Il teorema di periodicità di Bott complesso

Enrico Berni

Università di Pisa

20 settembre 2023

Sommario

Introduzione

L'idea alla base della K-teoria è quella di dare una struttura di gruppo alla collezione dei fibrati complessi su una stessa base X. Nel corso del seminario, svilupperemo due modi leggermente diversi di farlo; la K-teoria topologica e la K-teoria topologica ridotta, legati dalla stessa relazione che lega omologia e omologia ridotta.
La K-teoria è uno strumento potente, ed il suo calcolo non è immediato; il calcolo di $\widetilde{K}(S^n)$ è il teorema di periodicità di Bott, oggetto della seconda parte del seminario.

Come accennato nell'introduzione, nel corso del seminario useremo una versione più debole della definizione di fibrato:

K-teoria - Richiami sui fibrati vettoriali

Come accennato nell'introduzione, nel corso del seminario useremo una versione più debole della definizione di fibrato:

Definizione

Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff; un fibrato vettoriale con base X è il dato di:

1. Una mappa $p : E \to X$
2. Una struttura di spazio vettoriale complesso su ogni fibra $p^{-1}(x)$
3. Per ogni componente connessa X^j di X, un ricoprimento di aperti $\{U^j_\alpha\}$, per ognuno dei quali esista un omeomorfismo

$$\varphi^j_\alpha : p^{-1}(U^j_\alpha) \to \{x\} \times \mathbb{C}^{n_j}$$

per ogni $x \in U^j_\alpha$.

Definizione

Siano E_1 ed E_2 due fibrati sulla stessa base. Definiamo la loro somma diretta come

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 | p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$$

K-teoria - Richiami sui fibrati vettoriali

Definizione

Siano E_1 ed E_2 due fibrati sulla stessa base. Definiamo la loro somma diretta come

$$E_1 \oplus E_2 = \{(v_1, v_2) \in E_1 \times E_2 | p_1(v_1) = p_2(v_2)\}$$

Proposizione 1

Dato un fibrato vettoriale "classico" $E \to X$, esiste un fibrato vettoriale $E' \to X$ tale che $E \oplus E'$ sia isomorfo al fibrato banale.

Ci limitiamo a osservare che l'ipotesi di compattezza è fondamentale, dato che nella dimostrazione si costruisce la trivializzazione globale a partire da (finite) trivializzazioni locali.

Definizione

Dati due fibrati E_1 ed E_2 sulla stessa base, definiamo il loro prodotto tensore come l'unione disgiunta di $p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$, topologizzata con la topologia più fine che rende omeomorfismi le mappe $\varphi_1^{\alpha} \otimes \varphi_2^{\alpha}$.

Definizione

Dati due fibrati E_1 ed E_2 sulla stessa base, definiamo il loro prodotto tensore come l'unione disgiunta di $p_1^{-1}(x) \otimes p_2^{-1}(x)$, topologizzata con la topologia più fine che rende omeomorfismi le mappe $\varphi_1^\alpha \otimes \varphi_2^\alpha$.

Denotiamo con H il line bundle canonico su $\mathbb{CP}^1 = S^2$, e con 1 il line bundle banale.

Proposizione 2

Vale la relazione $(H \otimes H) \oplus 1 \cong H \oplus H$.

Definizione

Sia ε^n il fibrato banale di rango n su X. Due fibrati vettoriali E_1 ed E_2 su X sono stabilmente isomorfi, $E_1 \approx_s E_2$, se $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^n$ per un certo n.

Definizione

Sia ε^n il fibrato banale di rango n su X. Due fibrati vettoriali E_1 ed E_2 su X sono stabilmente isomorfi, $E_1 \approx_s E_2$, se $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^n$ per un certo n.
Similmente, definiamo la relazione $\sim$ come $E_1 \sim E_2$ se $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^m$ per certi n ed m.

K-teoria - Struttura

Definizione

Sia ε^n il fibrato banale di rango n su X. Due fibrati vettoriali E_1 ed E_2 su X sono stabilmente isomorfi, $E_1 \approx_s E_2$, se $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^n$ per un certo n.
Similmente, definiamo la relazione $\sim$ come $E_1 \sim E_2$ se $E_1 \oplus \varepsilon^n \cong E_2 \oplus \varepsilon^m$ per certi n ed m.

È facile vedere che entrambe queste relazioni sono relazioni di equivalenza. Sulle classi di entrambi i tipi è ben definita l'operazione di somma diretta, commutativa ed associativa. L'elemento neutro è la classe di ε^0.

K-teoria - Struttura

Teorema 1

Se X è compatto e T2, l'insieme delle classi di $\sim$-equivalenza, insieme con l'operazione di somma diretta, forma un gruppo. Tale gruppo si chiama K-teoria topologica ridotta di X.

K-teoria - Struttura

Teorema 1

Se X è compatto e T2, l'insieme delle classi di $\sim$-equivalenza, insieme con l'operazione di somma diretta, forma un gruppo. Tale gruppo si chiama K-teoria topologica ridotta di X.

Dimostrazione.

È da dimostrare soltanto l'esistenza degli inversi; preso un fibrato $E \to X$, mostriamo che esiste un altro fibrato E' tale che $E \oplus E' \cong \varepsilon^n$ per un certo n.

Se le fibre di E hanno tutte la stessa dimensione, ci riconduciamo alla Proposizione 1.

K-teoria - Struttura

Teorema 1

Se X è compatto e T2, l'insieme delle classi di $\sim$-equivalenza, insieme con l'operazione di somma diretta, forma un gruppo. Tale gruppo si chiama K-teoria topologica ridotta di X.

