi]$, con $f(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$. Allora

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{int} \xrightarrow{r \to 1} f(t) \quad \text{per quasi ogni } t \in [-\pi, \pi]$$

Dimostrazione. Estendiamo f in modo periodico su tutto $\mathbb{R}$, o anche in modo che sia a supporto in $[-2\pi, 2\pi]$, comunque $f(\pi) = f(-\pi)$. Vale l'uguaglianza:

$$\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{int}}_{(1)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y) P_r(y) dy}_{(2)}$$

La parte (2), usando che $P_r(y) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{iny}$, è uguale a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)P_r(y)dy &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)\sum_{-\infty}^{\infty}\left(r^{|n|}e^{iny}\right)dy \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty}\frac{r^{|n|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)e^{iny}dy\end{aligned}$$

effettuando un cambio di variabile, l'integrale diventa:

$$\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(y)e^{in(t-y)}dy = e^{int}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{iny}dy = 2\pi c_n e^{int}$$

quindi la (2) è uguale a $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{r^{|n|}}{2\pi} 2\pi c_n e^{int}$ che è la (1). Adesso per convoluzione (vedi [2]) abbiamo che

$$(f * P_r)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-y)P_r(y)dy \xrightarrow{r\to 1} f(t) \text{ per quasi ogni } t$$

□

Siamo pronti per il

Teorema 10 (Fatou)**.** Sia f olomorfa e limitata su $\mathbb{D}$, allora f ammette limite radiale:

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta}) \text{ per q.o. } \theta \in [0, 2\pi]$$

Dimostrazione. f è olomorfa, quindi posso scriverla in serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \overset{z=re^{i\theta}}{=} \sum_{n\geqslant 0} a_n r^n e^{in\theta}$$

questa serie converge totalmente su ogni disco chiuso $\mathbb{D}_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \delta\}$ con $\delta < 1$. Quindi per ogni $r_0 < 1$ fissato

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n r_0^n e^{in\theta} \text{ è la serie di Fourier di } f(r_0 e^{i\theta}) \text{ in } L^2\left(S^1_{r_0}\right)$$

intesa come funzione della sola θ. Infatti, indicando $f(r_0 e^{i\theta})$ con $f_{r_0}(e^{i\theta})$:

$$\begin{aligned}
c_n(f_{r_0}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_{r_0}(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\geqslant 0}\left(a_n r_0^n e^{in\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta \\
&= a_n r_0^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n\geqslant 0} e^{in\theta}e^{-in\theta}d\theta\right) = a_n r_0^n\frac{1}{2\pi}2\pi \\
&= \begin{cases} a_n r_0^n & \text{per } n\geqslant 0 \\ 0 & \text{per } n<0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Usiamo ora l'ipotesi che f sia limitata, ovvero che esista $M>0$ tale che

$$|f(z)|\leqslant M \quad \text{per ogni } z\in\mathbb{D}$$

Per Parseval (vedi [5]) sappiamo che

$$\|f_r\|^2_{L^2_\theta[-\pi,\pi]} = \sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2 r^{2n}$$

per $r\to 1$ la serie

$$\sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2 r^{2n}\longrightarrow \sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2\leqslant M^2$$

Allora gli a_n sono i coefficienti di Fourier della funzione $f(e^{i\theta})\in L^2_\theta[-\pi,\pi]$, e per la Proposizione 9 si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta}\longrightarrow f(e^{i\theta}) \quad \text{per q.o. } \theta\in[-\pi,\pi]$$

$\square$

Dunque, data una funzione $f(t)\in L^2(S^1)$, questa può essere estesa a una funzione olomorfa su $\mathbb{D}$ solo se i coefficienti di Fourier di f:

$$c_n(f)=0 \quad \text{per ogni } n<0$$

Abbiamo visto poi che data $F\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ questa ha limite radiale al bordo S^1 se è limitata in $\mathbb{D}$, quindi se è limitata su ogni circonferenza $S^1_\delta = \{z\in\mathbb{D} : |z|=\delta<1\}$ in $\mathbb{D}$.
Allora la norma[2] $L^2_\theta[-\pi,\pi]$ di $F(re^{i\theta})$ è finita per ogni r fissato in $[0,1)$, e il suo limite radiale è una funzione in $L^2(S^1)$.

[2] si intende rispetto a θ

Pertanto, le funzioni che rispondono alle nostre richieste si trovano nel sottospazio $\mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(S^1_\delta)$: tali funzioni posso essere estese in maniera olomorfa su $\mathbb{D}$ con norma L^2 finita su ogni $S^1_\delta \subset \mathbb{D}$, ovvero ogni funzione f in $L^2(S^1)$ è univocamente determinata come traccia al bordo di una funione F in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ che ha norma $\left\|F(\delta e^{i\theta})\right\|_{L^2_\theta(S^1_\delta)}$ finita per ogni $\delta \in [0,1]$.

