

Un'ostruzione alla continuità C^2 di B-spline generalizzate su varietà Riemanniane

Enrico Berni

Università di Pisa

e.berni@studenti.unipi.it

11 settembre 2024

L'algoritmo De Boor per costruire B-spline si generalizza in modo naturale al caso di varietà Riemanniane, sostituendo i segmenti di retta con segmenti di geodetiche minimali; queste B-spline generalizzate sono ancora lisce a tratti (come le B-spline classiche), ma non è detto che una curva di grado m sia C^k in un nodo di molteplicità al più $m - k$.

In particolare, in [KKS95], viene esibita una B-spline generalizzata su S^3 che non è C^2 in un nodo di molteplicità 1.

L'algoritmo De Boor per costruire B-spline si generalizza in modo naturale al caso di varietà Riemanniane, sostituendo i segmenti di retta con segmenti di geodetiche minimali; queste B-spline generalizzate sono ancora lisce a tratti (come le B-spline classiche), ma non è detto che una curva di grado m sia C^k in un nodo di molteplicità al più $m - k$.

In particolare, in [KKS95], viene esibita una B-spline generalizzata su S^3 che non è C^2 in un nodo di molteplicità 1.

Nel corso del seminario, mostreremo che una B-spline generalizzata di grado m su una varietà Riemanniana è continua sui nodi, e C^1 sui nodi di molteplicità al più $m - 1$; studieremo anche l'ostruzione alla continuità C^2 , ricavandone una scrittura esplicita.

- 1 Definizioni preliminari
 - Geometria Riemanniana
 - B-spline generalizzate
- 2 Regolarità sui nodi
 - Un esempio significativo
- 3 Teorema 3

Diamo qualche definizione e risultato preliminare di geometria Riemanniana.

Definizione

Una varietà Riemanniana (M, g) è una varietà liscia M , dotata di un tensore metrico definito positivo g .

Diamo qualche definizione e risultato preliminare di geometria Riemanniana.

Definizione

Una varietà Riemanniana (M, g) è una varietà liscia M , dotata di un tensore metrico definito positivo g .

Definiamo la norma di un vettore $v \in T_p M$ come $\|v\| = \sqrt{g_p(v, v)}$.

Definizione

Definiamo la lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ come

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Definizione

La distanza tra due punti p e q è definita come

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) \mid \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Definizione

Data una varietà liscia M , definiamo una connessione ∇ come un operatore locale, bilineare che assegna ad un punto p , ad un vettore $v \in T_pM$ e ad un campo vettoriale definito su una carta centrata in p , $X \in \mathfrak{X}(U(p))$, un vettore $\nabla_v X \in T_pM$, che rispetti la regola di Leibniz e che vari in maniera liscia in p .

Definizione

Data una varietà con connessione (M, ∇) , fissiamo un punto p , e consideriamo l'espressione $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$; le funzioni lisce Γ_{ij}^k si dicono simboli di Christoffel della connessione.

Definizione

Data una varietà con connessione (M, ∇) , fissiamo un punto p , e consideriamo l'espressione $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k$; le funzioni lisce Γ_{ij}^k si dicono simboli di Christoffel della connessione.

Definizione

Data una varietà Riemanniana (M, g) , definiamo la connessione di Levi-Civita di g come la connessione ∇_g con simboli di Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^k} \right)$$

Definizione

Una curva liscia γ si dice geodetica se vale $D_t\gamma' := \nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$.

Definizione

Dato un punto $p \in M$, la mappa esponenziale è la funzione $\exp_p : T_pM \rightarrow M$, $v \mapsto \gamma_v(1)$, dove γ_v è la geodetica uscente da p in direzione v .

Definizione

Una curva liscia γ si dice geodetica se vale $D_t\gamma' := \nabla_{\gamma'(t)}\gamma' = 0$.

Definizione

Dato un punto $p \in M$, la mappa esponenziale è la funzione $\exp_p : T_pM \rightarrow M$, $v \mapsto \gamma_v(1)$, dove γ_v è la geodetica uscente da p in direzione v .

Definizione

Diciamo che una connessione è geodeticamente completa se le geodetiche indotte sono definite su \mathbb{R} . Una varietà Riemanniana è geodeticamente completa se lo è la sua connessione di Levi-Civita.

Definizione

Un intorno totalmente normale di $p \in M$ è un intorno in cui la mappa esponenziale è un diffeomorfismo in ogni punto.

Fatto

In una varietà geodeticamente completa, ogni coppia di punti è collegata da una geodetica che ne realizza la distanza.

Se i punti sono contenuti in un intorno totalmente normale di uno dei due, una tale geodetica è unica.

Definizione

Un intorno totalmente normale di $p \in M$ è un intorno in cui la mappa esponenziale è un diffeomorfismo in ogni punto.

Fatto

In una varietà geodeticamente completa, ogni coppia di punti è collegata da una geodetica che ne realizza la distanza.

Se i punti sono contenuti in un intorno totalmente normale di uno dei due, una tale geodetica è unica.

Da ora in poi, ci concentreremo su varietà Riemanniane geodeticamente complete.

B-spline generalizzate

Vediamo come costruire delle B-spline generalizzate su una varietà M data: Scegliamo un intero $n \geq 2$, e dei punti $P_0^0, \dots, P_n^0 \in M$, tali che P_i^0 e P_{i+1}^0 siano abbastanza vicini per ogni i .