Dimostrazione.

È da dimostrare soltanto l'esistenza degli inversi; preso un fibrato $E \to X$, mostriamo che esiste un altro fibrato E' tale che $E \oplus E' \cong \varepsilon^n$ per un certo n.

Se le fibre di E hanno tutte la stessa dimensione, ci riconduciamo alla Proposizione 1.

Nel caso generale, sia $X_i = \{x \in X |\dim \pi^{-1}(x) = i\}$. Gli X_i sono aperti disgiunti, e dunque finiti per compattezza. Sommando ad E un fibrato che sui diversi X_i è banale di dimensione opportuna, abbiamo costruito un fibrato con cui ricondursi al caso precedente. $\square$

K-teoria - Struttura

Osserviamo che una costruzione del genere non è replicabile in $Vect_s(X)$, dato che l'unico elemento invertibile è la classe di ε^0;

Osserviamo che una costruzione del genere non è replicabile in $Vect_s(X)$, dato che l'unico elemento invertibile è la classe di ε^0; infatti,

$$E \oplus E' \approx_s \varepsilon^0$$

$$E \oplus E' \oplus \varepsilon^n \cong \varepsilon^n$$

per un certo n, il che è possibile soltanto se sia E che E' hanno dimensione nulla.

Osserviamo che una costruzione del genere non è replicabile in $Vect_s(X)$, dato che l'unico elemento invertibile è la classe di ε^0; infatti,

$$E \oplus E' \approx_s \varepsilon^0$$

$$E \oplus E' \oplus \varepsilon^n \cong \varepsilon^n$$

per un certo n, il che è possibile soltanto se sia E che E' hanno dimensione nulla.
Tuttavia, la compattezza della base ci garantisce una proprietà di cancellazione a sinistra, dato che $E_1 \oplus E_2 \approx_s E_1 \oplus E_3$ implica $E_2 \approx_s E_3$, dal momento che possiamo sommare a sinistra un fibrato trivializzante per la Proposizione 1.

K-teoria - Struttura

Abbiamo dunque un monoide, che completiamo a gruppo considerando le differenze formali di fibrati $E - E'$, su cui mettiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$E_1 - E_1' \approx E_2 - E_2' \quad \text{se e solo se } E_1 \oplus E_2' \approx_s E_1' \oplus E_2$$

K-teoria - Struttura

Abbiamo dunque un monoide, che completiamo a gruppo considerando le differenze formali di fibrati $E - E'$, su cui mettiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$E_1 - E_1' \approx E_2 - E_2' \quad \text{se e solo se } E_1 \oplus E_2' \approx_s E_1' \oplus E_2$$

Da questa costruzione seguono varie proprietà, tra cui:

- $[E - E] = [E' - E']$ per ogni E, E'; questa classe è l'elemento neutro.
- L'inverso di $E - E'$ è $E' - E$.
- Possiamo rappresentare un elemento di $Vect_s(X)$ come differenza del tipo $E - \varepsilon^n$.

Chiamiamo K-teoria topologica il completamento a gruppo di $Vect_s(X)$.

Relativamente a quest'ultima proprietà, osserviamo che c'è un omomorfismo naturale da $K(X)$ in $\widetilde{K}(X)$ che manda un elemento $E - \varepsilon^n$ nella sua classe di $\sim$-equivalenza.
Questa mappa è ben definita, dato che se $E - \varepsilon^n = E' - \varepsilon^m$, allora $E \oplus \varepsilon^m \cong E' \oplus \varepsilon^n$, da cui $E \sim E'$. È banalmente suriettiva, e il nucleo è formato dagli elementi della forma $E - \varepsilon^n$ con $E \sim \varepsilon^0$, cioè dal sottogruppo $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n\} \subseteq K(X)$, isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Relativamente a quest'ultima proprietà, osserviamo che c'è un omomorfismo naturale da $K(X)$ in $\widetilde{K}(X)$ che manda un elemento $E - \varepsilon^n$ nella sua classe di $\sim$-equivalenza.
Questa mappa è ben definita, dato che se $E - \varepsilon^n = E' - \varepsilon^m$, allora $E \oplus \varepsilon^m \cong E' \oplus \varepsilon^n$, da cui $E \sim E'$. È banalmente suriettiva, e il nucleo è formato dagli elementi della forma $E - \varepsilon^n$ con $E \sim \varepsilon^0$, cioè dal sottogruppo $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n\} \subseteq K(X)$, isomorfo a $\mathbb{Z}$.
Possiamo anche vederlo come segue: la restrizione di fibrati a un punto prescelto definisce una mappa $K(X) \to K(x_0) = \mathbb{Z}$, che si restringe ad un isomorfismo sul sottogruppo $\{\varepsilon^m - \varepsilon^n\}$. Abbiamo dunque uno spezzamento $K(X) = \widetilde{K}(X) \oplus \mathbb{Z}$, dipendente dalla scelta del punto base.

K-teoria - Struttura

Continuando sulla scia di analogie tra la K-teoria e le teorie coomologiche precedentemente note, definiamo su $K(X)$ un prodotto che lo doti di una struttura di anello.