Chiamiamo questo spazio di funzioni olomorfe sul disco Spazio di Hardy; lo indichiamo con $H^2(\mathbb{D})$. Su di esso possiamo mettere una norma: il sup delle norme L^2 sulle circonfereze S^1_r:

$$\|F\|^2_{H^2(\mathbb{D})} := \sup_{r\in[0,1]} \|F\|^2_{L^2(S^1_r)}$$

Osservazione 4. Solitamente, la definizione di norma nello Spazio di Hardy viene data prendendo il sup sull'intervallo $[0,1)$ aperto a destra. Questo perché, a priori, non sappiamo se le funzioni olomorfe sul disco aperto con questo bound ammettano limite al bordo. Tuttavia, per quanto appena visto e per il Principio del massimo modulo delle funzioni olomorfe, queste avranno norma massima al bordo, e dunque

$$\sup_{[0,1)} \|\cdot\|_{H^2} = \sup_{[0,1]} \|\cdot\|_{H^2} = \|\cdot\|_{L^2(S^1)}\,.$$

Definizione 10 (Spazio di Hardy su $\mathbb{D}$)**.** Lo spazio

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta < \infty \right\}$$

è uno spazio vettoriale normato con la norma:

$$\left\|F(re^{i\theta})\right\|_{H^2} := \sup_{r\in[0,1)} \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|F(re^{i\theta})\right|^2 d\theta\right)^{1/2}$$

2.3 Spazi di Hardy sul semipiano

Un importante strumento che useremo in questo capitolo è la

Definizione 11 (Transfomata di Fourier)**.** Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrabile, ovvero $f \in L^1(\mathbb{R})$, indichiamo la sua trasformata di Fourier con

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-2\pi is\xi} ds$$

Questa funzione è ben definita per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, inoltre $\widehat{f}$ è continua e infinitesima all'infinito.

Più avanti faremo uso anche dell'altrettanto utile formula di inversione della Trasformata di Fourier.

Definizione 12 (Transfomata inversa di Fourier)**.** Data una funzione $\widehat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, integrabile, ovvero $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, indichiamo la sua anti-trasformata di Fourier con

$$\check{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi s} d\xi$$

Questa funzione è ben definita per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Osservazione 5. La formula di inversione, come la trasformata classica, richiede che $\widehat{f}$ stia in L^1: condizione che solitamente non è semplice da verificare senza un'espressione esplicita per $\widehat{f}$. Per questo si usa prendere la funzione di partenza f in un sottospazio di L^1 con certe proprietà di regolarità, in modo che la sua trasformata $\widehat{f}$ stia automaticamente in L^1, se non nello stesso spazio di f.
Un esempio di spazio con queste proprietà è lo Spazio di Schwartz $\mathcal{S}$, o lo spazio delle funzioni a decrescita moderata $\mathfrak{F}$, usato in [5] e che useremo più avanti. Dove non specificato altrimenti, faremo conto di essere in uno di questi spazi applicando la trasformata.

Sia $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \simeq \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ il semipiano superiore in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$. Il bordo di $\mathbb{R}^2_+$ è $\mathbb{R}$. Con riferimento al Problema di Poisson in (4), cerchiamo una soluzione di ($\wp$) su $\mathbb{R}^2_+$:

Domanda 6. È possibile estendere $u_0\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a una funzione *armonica* su $\mathbb{R}^2_+$? Cerchiamo una soluzione del Problema di Poisson sul semipiano superiore con dato al bordo u_0, cioè una funzione u che risolva:

$$\wp : \begin{cases} \triangle u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^2_+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \end{cases}$$

Poiché $\mathbb{R}^2_+$ non è limitato, sotto queste condizioni non possiamo avere l'unicità della soluzione, infatti

$$f_1(x, y) = y \quad \text{e} \quad f_2(x, y) = 0$$

sono soluzioni diverse del problema con stesso dato al bordo ($u_0 \equiv 0$).

Per avere l'unicità avremo bisogno di un'ulteriore condizione sul bordo di $\mathbb{R}^2_+$, cioè una "condizione all'infinito". Ad esempio, dato che cercheremo di ottenere la soluzione come immagine della trasformata di Fourier, una condizione sensata è chiedere che

$$|u(z)| \longrightarrow 0 \quad \text{per } |z| \to \infty \tag{2.4}$$

oppure, dato che siamo interessati ad una soluzione sul semipiano $\mathbb{R}^2_+$:

$$\Im(u(z)) > 0 \quad \text{per } |z| \to \infty$$

Consideriamo la trasformata inversa di Fourier di $\widehat{u_0}(s)$:

$$u_0(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u_0}(s) e^{2\pi i x s} ds$$