K-teoria - Struttura

Continuando sulla scia di analogie tra la K-teoria e le teorie coomologiche precedentemente note, definiamo su $K(X)$ un prodotto che lo doti di una struttura di anello.
Partendo dal prodotto tensore di fibrati, consideriamo due elementi di $K(X)$ rappresentati rispettivamente da E_1 ed E_2. Il loro prodotto sarà la classe rappresentata da $E_1 \otimes E_2$; per elementi generici rappresentati da differenze $E_1 - E_1'$ ed $E_2 - E_2'$, definiamo il loro prodotto con la formula

$$(E_1 - E_1')(E_2 - E_2') = E_1 \otimes E_2 - E_1 \otimes E_2' - E_1' \otimes E_2 + E_1' \otimes E_2'$$

K-teoria - Struttura

Da semplici verifiche segue che:

- Il prodotto è ben definito;
- L'elemento neutro è il line bundle banale ε^1;
- $E \otimes \varepsilon^n = E \oplus ... \oplus E$.

K-teoria - Struttura

Da semplici verifiche segue che:

- Il prodotto è ben definito;
- L'elemento neutro è il line bundle banale ε^1;
- $E \otimes \varepsilon^n = E \oplus ... \oplus E$.

Scelto un punto base x_0, la mappa di restrizione vista in precedenza diventa un omomorfismo di anelli con la nuova struttura. Il nucleo continua ad essere $\widetilde{K}(X)$, che è dunque un ideale proprio, cioè un sottoanello senza unità.

K-teoria - Funtorialità

Gli anelli $K(X)$ e $\widetilde{K}(X)$ sono funtori di X; una mappa $f : X \to Y$ induce per pullback una mappa

$$f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

$$E - E' \longmapsto f^*(E) - f^*(E')$$

Dato che il pullback commuta con somma diretta e prodotto tensore, f^* è un omomorfismo di anelli, e le proprietà funtoriali

K-teoria - Funtorialità

Gli anelli $K(X)$ e $\widetilde{K}(X)$ sono funtori di X; una mappa $f : X \to Y$ induce per pullback una mappa

$$f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

$$E - E' \longmapsto f^*(E) - f^*(E')$$

Dato che il pullback commuta con somma diretta e prodotto tensore, f^* è un omomorfismo di anelli, e le proprietà funtoriali

- $(fg)^* = g^* f^*$;
- $1_X^* = 1_{K(X)}$;
- Se f e g sono mappe omotope, $f^* = g^*$

seguono dalle analoghe proprietà del pullback di fibrati.

K-teoria - Funtorialità

Gli anelli $K(X)$ e $\widetilde{K}(X)$ sono funtori di X; una mappa $f : X \to Y$ induce per pullback una mappa

$$f^* : K(Y) \longrightarrow K(X)$$

$$E - E' \longmapsto f^*(E) - f^*(E')$$

Dato che il pullback commuta con somma diretta e prodotto tensore, f^* è un omomorfismo di anelli, e le proprietà funtoriali

- $(fg)^* = g^* f^*$;
- $1_X^* = 1_{K(X)}$;
- Se f e g sono mappe omotope, $f^* = g^*$

seguono dalle analoghe proprietà del pullback di fibrati.
Proprietà analoghe valgono per $\tilde{f} : \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X)$, con l'accortezza di dover lavorare nella categoria degli spazi topologici puntati, visto che la nostra costruzione del prodotto in $\widetilde{K}(X)$ richiederà dei punti base.

Possiamo definire un prodotto esterno $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ ponendo

$$a * b := \mu(a \otimes b) = p_X^*(a) p_Y^*(b)$$

dove p_X e p_Y sono le proiezioni sui singoli fattori. Questo è un omomorfismo di anelli,

K-teoria - Funtorialità

Possiamo definire un prodotto esterno $\mu : K(X) \otimes K(Y) \to K(X \times Y)$ ponendo

$$a * b := \mu(a \otimes b) = p_X^*(a) p_Y^*(b)$$

dove p_X e p_Y sono le proiezioni sui singoli fattori. Questo è un omomorfismo di anelli, dato che

$$\mu((a \otimes b)(c \otimes d)) = \mu(ac \otimes bd) = p_X^*(ac) p_Y^*(bd) =$$

$$= p_X^*(a) p_X^*(c) p_Y^*(b) p_Y^*(d) = \mu(a \otimes b) \mu(c \otimes d)$$

K-teoria - Funtorialità

Fissando $Y = S^2$, abbiamo un prodotto esterno

$$\mu : K(X) \otimes K(S^2) \longrightarrow K(X \times S^2)$$

Il punto nevralgico della dimostrazione della periodicità di Bott è il seguente

K-teoria - Funtorialità

Fissando $Y = S^2$, abbiamo un prodotto esterno

$$\mu : K(X) \otimes K(S^2) \longrightarrow K(X \times S^2)$$

Il punto nevralgico della dimostrazione della periodicità di Bott è il seguente

Teorema 2 (del prodotto fondamentale)

Il prodotto esterno $\mu : K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$ è un isomorfismo di anelli per ogni spazio topologico X.

Fissando $Y = S^2$, abbiamo un prodotto esterno

$$\mu : K(X) \otimes K(S^2) \longrightarrow K(X \times S^2)$$

Il punto nevralgico della dimostrazione della periodicità di Bott è il seguente

Teorema 2 (del prodotto fondamentale)

Il prodotto esterno $\mu : K(X) \otimes K(S^2) \to K(X \times S^2)$ è un isomorfismo di anelli per ogni spazio topologico X.

Corollario 2.1

La mappa $\mathbb{Z}[H]/(H-1)^2 \to K(S^2)$ è un isomorfismo di anelli.

Periodicità di Bott - TPF

La classificazione dei fibrati sulle sfere ci dice che i fibrati vettoriali di rango n su S^2 corrispondono esattamente alle classi di omotopia di mappe

$$S^1 \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$$

che si chiamano clutching function. Per mostrare il Teorema 2 si generalizza questa costruzione, per creare fibrati su un generico prodotto $X \times S^2$ incollando due fibrati su $X \times D^2$ usando una clutching function "generalizzata". Successivamente, si scarica progressivamente il problema da clutching function generali a clutching function più semplici.

Periodicità di Bott - TPF

Sia $p : E \to X$ un fibrato vettoriale, e sia $f : E \times S^1 \to E \times S^1$ un automorfismo del fibrato prodotto $p \times 1_{S^1} : E \times S^1 \to X \times S^1$. Preso un punto $(x, z) \in X \times S^1$, la f ci dà un automorfismo della fibra $f(x, z) : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$.

Sia $p : E \to X$ un fibrato vettoriale, e sia $f : E \times S^1 \to E \times S^1$ un automorfismo del fibrato prodotto $p \times 1_{S^1} : E \times S^1 \to X \times S^1$. Preso un punto $(x, z) \in X \times S^1$, la f ci dà un automorfismo della fibra $f(x, z) : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$.
Con E ed f costruiamo un fibrato su $X \times S^2$ prendendo due copie di $E \times D^2$ e identificando tramite f i sottospazi $E \times S^1$. Indichiamo questo fibrato con $[E, f]$, e chiamiamo f una clutching function per $[E, f]$.

Periodicità di Bott - TPF

Sia $p : E \to X$ un fibrato vettoriale, e sia $f : E \times S^1 \to E \times S^1$ un automorfismo del fibrato prodotto $p \times 1_{S^1} : E \times S^1 \to X \times S^1$. Preso un punto $(x, z) \in X \times S^1$, la f ci dà un automorfismo della fibra $f(x, z) : p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$.
Con E ed f costruiamo un fibrato su $X \times S^2$ prendendo due copie di $E \times D^2$ e identificando tramite f i sottospazi $E \times S^1$. Indichiamo questo fibrato con $[E, f]$, e chiamiamo f una clutching function per $[E, f]$.
Se $f_t : E \times S^1 \to E \times S^1$ è un'omotopia di clutching function, $[E, f_0] \cong [E, f_1]$, e dalle definizioni segue che

- $[E_1, f_1] \oplus [E_2, f_2] \cong [E_1 \oplus E_2, f_1 \oplus f_2]$
- $[E_1, f_1] \otimes [E_2, f_2] \cong [E_1 \otimes E_2, f_1 \otimes f_2]$

Qualche esempio pratico:

- $[E, 1]$ è il prodotto esterno $E * 1$, o equivalentemente il pullback di E tramite la proiezione $X \times S^2 \to X$;
- Se X è un punto, $[\varepsilon^1, z] \cong H$; più in generale, $[\varepsilon^1, z^n] \cong H^n$
- $[E, z^n] \cong E * H^n = \mu(E \otimes H^n)$ per ogni n
- Generalizzando, $[E, z^n f] \cong [E, f] \otimes H^n$

Si può mostrare che ogni fibrato $F \to X \times S^2$ è isomorfo a un certo $[E, f]$.

Periodicità di Bott - TPF

Definiamo adesso una clutching function di Laurent come una clutching function che prenda la forma

$$\ell(x,z) = \sum_{i=-n}^{n} a_i(x,t) z^i$$

dove le $a_i : E \to E$ si restringono a mappe lineari in ogni fibra.
Osserviamo che le a_i non sono necessariamente invertibili, anche se la loro combinazione lo è, essendo una clutching function.

Periodicità di Bott - TPF

Definiamo adesso una clutching function di Laurent come una clutching function che prenda la forma

$$\ell(x,z) = \sum_{i=-n}^{n} a_i(x,t)z^i$$

dove le $a_i : E \to E$ si restingono a mappe lineari in ogni fibra.
Osserviamo che le a_i non sono necessariamente invertibili, anche se la loro combinazione lo è, essendo una clutching function.

Teorema 3

Dato un fibrato $[E,f]$, questo è isomorfo a $[E,q]$, con q una certa clutching function di Laurent. Inoltre, due clutching function di Laurent ℓ_0 e ℓ_1 che siano omotope con omotopia di clutching function, lo sono con omotopia di clutching function di Laurent.

Dimostrazione.

Innanzitutto, dalla teoria delle serie di Fourier sappiamo che possiamo approssimare una funzione continua $f : X \times S^1 \to \mathbb{C}$ con un polinomio di Laurent.
Scegliamo dunque un prodotto hermitiano su E; $End(E \times S^1)$ è uno spazio vettoriale normato da

$$||\alpha|| = sup_{|v|=1} |\alpha(v)|$$

Periodicità di Bott - TPF

Dimostrazione.

Innanzitutto, dalla teoria delle serie di Fourier sappiamo che possiamo approssimare una funzione continua $f : X \times S^1 \to \mathbb{C}$ con un polinomio di Laurent.
Scegliamo dunque un prodotto hermitiano su E; $End(E \times S^1)$ è uno spazio vettoriale normato da

$$||\alpha|| = sup_{|v|=1}|\alpha(v)|$$

Dato che vale la disuguaglianza triangolare, le palle sono convesse, e il sottospazio $GL(E \times S^1)$ è aperto nella topologia definita dalla norma. Mostrando che i polinomi di Laurent sono densi in $End(E \times S^1)$, avremo la tesi.