Vorrei estendere e^{ixs} in modo armonico su $\mathbb{C}$, ma tale estensione non è unica poiché posso estendere sia in modo olomorfo (e^{izs}) che antiolomorfo ($e^{i\bar{z}s}$). Richiedendo la (2.4) su $\mathbb{R}^2_+$ vediamo che

$$\left|e^{izs}\right| \overset{z=x+iy}{=} \left|e^{i(x+iy)s}\right| = \left|e^{ixs}e^{-ys}\right| = e^{-ys}$$

per $|z| \to \infty$ ho che $y \to \infty$ e $e^{-ys} \to 0$ su $\mathbb{R}^2_+$ per $s > 0$, mentre

$$\left|e^{i\bar{z}s}\right| \overset{\bar{z}=x-iy}{=} \left|e^{i(x-iy)s}\right| = \left|e^{-ixs}e^{ys}\right| = e^{ys}$$

per $|z| \to \infty$ ho che $y \to \infty$ e $e^{ys} \longrightarrow 0$ su $\mathbb{R}^2_+$ per $s < 0$.

Dunque estendo u_0 come

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{+\infty} \widehat{u_0}(s) e^{izs} ds + \int_{-\infty}^{0} \widehat{u_0}(s) e^{i\bar{z}s} ds\right]$$

cambio variabile nell'integrale a destra in modo da raccogliere tutto sotto un solo integrale:

$$\cdots = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \left[\widehat{u_0}(s) e^{izs} + \widehat{u_0}(-s) e^{-i\bar{z}s}\right] ds \tag{2.5}$$

sostituiamo a $\widehat{u_0}(s)$ la sua espressione, ottenendo:

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)e^{-ist}dt\right)e^{izs}ds + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)e^{ist}dt\right)e^{-i\bar{z}s}\right]ds \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\left(e^{is(z-t)} + e^{is(t-\bar{z})}\right)ds\right]dt \text{ , usando che } \overline{e^{is(z-t)}} = e^{is(t-\bar{z})}, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)\,\frac{1}{\pi}\,\Re\left(\int_0^{\infty} e^{is(z-t)}ds\right)dt \quad \text{svolgendo i conti con } z = x+iy, \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t)\,\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}}_{h(t,z)}\,dt
\end{aligned}$$

abbiamo ottenuto quindi il

Definizione 13 (Nucleo di Poisson per il semipiano)**.**

$$h_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Possiamo anche qui ottenere l'estensione armonica come convoluzione del dato al bordo e del nucleo $h_y(x)$:

$$u(z) = h_y(x) * u_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_y(x-t)u_0(t)dt$$

Per avere un'estensione *olomorfa* sul semipiano $\mathbb{R}^2_+$ occorre che il fattore $\widehat{u_0}(-s)$ che moltiplica la parte anti-olomorfa $e^{-i\bar{z}s}$ nella (2.5) si annulli. Quello che vogliamo quindi è che la trasformata di Fourier di u_0 abbia supporto contenuto nella semiretta $[0, +\infty)$. Supponiamo che u_0 sia in $L^2(\mathbb{R})$, in modo che lo spazio di partenza e di arrivo della trasformata sia lo stesso; allora stiamo cercando una risposta a

Domanda 7. Quali f in $L^2(\mathbb{R})$ hanno $(\operatorname{supp} \widehat{f})$ contenuto in $[0, +\infty)$?

Osservazione 6. La risposta a questa domanda ci dirà anche quali sono le funzioni di $L^2(\mathbb{R})$ che si estendono in maniera olomorfa su $\mathbb{R}^2_+$.

Iniziamo considerando una funzione $h \in L^2(0, \infty)$ e la "anti-trasformiamo". Infatti, come la sua trasformata $\widehat{h}$ anche la sua anti-trasformata

$$\check{h}(x) := \int_0^{\infty} h(s)e^{2\pi ixs}ds = \widehat{h}(-x)$$

vivrà in $L^2(0, \infty)$ e possiamo estenderla su tutto $\mathbb{R}$ ponendola a 0 fuori:

$$g(x) = (\mathbb{1}_{[0,\infty)}\check{h})(x) = \begin{cases} \check{h}(x) & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

in modo che $g(x)$ sia in $L^2(\mathbb{R})$.

In (2.6) dominio della variabile x è stato implicitamente "cambiato", allargandolo da $(0, \infty)$ a tutto $\mathbb{R}$.