Dimostrazione.

Innanzitutto, dalla teoria delle serie di Fourier sappiamo che possiamo approssimare una funzione continua $f : X \times S^1 \to \mathbb{C}$ con un polinomio di Laurent.
Scegliamo dunque un prodotto hermitiano su E; $End(E \times S^1)$ è uno spazio vettoriale normato da

$$||\alpha|| = sup_{|v|=1}|\alpha(v)|$$

Dato che vale la disuguaglianza triangolare, le palle sono convesse, e il sottospazio $GL(E \times S^1)$ è aperto nella topologia definita dalla norma.
Mostrando che i polinomi di Laurent sono densi in $End(E \times S^1)$, avremo la tesi.
Per farlo, consideriamo una banalizzazione del fibrato E che porti il prodotto hermitiano dato nel prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$.

Dimostrazione.

Con una partizione dell'unità, ci restringiamo a studiare delle mappe che, viste in carte, sono delle matrici di funzioni continue. Approssimando queste con polinomi di Laurent, e incollando il tutto con la partizione dell'unità, abbiamo la tesi. $\square$

Periodicità di Bott - TPF

Dimostrazione.

Con una partizione dell'unità, ci restringiamo a studiare delle mappe che, viste in carte, sono delle matrici di funzioni continue. Approssimando queste con polinomi di Laurent, e incollando il tutto con la partizione dell'unità, abbiamo la tesi. $\square$

Una clutching function di Laurent si può scrivere come $\ell = z^{-m}q$ per una certa clutching function polinomiale q; pertanto, $[E, \ell] \cong [E, q] \otimes H^{-m}$. Il prossimo passo è ridurre le clutching function polinomiali a clutching function lineari.

Teorema 4

Sia q una clutching function polinomiale di grado al più n, allora $[E, q] \oplus [E \otimes \varepsilon^n, 1] \cong [E \otimes \varepsilon^{n+1}, L^n q]$ per una certa clutching function lineare $L^n q$.

Periodicità di Bott - TPF

Teorema 4

Sia q una clutching function polinomiale di grado al più n, allora $[E, q] \oplus [E \otimes \varepsilon^n, 1] \cong [E \otimes \varepsilon^{n+1}, L^n q]$ per una certa clutching function lineare $L^n q$.

Dimostrazione.

Consideriamo le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -z & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -z \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q \end{pmatrix}$$

Dimostrazione.

Possiamo portare la matrice A nella B con delle operazioni di Gauss, che però non sono operazioni elementari, dato che le a_i sono funzioni continue. Tuttavia, restringendoci a una singola fibra, troviamo delle versioni a blocchi di A e B, che a questo punto possono essere portate una nell'altra con una famiglia continua a un parametro di operazioni di Gauss.

Dimostrazione.

Possiamo portare la matrice A nella B con delle operazioni di Gauss, che però non sono operazioni elementari, dato che le a_i sono funzioni continue. Tuttavia, restringendoci a una singola fibra, troviamo delle versioni a blocchi di A e B, che a questo punto possono essere portate una nell'altra con una famiglia continua a un parametro di operazioni di Gauss.
Osservando che B è una clutching function per il fibrato $[E \otimes \varepsilon^n, 1] \oplus [E, q]$, e che A definisce un automorfismo di $E \otimes \varepsilon^{n+1}$ della forma $A(x, z) = a(x)z + b(x)$, e dunque è una clutching function lineare, che chiamiamo $L^n q$.

Dimostrazione.

Possiamo portare la matrice A nella B con delle operazioni di Gauss, che però non sono operazioni elementari, dato che le a_i sono funzioni continue. Tuttavia, restringendoci a una singola fibra, troviamo delle versioni a blocchi di A e B, che a questo punto possono essere portate una nell'altra con una famiglia continua a un parametro di operazioni di Gauss. Osservando che B è una clutching function per il fibrato $[E \otimes \varepsilon^n, 1] \oplus [E, q]$, e che A definisce un automorfismo di $E \otimes \varepsilon^{n+1}$ della forma $A(x, z) = a(x)z + b(x)$, e dunque è una clutching function lineare, che chiamiamo $L^n q$. Dato che clutching function omotope producono la stessa classe, abbiamo la tesi. □

Periodicità di Bott - TPF

Per delle clutching functions lineari vale il seguente fatto:

Teorema 5

Dato un fibrato $[E, a(x)z + b(x)]$, *esiste uno spezzamento* $E \cong E_+ \oplus E_-$, *con* $[E, a(x)z + b(x)] \cong [E_+, 1] \oplus [E_-, z]$.

Per delle clutching functions lineari vale il seguente fatto:

Teorema 5

Dato un fibrato $[E, a(x)z + b(x)]$, esiste uno spezzamento $E \cong E_+ \oplus E_-$, con $[E, a(x)z + b(x)] \cong [E_+, 1] \oplus [E_-, z]$.

Lemma 1

Sia $b : E \to E$ un endomorfismo senza autovalori unitari; allora, esiste unica una decomposizione in due sottofibrati b-invarianti E_+ ed E_- tali che gli autovalori di $b_{|E_-}$ giacciano dentro S^1, e quelli di $b_{|E_+}$ giacciano fuori. Tale composizione preserva le somme dirette.

Concludiamo la dimostrazione del teorema del prodotto fondamentale:

Periodicità di Bott - TPF

Concludiamo la dimostrazione del teorema del prodotto fondamentale:

Dimostrazione.

I risultati enunciati fino ad ora implicano che in $K(X \times S^2)$ si ha

$$[E, f] = [E, z^{-m}q] = [E, q] \otimes H^{-m} =$$

$$[E \otimes \varepsilon^{n+1}, L^n q] \otimes H^{-m} - [E \otimes \varepsilon^n, 1] \otimes H^{-m} =$$

$$[(E \otimes \varepsilon^{n+1})_+, 1] \otimes H^{-m} + [(E \otimes \varepsilon^{n+1})_-, z] \otimes H^{-m} - [E \otimes \varepsilon^n, 1] \otimes H^{-m} =$$

$$(E \otimes \varepsilon^{n+1})_+ * H^{-m} + (E \otimes \varepsilon^{n+1})_- * H^{1-m} - (E \otimes \varepsilon^n) * H^{-m}$$

Dimostrazione.

Osserviamo che l'ultima espressione è nell'immagine di μ. Dato che ogni fibrato si scrive come $[E, f]$, segue che μ è suriettiva. Per mostrare che è iniettiva, ne costruiamo un'inversa sinistra ν.

Per fare ciò, procediamo per passi:

1. Si definisce $\nu([E, f])$ come combinazione lineare di termini della forma $E \otimes H^k$ e $(E \otimes \varepsilon^{n+1})_\pm \otimes H^k$, di modo che sia indipendente da ogni possibile scelta.

Periodicità di Bott - TPF

Dimostrazione.

Osserviamo che l'ultima espressione è nell'immagine di μ. Dato che ogni fibrato si scrive come $[E, f]$, segue che μ è suriettiva. Per mostrare che è iniettiva, ne costruiamo un'inversa sinistra ν.
Per fare ciò, procediamo per passi:

1. Si definisce $\nu([E, f])$ come combinazione lineare di termini della forma $E \otimes H^k$ e $(E \otimes \varepsilon^{n+1})_{\pm} \otimes H^k$, di modo che sia indipendente da ogni possibile scelta.
2. Decomponiamo particolari fibrati nel seguente modo:
   - $[E \otimes \varepsilon^{n+2}, L^{n+1}q] \cong [E \otimes \varepsilon^{n+1}, L^n q] \oplus [E, 1]$;
   - $[E \otimes \varepsilon^{n+2}, L^{n+1}(zq)] \cong [E \otimes \varepsilon^{n+1}, L^n q] \oplus [E, z]$;
   - Dato $[E, 1]$, vale $E_- = 0$, $E_+ = E$;
   - Dato $[E, z]$, vale $E_- = E$, $E_+ = 0$.

Periodicità di Bott - TPF

Dimostrazione.

3. Dalla prima e terza decomposizione, osserviamo che gli addendi "negativi" non dipendono da n. Pertanto, se $n \geq \deg q$, poniamo

$$\nu([E, z^{-m}q]) = (E \otimes \varepsilon^{n+1})_{-} \otimes (H-1) + E \otimes H^{-m}$$

Questo è ben definito e sta in $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$.

Dimostrazione.

3. Dalla prima e terza decomposizione, osserviamo che gli addendi "negativi" non dipendono da n. Pertanto, se $n \geq \deg q$, poniamo

$$\nu([E, z^{-m}q]) = (E \otimes \varepsilon^{n+1})_{-} \otimes (H-1) + E \otimes H^{-m}$$

Questo è ben definito e sta in $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$.

4. Si verifica, tramite le definizioni, che ν commuta con le somme, dato che $L^n(q_1 \oplus q_2) = L^n q_1 \oplus L^n q_2$, e la decomposizione $\pm$ preserva le somme dirette. Da questo segue che ν si estende ad un omomorfismo $K(X \times S^2) \longrightarrow K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$

Dimostrazione.

3. Dalla prima e terza decomposizione, osserviamo che gli addendi "negativi" non dipendono da n. Pertanto, se $n \geq \deg q$, poniamo
$$\nu([E, z^{-m} q]) = (E \otimes \varepsilon^{n+1})_- \otimes (H - 1) + E \otimes H^{-m}$$
Questo è ben definito e sta in $K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$.
4. Si verifica, tramite le definizioni, che ν commuta con le somme, dato che $L^n(q_1 \oplus q_2) = L^n q_1 \oplus L^n q_2$, e la decomposizione $\pm$ preserva le somme dirette. Da questo segue che ν si estende ad un omomorfismo $K(X \times S^2) \longrightarrow K(X) \otimes \mathbb{Z}[H]/(H-1)^2$
5. Come ultimo passo, si verifica che $\nu\mu = 1$ sugli elementi della forma $E \otimes H^{-m}$, dato che questi generano $K(S^2)$.

Questo conclude la dimostrazione del teorema. □

Periodicità di Bott - TPB

Prima di affrontare la dimostrazione del teorema di periodicità di Bott, parliamo degli strumenti coomologici che ci serviranno:

Teorema 6

Sia X spazio topologico, $A \subseteq X$ chiuso. Allora, l'inclusione e il quoziente $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{q} X/A$ inducono mappe in K-teoria ridotta,

$$\widetilde{K}(X/A) \xrightarrow{q^*} \widetilde{K}(X) \xrightarrow{i^*} \widetilde{K}(A)$$

tali che $Ker\, i^* = Im\, q^*$.

Periodicità di Bott - TPB

Dimostrazione.

L'inclusione $Im\, q^* \subset Ker\, i^*$ è equivalente a $i^* q^* = 0$. Dato che qi è con la composizione $A \to A/A \to X/A$, e $\widetilde{K}(A/A) = 0$, $i^* q^* = 0$.