Proviamo ora ad estendere ulteriormente il dominio della variabile x.
Data $\widehat{u}(t) \in L^2(0, \infty)$, considero:

$$F(z) = \int_0^{\infty} f(s)e^{2\pi zs}ds \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

Vogliamo sapere dove f è ben definita, continua, limitata, *olomorfa.*

Scrivo $z = x + iy$ e maggioro usando Cauchy-Schwartz[3]:

$$|F(z)| \leqslant \int_0^\infty |f(s)| \left|e^{2\pi zs}\right| ds \overset{\text{CS}}{\leqslant} \|f\|_2 \left\|e^{2\pi zs}\right\|_2 \tag{2.7}$$

Per applicare la maggiorazione stiamo considerando $\int_0^\infty (\cdot)\ (\cdot)\ ds$ come prodotto scalare su $L^2(0,\infty)$, vedendo quindi $f(s)$ e $e^{2\pi zs}$ come elementi di $L^2(0,\infty)$. Ora

- $f \in L^2(0,\infty)$ per ipotesi
- $e^{2\pi zs} \in L^2(0,\infty)$ se e solo se $\Im(z) = y > 0$

Infatti, facendo i conti:

$$\left|e^{2\pi zs}\right| = \left|e^{2\pi(x+iy)s}\right| = \left|e^{2\pi ixs}e^{-2\pi ys}\right| = e^{-2\pi ys}$$

per cui la norma L^2 risulta:

$$\left\|e^{2\pi zs}\right\|_2^2 = \int_0^\infty \left|e^{2\pi zs}\right|^2 ds = \left[\frac{e^{-4\pi ys}}{-4\pi y}\right]_0^\infty \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \frac{e^{-4\pi ys}}{-4\pi y} = 0 \qquad \text{per } y > 0$$

Abbiamo quindi che $|F(z)|$ si mantiene limitato in ogni semipiano

$$H_\delta^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) \geqslant \delta \text{ con } \delta > 0\}$$

$F(z)$ risulta continua su H_δ^+ poiché l'integrale

$$\int_0^n f(s)e^{2\pi zs} ds = f_n(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(z)$$

converge uniformemente (vedi [5]). Vediamo che $F(z)$ è anche *olomorfa* su ogni H_δ^+, per le condizioni di Cauchy-Riemann (2.1), infatti:

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x+iy) + i\frac{\partial}{\partial y}F(x+iy) = 0$$

Infine, $F(z) = F(x+iy)$ ha norma $L^2(\mathbb{R})$ finita[4] in ogni semipiano H_δ^+. Infatti, sempre per la (2.7), la quantità

$$\|F(x+iy)\|^2_{L^2_x(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2\, dx$$

si mantiene limitata fissato $y = \delta > 0$.

[3] intesa sullo spazio $L^2(0,\infty)$

[4] qui la norma $\|\cdot\|_2$ va intesa calcolata rispetto alla variabile x

Osservazione 7. $F(x+iy)$ ammette limite per $y \to 0$, cioè esiste il limite di $F(z)$ sul bordo di $\mathbb{R}^2_+$, ovvero $\mathbb{R}$. È ben definita la mappa:

$$y \mapsto \|F(x+iy)\|^2_{L^2_x} = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx \tag{2.8}$$

Riassumendo, la nostra estensione $F(z)$ è olomorfa nel semipiano aperto $\mathbb{R}^2_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ ed è continua al bordo, cioè su $\mathbb{R}$; inoltre F ha norma L^2 finita su ogni retta $\{y = k\}$, cioè sta in $L^2_x(\mathbb{R})$ per ogni y fissato. Dunque $F(z)$ sta in $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+) \cap L^2_x(\mathbb{R})$.
Come nel caso del disco, diamo un nome a questo spazio:

Definizione 14 (Spazio di Hardy su $\mathbb{R}^2_+$)**.** Lo spazio

$$H^2(\mathbb{R}^2_+) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2_+) : \sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx < \infty \right\} = H^{2+}$$

è uno spazio vettoriale.

La norma naturale che mettiamo su questo spazio è il sup della radice quadrata della mappa (2.8), cioè il $\sup_{y>0} \|F(x+iy)\|_{L^2_x}$. Questa è effettivamente una norma su $H^{2+}(\mathbb{R}^2_+)$, che indicheremo con:

$$\|F(x+iy)\|_{H^{2+}} := \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x+iy)|^2 \, dx \right)^{1/2} \tag{2.9}$$

che rende H^{2+} uno spazio di Banach. Poiché $F(z)$ è olomorfa, per il Principio del massimo modulo, F assumerà massimo sul bordo di $\mathbb{R}^2_+$, ovvero su $\mathbb{R}$. Cioè avremo che:

$$\|F(z)\|_{H^{2+}} = \|F(x+iy)\|_{L^2_x(\mathbb{R})}$$

questo ci suggerisce che la traccia al bordo di una funzione in $H^2(\mathbb{R}^2_+)$ sarà una funzione in $L^2(\mathbb{R})$.

Per chiarire questa intuizione vediamo un risultato analogo al Teorema di Fatou sul disco, che coinvolgerà stavolta la trasformata di Fourier.