Periodicità di Bott - TPB

Dimostrazione.

L'inclusione $Im\, q^* \subset Ker\, i^*$ è equivalente a $i^* q^* = 0$. Dato che qi è con la composizione $A \to A/A \to X/A$, e $\widetilde{K}(A/A) = 0$, $i^* q^* = 0$.
L'altra è più laboriosa; si prende un fibrato $p : E \to X$ che sia stabilmente banale quando ristretto ad A, si banalizza con un'appropriata somma diretta, e si considera la banalizzazione globale $h : p^{-1}(A) \to A \times \mathbb{C}^n$. Con un argomento di paracompattezza, si mostra che E è banale su un buon intorno U di A, il che induce una trivializzazione sul fibrato E/h su U/A.

Dimostrazione.

L'inclusione $Im\, q^* \subset Ker\, i^*$ è equivalente a $i^*q^* = 0$. Dato che qi è con la composizione $A \to A/A \to X/A$, e $\widetilde{K}(A/A) = 0$, $i^*q^* = 0$.
L'altra è più laboriosa; si prende un fibrato $p : E \to X$ che sia stabilmente banale quando ristretto ad A, si banalizza con un'appropriata somma diretta, e si considera la banalizzazione globale $h : p^{-1}(A) \to A \times \mathbb{C}^n$. Con un argomento di paracompattezza, si mostra che E è banale su un buon intorno U di A, il che induce una trivializzazione sul fibrato E/h su U/A. Si conclude verificando che $E \cong q^*(E/h)$. □

Abbiamo dunque un inizio di successione esatta,

$$\widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

Per ottenere una successione esatta lunga, facciamo uso dei funtori di cono C e sospensione Σ;

Abbiamo dunque un inizio di successione esatta,

$$\widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

Per ottenere una successione esatta lunga, facciamo uso dei funtori di cono C e sospensione Σ;

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] & X \arrow[r, hook] & X \cup CA \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & (X \cup CA) \cup CX \arrow[r, hook] \arrow[d, "\simeq"] & ((X \cup CA) \cup CX) \cup C(X \cup CA) \arrow[d, "\simeq"] \\
 & & X/A & \Sigma A & \Sigma X
\end{tikzcd}$$

Le frecce verticali sono quozienti per sottospazi contrattili, e dunque inducono isomorfismi in K-teoria ridotta, grazie al seguente

Periodicità di Bott - TPB

Lemma 2

Se A è contrattile, la mappa al quoziente $q : X \to X/A$ induce una bigezione $q^* : Vect^n(X/A) \to Vect^n(X)$ per ogni n.

Lemma 2

Se A è contrattile, la mappa al quoziente $q : X \to X/A$ induce una bigezione $q^* : Vect^n(X/A) \to Vect^n(X)$ per ogni n.

Dimostrazione.

Dato che A è contrattile, ogni fibrato su X è banale su A. Data una trivializzazione globale su A, costruiamo il fibrato quoziente E/h come fatto prima; quello che vogliamo mostrare è che la classe di isomorfismo di E/h non dipende da h.

Periodicità di Bott - TPB

Lemma 2

Se A è contrattile, la mappa al quoziente $q : X \to X/A$ induce una bigezione $q^* : Vect^n(X/A) \to Vect^n(X)$ per ogni n.

Dimostrazione.

Dato che A è contrattile, ogni fibrato su X è banale su A. Data una trivializzazione globale su A, costruiamo il fibrato quoziente E/h come fatto prima; quello che vogliamo mostrare è che la classe di isomorfismo di E/h non dipende da h.

Date due banalizzazioni h_0 e h_1, queste differiscono su ogni fibra per $g_x \in GL_n(\mathbb{C})$; la mappa $x \mapsto g_x$ è omotopa ad una costante, che possiamo assumere essere l'identità. L'omotopia tra g e l'identità ci dà un'omotopia H tra h_0 e h_1. A questo punto, si costruisce un fibrato $(E \times I)/H \to (X/A) \times I$ che si restringa a E/h_0 su un estremo e a E/h_1 sull'altro. Abbiamo dunque una mappa $Vect^n(X) \to Vect^n(X/A)$, inversa di q^*. □

Usando il lemma e la proposizione precedente, otteniamo una successione esatta lunga in K-teoria ridotta

$$\ldots \to \widetilde{K}(\Sigma(X/A)) \to \widetilde{K}(\Sigma X) \to \widetilde{K}(\Sigma A) \to \widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

Usando il lemma e la proposizione precedente, otteniamo una successione esatta lunga in K-teoria ridotta

$$\ldots \to \widetilde{K}(\Sigma(X/A)) \to \widetilde{K}(\Sigma X) \to \widetilde{K}(\Sigma A) \to \widetilde{K}(X/A) \to \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A)$$

Se ad esempio X fosse somma puntata di due sottospazi, $X = A \vee B$, avremmo $X/A = B$, e la successione si dividerebbe in successioni esatte corte che spezzano, il che implicherebbe che la mappa $\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(A) \oplus \widetilde{K}(B)$, ottenuta per restrizione, è un isomorfismo.