2.4 Il Teorema di Paley-Wiener

Da ora assumeremo, seguendo Stein [5], che f e $\widehat{f}$ siano moderatamente decrescenti, ovvero che esistano A e A' positivi tali che per ogni $x, \xi \in \mathbb{R}$ sia

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{e} \qquad \left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \frac{A'}{1+\xi^2} \tag{2.10}$$

sotto questa ipotesi è valida la formula di inversione

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \quad \text{dove} \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

Enunciamo un risultato preliminare, che ci permette di adattare il principio del massimo modulo anche a regioni illimitate del piano.

Teorema 11 (Phragmén-Lindelöf)**.** Sia F una funzione olomorfa nel settore del piano complesso

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4} \right\}$$

che sia continua sulla chiusura di S. Se

- $|F(z)| \leqslant 1$ sul bordo del settore
- esistono C, c positive tali che $|F(z)| \leqslant Ce^{c|z|}$ per ogni $z \in S$

allora

$$|F(z)| \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } z \in S$$

Per una dimostrazione del teorema vedere [5, p. 124]

Siamo pronti per dimostrare il seguente teorema che descrive il comportamento delle funzioni la cui trasformata di Fourier è a supporto compatto.

Teorema 12 (Paley-Wiener)**.** Sia f una funzione continua e moderatamente decrescente su $\mathbb{R}$. Allora, f si estende a una funzione intera[5] tale che

$$|f(z)| \leqslant Ae^{2\pi M|z|} \tag{2.11}$$

per qualche $A > 0$, se e solo se $\widehat{f}$ ha supporto contenuto in $[-M, M]$.

Dimostrazione. Iniziamo supponendo che $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-M, M]$ per qualche $M > 0$. Poiché sia f che $\widehat{f}$ sono moderatamente decrescenti vale la formula di inversione

$$f(x) = \int_{-M}^{M} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi$$

poiché l'integrale è su un intervallo limitato, posso estendere x sul piano complesso definendo una funzione su $\mathbb{C}$:

$$g(z) = \int_{-M}^{M} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi$$

[5] una funzione intera è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$

allora $g(z) = f(z)$ su $\mathbb{R}$ e abbiamo già visto che g è olomorfa, inoltre abbiamo

$$|g(z)| \leqslant \int_{-M}^{M} \left|\widehat{f}(\xi)\right| \left|e^{2\pi i\xi z}\right| d\xi \leqslant \int_{-M}^{M} \left|\widehat{f}(\xi)\right| e^{-2\pi\xi y} d\xi \leqslant Ae^{2\pi M|z|}$$

Per la freccia inversa assumeremo prima delle condizioni su f che rimuoveremo nel seguito.

Passo 1 Iniziamo supponendo che

$$|f(x+iy)| \leqslant A' \frac{e^{2\pi M|y|}}{1+x^2} \tag{2.12}$$

e proviamo che $\widehat{f}$ è a supporto compatto. Riscriviamo $\widehat{f}$ shiftando la variabile (vedi [5, p. 114-115])

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-iy) e^{-2\pi i\xi(x-iy)} dx$$

allora in modulo

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, e^{-2\pi\xi y} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A' e^{2\pi M y}}{1+x^2}\right) e^{-2\pi\xi y} dx \leqslant \dots$$

adesso possiamo raccogliere e portare fuori il numeratore che non dipende da x ottenendo

$$\dots \leqslant A' e^{-2\pi y(-M+\xi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx}_{=\pi} = (\pi A')\, e^{-2\pi y(\xi - M)} \xrightarrow[\text{per } \xi > M]{y\to\infty} 0$$

In modo analogo shiftando per $y > 0$ si vede che $\widehat{f}(\xi) = 0$ per $\xi < -M$.

Passo 2 Rilassiamo adesso la condizione (2.12) supponendo

$$|f(x+iy)| \leqslant Ae^{2\pi M|y|} \tag{2.13}$$

Assumiamo che $\xi > M$ e consideriamo, per $\epsilon > 0$, la funzione

$$f_\epsilon(z) = \frac{f(z)}{(1+i\epsilon z)^2}$$

notiamo che

- $\left|\frac{1}{(1+i\epsilon z)^2}\right| \leqslant 1$ sul semipiano chiuso $\mathbb{R}^2_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leqslant 0\}$
- $\frac{1}{(1+i\epsilon z)^2} \longrightarrow 1$ per $\epsilon \to 0$

vediamo che $\widehat{f}_\epsilon(\xi) \to \widehat{f}(\xi)$ per $\epsilon \to 0$, infatti:

$$\left|\widehat{f}_\epsilon(\xi) - \widehat{f}(\xi)\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{f(x)}{(1+i\epsilon z)^2} - f(x)\right| \left|e^{2\pi i \xi x}\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \underbrace{\left[\frac{1}{(1+i\epsilon z)^2} - 1\right]}_{\text{tende a 0 per } \epsilon \to 0} dx \to 0$$

poiché $|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Per ogni ϵ fissato

$$|f_\epsilon(x+iy)| = \left|\frac{f(x+iy)}{(1+i\epsilon z)^2}\right| \leqslant \frac{|f(x+iy)|}{|1+i\epsilon z|^2} \leqslant \frac{Ae^{2\pi M|y|}}{(1+x^2)}$$

allora dal Passo 1 abbiamo che $\widehat{f}_\epsilon(\xi) = 0$ da cui $\widehat{f}(\xi) = 0$ per $\epsilon \to 0$.

Passo 3 Non ci resta che vedere che le ipotesi effettivamente implicano (2.13) per concludere. Per mostrare l'implicazione usiamo il Teorema di Phragmén-Lindelöf, che mostra che data $|f(x)| \leqslant 1$ e $|f(z)| \leqslant e^{2\pi M|z|}$ allora si ha che $|f(z)| \leqslant e^{2\pi M|y|}$, infatti possiamo ruotare il settore dell'enunciato nel primo quadrante e considerare

$$F(z) = f(z)e^{2\pi i M z}$$

per l'ipotesi (2.11) lungo $\mathbb{R}$ abbiamo che

$$|F(x)| = \left|f(x)e^{2\pi i M x}\right| = |f(x)| \underbrace{\left|e^{2\pi i M x}\right|}_{=1} \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

quindi, a meno di dividere f per una costante A, abbiamo che $|F(x)| \leqslant 1$ su $\mathbb{R}$, mentre lungo l'asse immaginario positivo

$$|F(iy)| = \left|f(iy)e^{2\pi i M(iy)}\right| = |f(iy)|\, e^{-2\pi M y} \underset{\text{per ipotesi}}{\leqslant} \left(Ae^{2\pi M|z|}\right) e^{-2\pi M y}$$

raccogliamo e, poiché siamo lungo $\{x = 0\}$, si ha

$$Ae^{2\pi M(|z|-y)} = Ae^{2\pi M \overbrace{(|y| - y)}^{y>0}} = A$$

dunque di nuovo, a meno di dividere f per A, abbiamo che $|F(z)| \leqslant 1$ su $\{\Re(z) = 0\}$. Quindi $|F(z)| \leqslant 1$ lungo i bordi del primo quadrante e

$$|F(z)| = \left|f(z)e^{2\pi i M z}\right| \leqslant Ae^{2\pi M(|z|-y)}$$

essendo nel primo quadrante $|z| - y \leqslant |z|$, chiamiamo $A = C$ e $c = 2\pi M$, allora per Phragmén-Lindelöf abbiamo

$$|F(z)| \leqslant Ce^{c|z|} \Rightarrow |F(z)| \leqslant 1 \qquad \text{per ogni } z \in \{z : \Re(z) \geqslant 0 \text{ e } \Im(z) \geqslant 0\}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \left| f(z)e^{2\pi iMz} \right| &\leqslant 1 \qquad \text{nel primo quadrante} \\ = |f(z)|\, e^{-2\pi My} &\leqslant 1 \Rightarrow |f(z)| \leqslant e^{2\pi My} \end{aligned}$$

Procedendo in modo analogo per gli altri quadranti si ha che è soddisfatta la (2.13) e quindi la tesi. □

Concludiamo con una versione di Paley-Wiener che caratterizza le funzioni la cui trasformata di Fourier è nulla per $\xi < 0$.

Teorema 13. Siano f e $\widehat{f}$ moderatamente decrescenti come in (2.10). Allora f può essere estesa a una funzione continua e limitata sul semipiano superiore chiuso $\overline{\mathbb{R}^2_+} = \{z = x + iy : y \geqslant 0\}$ e olomorfa all'interno *se e solo se* $\widehat{f}(\xi) = 0$ per ogni $\xi < 0$.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [0, +\infty)$ allora

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi = \int_{0}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi x}d\xi$$

possiamo estendere f sul semipiano superiore $\mathbb{R}^2_+$ a una funzione limitata:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^\infty \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi z}d\xi \\ |f(z)| &\leqslant \int_0^\infty \left|\widehat{f}(\xi)\right| e^{-2\pi\xi y}d\xi \leqslant A\int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}d\xi = A\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Per la convergenza uniforme di

$$f_n(z) = \int_0^n \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi z}d\xi \xrightarrow{n\to\infty} f(z) \qquad \text{su } \overline{\mathbb{R}^2_+}$$

abbiamo che f è continua su $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ e olomorfa al suo interno.