Usando quanto fatto fino ad ora, vorremo definire una versione del prodotto esterno per la K-teoria ridotta, $\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$. Per definire il prodotto, consideriamo la successione esatta lunga della coppia $(X \times Y, X \vee Y)$:

Usando quanto fatto fino ad ora, vorremo definire una versione del prodotto esterno per la K-teoria ridotta, $\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y) \to \widetilde{K}(X \wedge Y)$. Per definire il prodotto, consideriamo la successione esatta lunga della coppia $(X \times Y, X \vee Y)$:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(\Sigma(X \times Y)) \arrow[r] & \widetilde{K}(\Sigma(X \vee Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X \times Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X \vee Y) \arrow[d, "\cong"] \\
& \widetilde{K}(\Sigma X) \oplus \widetilde{K}(\Sigma Y) & & & \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Dove il primo isomorfismo è dovuto al fatto che la sospensione ridotta commuta con la somma puntata. Osserviamo anche che l'ultima mappa orizzontale è suriettiva, e fa spezzare la successione tramite la mappa tratteggiata, che manda $(a, b) \mapsto p_X^*(a) + p_Y^*(b)$.

Periodicità di Bott - TPB

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(\Sigma(X \times Y)) \arrow[r] & \widetilde{K}(\Sigma(X \vee Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X \times Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X \vee Y) \arrow[d, "\cong"] \\
 & \widetilde{K}(\Sigma X) \oplus \widetilde{K}(\Sigma Y) \arrow[ul, dashed] & & & \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Similmente, la prima mappa spezza tramite $(\Sigma p_X)^* + (\Sigma p_Y)^*$; otteniamo quindi l'isomorfismo

$$\widetilde{K}(X \times Y) = \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y)$$

Periodicità di Bott - TPB

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{K}(\Sigma(X\times Y)) \arrow[r] & \widetilde{K}(\Sigma(X\vee Y)) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \widetilde{K}(X\wedge Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X\times Y) \arrow[r] & \widetilde{K}(X\vee Y) \arrow[d, "\cong"] \\
 & \widetilde{K}(\Sigma X)\oplus\widetilde{K}(\Sigma Y) \arrow[ul, dashed] & & & \widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y) \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

Similmente, la prima mappa spezza tramite $(\Sigma p_X)^* + (\Sigma p_Y)^*$; otteniamo quindi l'isomorfismo

$$\widetilde{K}(X\times Y) = \widetilde{K}(X\wedge Y)\oplus\widetilde{K}(X)\oplus\widetilde{K}(Y)$$

Ora, presi $a\in\widetilde{K}(X)$ e $b\in\widetilde{K}(Y)$, il loro prodotto esterno $a*b = p_X^*(a)p_Y^*(b)$ è tale che il primo fattore si restringe a 0 in $K(Y)$, il secondo in $K(X)$, e il loro prodotto in $K(X\vee Y)$, da cui $a*b\in\widetilde{K}(X\times Y)$. Possiamo dunque fare il pullback su $\widetilde{K}(X\wedge Y)$ in maniera ben definita e unica.

Questo basta a definire una struttura di prodotto esterno, essenzialmente restrizione della struttura definita in precendenza sulla K-teoria secondo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
K(X) \otimes K(Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "*"'] & (\widetilde{K}(X) \otimes \widetilde{K}(Y)) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z} \arrow[d, dashed] \\
K(X \times Y) \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{K}(X \wedge Y) \oplus \widetilde{K}(X) \oplus \widetilde{K}(Y) \oplus \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che il prodotto smash $S^n \wedge X$ altro non è (a meno di omotopia) che la sospensione ridotta iterata $\Sigma^n X$; il prodotto esterno ridotto da origine ad un omomorfismo

$$\beta : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$$

$$a \longmapsto (H-1) * a$$

Sappiamo che il prodotto smash $S^n \wedge X$ altro non è (a meno di omotopia) che la sospensione ridotta iterata $\Sigma^n X$; il prodotto esterno ridotto da origine ad un omomorfismo

$$\beta : \widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$$

$$a \longmapsto (H - 1) * a$$

Possiamo dunque enunciare il risultato finale del seminario:

Periodicità di Bott - TPB

Teorema 7 (di periodicità di Bott)

L'omomorfismo $\beta : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ *è un isomorfismo per ogni spazio* X*.*

Teorema 7 (di periodicità di Bott)

L'omomorfismo $\beta : \widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$ *è un isomorfismo per ogni spazio* X.

Dimostrazione.

La mappa β è la composizione

$$\widetilde{K}(X) \longrightarrow \widetilde{K}(S^2) \otimes \widetilde{K}(X) \xrightarrow{*} \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$$

dove la prima mappa $a \mapsto (H-1) \otimes a$ è un isomorfismo, dato che $\widetilde{K}(S^2)$ è infinito ciclico generato da $H-1$, e la seconda mappa è il prodotto esterno ridotto, e che sia un isomorfismo è proprio il teorema del prodotto fondamentale. □

Corollario 7.1

$\widetilde{K}(S^{2n+1}) = 0$ e $\widetilde{K}(S^{2n}) = \mathbb{Z}$, generato dal prodotto esterno iterato $(H-1) * \ldots * (H-1)$.

Conclusione

La periodicità di Bott permette di dimostrare risultati piuttosto profondi legati alla K-teoria, tra cui:

- Il fatto che la K-teoria sia una teoria coomologica generalizzata;
- La forma originale della periodicità di Bott, $\pi_n(U) = \pi_{n+2}(U)$, tramite il teorema di rappresentazione di Brown;
- Il fatto che $\mathbb{R}^n$ ammette una struttura di algebra di divisione reale soltanto se $n = 1, 2, 4, 8$;
- Il fatto, strettamente legato al precedente, che S^n è parallelizzabile soltanto se $n = 0, 1, 3, 7$.

Grazie per l'attenzione!