Per l'implicazione inversa consideriamo, come nel teorema precedente, la funzione

$$f_{\epsilon,\delta}(z) = \frac{f(z+i\delta)}{(1-i\epsilon z)^2}$$

questa è olomorfa su $\mathbb{R}^2_+$ e possiamo vedere che $\widehat{f}_{\epsilon,\delta}(\xi) = 0$ per tutti gli $\xi < 0$. Allora, passando al limite abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\widehat{f}_{\epsilon,\delta}(\xi) \xrightarrow{\delta\to 0} \widehat{f}_{\epsilon,0}(\xi) = 0 \\
&\widehat{f}_{\epsilon,0}(\xi) \xrightarrow{\epsilon\to 0} \widehat{f}_{0,0}(\xi) = \widehat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{per ogni } \xi < 0
\end{aligned}$$

□

Capitolo 3

Teoria dei Numeri

La Teoria dei Numeri è la branca della Matematica che si occupa della risoluzione di equazioni in numeri interi. I matematici lavorano a problemi di questo tipo fin dall'antichità, e ancora oggi risultati di questa teoria trovano utilizzo in crittografia, oltre che in determinate specie di problemi[1]. Il fascino di questa teoria risiede forse nel fatto che problemi apparentemente semplici, per essere risolti, richiedono l'utilizzo di strumenti da tutti i settori della matematica.

Qui mostriamo un'analogia tra il comportamento della serie armonica all'infinito e quello della $\zeta(s)$ di Riemann nel polo semplice $s = 1$.

3.1 Costante di Eulero-Mascheroni

Consideriamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

questa serie è divergente, vedremo però che la successione delle sue somme parziali ha un andamento logaritmico.

Iniziamo notando che per ogni x in $\mathbb{R}$ si ha $\log(x) \leqslant x - 1$. Prendendo $1 - x = \frac{1}{n+1}$, cioè $x = \frac{n}{n+1}$ abbiamo che

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

[1]Ad esempio, se le variabili del nostro problema rappresentassero persone, non siamo interessati a soluzioni del tipo: "$\sqrt{2}$ persone"

in modo analogo per $1 + x = {}^1\!/\!_n$ abbiamo che

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

Indichiamo la successione delle somme parziali della serie armonica con:

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n},$$

e consideriamo la successione

$$a_n = s_m - \log n$$

tale successione è decrescente, infatti:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (s_{m+1} - \log(n+1)) - (s_m - \log n) \\ &= (s_{m+1} - s_m) + \log n - \log(n+1) \\ &= \frac{1}{n+1} + \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 0 \end{aligned}$$

mentre la successione

$$b_n = s_{m-1} - \log n \qquad \text{per } n > 1$$

è crescente, poiché:

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (s_m - \log(n+1)) - (s_{m-1} - \log n) \\ &= (s_m - s_{m-1}) + \log n - \log(n+1) \\ &= \frac{1}{n} \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n} - \log\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0 \end{aligned}$$

Notiamo anche che $a_1 = s_1 - \log(1) = 1$, ed essendo decrescente, si ha che $a_n \leqslant 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; mentre $b_2 = s_1 - \log(2) = 1 - \log(2) = \log(e) - \log(2) = \log({}^e\!/\!_2) > 0$, essendo crescente si ha che $b_n \geqslant \log({}^e\!/\!_2)$ per ogni $n > 1$.

Abbiamo pertanto la seguente uguaglianza:

$$a_n = b_n + \frac{1}{n}$$

pertanto dovremo avere che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \gamma$$

con γ che sarà compreso tra $\log\left({}^{e}\!/\!{}_{2}\right) \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Definizione 15. Il numero γ è la *costante di Eulero-Mascheroni* ed è definito come

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) =: \gamma$$

La media aritmetica tra le successioni a_n e b_n converge a γ per $n \to \infty$

$$\frac{a_n + b_n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \gamma$$

3.2 Funzione di Möbius

La funzione di Möbius è una funzione su $\mathbb{N}$ così definita:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^r & \text{se } n \text{ è prodotto di } r \text{ primi differenti} \\ 0 & \text{se } n \text{ ha almeno un fattore primo multiplo} \end{cases}$$

Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}. \tag{3.1}$$

Domanda 8. La serie (3.1) è convergente?

Ci domandiamo prima se sia sommabile con qualche metodo. Un metodo di sommabilità spesso usato nella teoria dei numeri è il metodo di Lambert.

Lambert sommabilità

Questo metodo è sostanzialmente una variante della sommabilità secondo Abel. Qui si usa, invece della normale serie di potenze, la funzione

$$L(x) = \frac{x}{1-x}\log\left(\frac{1}{x}\right).$$

Con qualche sostituzione si vede che $L(1) = \lim_{x\to 1} L(x) = 1$. Diamo il nuovo metodo di sommabilità:

Definizione 16 (Lambert sommabilità)**.** Una serie $\sum a_k$ è *Lambert sommabile* se la serie $\sum a_k L(x^k)$ converge per $0 < x < 1$ e se, detta $g(x) = \sum a_k L(x^k)$, esiste finito il

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = \ell.$$

Tale limite è detto *somma di Lambert* della serie.

Il metodo di Lambert è un metodo regolare, ovvero

Fatto 4. Ogni serie convergente è Lambert sommabile, inoltre la somma di Lambert risulta uguale al limite della serie:

$$\lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{m \to \infty} \sum_{n=0}^{m} a_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to 1} g(x) = \ell.$$

La convergenza della serie (3.1) è un risultato tauberiano, infatti è possibile dimostrare che

Proposizione 14.

$$\text{La serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \text{ è Lambert sommabile a 0.}$$

Per la dimostrazione si rimanda a [3, p. 8-9], qui riportiamo una espressione usata nella dimostrazione, che lega la funzione di Möbius e la funzione Zeta di Riemann:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primi}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

3.3 Zeta di Riemann

Definita per ogni s complesso, con $\Re(s) > 1$, questa funzione ha avuto un ruolo importante nello sviluppo della Teoria Tauberiana.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$\zeta(s)$ è analitica in $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$, mentre ha un polo in $s = 1$, poiché la serie armonica diverge.

Mostriamo che, come per la serie armonica, il limite della differenza tra la $\zeta(s)$ e una funzione meromorfa con un polo semplice in 1 tende a un valore finito: γ.

Teorema 15. La funzione

$$F(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} \qquad \text{per } \Re(s) > 1$$

può essere estesa analiticamente sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$ e inoltre vale:

$$F(1) = \lim_{s \to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = \gamma \quad \text{costante di Eulero-Mascheroni}$$

Dimostrazione. Scriviamo la $\zeta(s)$ in forma integrale:

$$\begin{aligned} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{v^s} d[v] \\ &= s \int_1^{\infty} [v] v^{-s-1} dv. \end{aligned}$$

Usando l'uguaglianza

$$\int_1^{\infty} v v^{-s-1} dv = \frac{1}{s-1}$$

e che $\frac{1}{s-1} = \frac{s}{s-1} - 1$, riscriviamo $F(s)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \zeta(s) - \left(\frac{s}{s-1} - 1 \right) = \\ &= s \int_1^{\infty} [v] v^{-s-1} dv - s \int_1^{\infty} v v^{-s-1} dv + 1 = \\ &= 1 + s \int_1^{\infty} ([v] - v) v^{-s-1} dv. \end{aligned}$$

Poiché $[v] - v$ è limitata, questa formula ci dà un'estensione analitica di

$F(s)$ sul semipiano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 0\}$. Allora $F(1)$ è uguale a

$$\begin{aligned}
F(1) &= 1 + \int_1^{\infty} ([v] - v)v^{-2}dv = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} ([v] - v)v^{-2}dv = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\int_1^{n} [v]v^{-2}dv - \int_1^{n} v^{-1}dv \right) = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} kv^{-2}dv - \log n \right) = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\frac{1}{k(k+1)} - \log n \right) = \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \left[\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \right) - \log n \right] = \gamma
\end{aligned}$$

□

Bibliografia

[1] Emilio Acerbi and Giuseppe Buttazzo. *Primo corso di Analisi matematica*. Pitagora, 1997. appendice 9.8.

[2] Haim Brezis, Haim Brézis, and Haïm Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011. cap 4, Prop 4.18 e Remark 10.

[3] Jacob Korevaar. *Tauberian theory: a century of developments*, volume 329. Springer, 2004.

[4] Shiu-Tang Li. A brief introduction to lebesgue-stieltjes integral, November 2013.

[5] Elias M Stein and Rami Shakarchi. Complex analysis. princeton lectures in analysis, ii, 2003.

[6] Wikipedia. Approximation de l'unité, 2014.

[7] Wikipedia. Divergent series, 2014.

Spalle di giganti

Se sono arrivato qui, è merito di persone speciali a cui vorrei dire *Grazie*:

Vladimir Georgiev, più che un relatore: non dimenticherò la sua contagiosa disponibilità;

I miei genitori, che forse non se lo aspettavano;

Alessandro, per le corse insieme quando perdevo la strada;

Leo, da cui ho imparato che il più grande ostacolo da superare è se stessi;

Giorgio, a cui devo almeno un caffè e molte risposte;

Betta e Francesca, che mi hanno sopportato come compagno di studio,

Stefania, che mi ha insegnato come fare per non perdermi tra i `label`;

Oscar, il mio riferimento vivente di LaTeX, dopo Knuth;

I macchinisti, perché molto di quello che so davvero l'ho imparato PHC;

gli Amici della strada, perché mi fanno stare bene, incredibilmente sempre;

Fede, perché ogni cosa bella ha una causa fisica.