B-spline generalizzate

Vediamo come costruire delle B-spline generalizzate su una varietà M data: Scegliamo un intero $n \geq 2$, e dei punti $P_0^0, \dots, P_n^0 \in M$, tali che P_i^0 e P_{i+1}^0 siano abbastanza vicini per ogni i .

Scegliamo adesso un intero $m \geq 2$, e dei reali $u_0 \leq \dots \leq u_{m+n-1}$, tali che ogni u_i appaia al massimo m volte.

La curva B-spline generalizzata $\beta : [u_{m-1}, u_n] \rightarrow M$ di grado m , con punti di controllo P_0^0, \dots, P_n^0 e nodi u_0, \dots, u_{m+n-1} è definita come segue.

B-spline generalizzate

Vediamo come costruire delle B-spline generalizzate su una varietà M data: Scegliamo un intero $n \geq 2$, e dei punti $P_0^0, \dots, P_n^0 \in M$, tali che P_i^0 e P_{i+1}^0 siano abbastanza vicini per ogni i .

Scegliamo adesso un intero $m \geq 2$, e dei reali $u_0 \leq \dots \leq u_{m+n-1}$, tali che ogni u_i appaia al massimo m volte.

La curva B-spline generalizzata $\beta : [u_{m-1}, u_n] \rightarrow M$ di grado m , con punti di controllo P_0^0, \dots, P_n^0 e nodi u_0, \dots, u_{m+n-1} è definita come segue.

Definiamo prima $\psi_i^0(t) = P_i^0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se $u_k \neq u_{k+1}$, con $m-1 \leq k \leq n-1$, definiamo

$$a_i^r(t) = \frac{t - u_{i-1}}{u_{i+m-r} - u_{i-1}}$$

con $1 \leq r \leq m$ e $k+1-m-r \leq i \leq k+1$, e $t \in [u_{i-1}, u_{i+m-r}]$, e poniamo

B-spline generalizzate

$$\begin{cases} \psi_i^r(t_1, \dots, t_r) = \gamma(a_i^r(t_r), \psi_{i-1}^{r-1}(t_1, \dots, t_{r-1}), \psi_i^{r-1}(t_1, \dots, t_{r-1})) \\ P_i^r(t) = \psi_i^r(t, \dots, t) \end{cases}$$

dove $\gamma(t, p, q)$ è la geodetica minimizzante che collega p e q . Questo fa sì che valga

$$P_i^r(t) = \gamma(a_i^r(t_r), P_{i-1}^{r-1}(t), P_i^{r-1}(t))$$

Definizione

Definiamo la B-spline generalizzata β come la curva che nell'intervallo $[u_k, u_{k+1}]$ è definita da $\beta(t) = P_{k+1}^m(t)$.

B-spline generalizzate

Il nodo u_k ha molteplicità j se

$$u_{k-j} < u_{k-j+1} = \cdots = u_k < u_{k+1}$$

Definizione

Chiamiamo la mappa ψ_{k+1}^m forma polare del segmento geodetico P_{k+1}^m .

B-spline generalizzate

Il nodo u_k ha molteplicità j se

$$u_{k-j} < u_{k-j+1} = \cdots = u_k < u_{k+1}$$

Definizione

Chiamiamo la mappa ψ_{k+1}^m forma polare del segmento geodetico P_{k+1}^m .

Lemma

Le forme polari ψ_i^r sono ben definite e lisce.

Osservazione

La B-spline β è dunque liscia a tratti, con possibili problemi sui nodi u_k , con $m \leq k \leq n - 1$.

Regolarità sui nodi

Sia μ la molteplicità del nodo u_k , con $u_k \neq u_{k+1}$, e

$$\beta(t) = \begin{cases} P_{k-\mu+1}^m(t) & \text{se } t \in [u_{k-\mu}, u_k], \\ P_{k+1}^m(t) & \text{se } t \in [u_k, u_{k+1}]. \end{cases}$$

Mostreremo in seguito che $P_{k-\mu+1}^m(u_k) = P_{k+1}^m(u_k)$.

Regolarità sui nodi

Sia μ la molteplicità del nodo u_k , con $u_k \neq u_{k+1}$, e

$$\beta(t) = \begin{cases} P_{k-\mu+1}^m(t) & \text{se } t \in [u_{k-\mu}, u_k], \\ P_{k+1}^m(t) & \text{se } t \in [u_k, u_{k+1}]. \end{cases}$$

Mostreremo in seguito che $P_{k-\mu+1}^m(u_k) = P_{k+1}^m(u_k)$.

Enunciamo un risultato classico sulle curve B-spline:

Teorema 1

Se $M = \mathbb{R}^n$, allora

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 Se $\mu \leq m - j$, con $1 \leq j \leq m - 1$, allora β è C^j in u_k .

Una dimostrazione si trova in [Far99].

Teorema 2

Sia β una B-spline generalizzata. Allora,

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 se $\mu \leq m - 1$, β è C^1 in u_k .

Teorema 2

Sia β una B-spline generalizzata. Allora,

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 se $\mu \leq m - 1$, β è C^1 in u_k .

Dimostrazione.

Dai lemmi precedenti, segue che $P_{k+1}^m(u_k) = P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)$ e
 $P_{k-\mu+1}^m(u_k) = P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)$.

Supponiamo adesso che $\mu \leq m - 1$. Dato che $P_i^r(t) := \psi_i^r(t, \dots, t)$, la velocità sinistra di β in u_k è data da

$$\dot{P}_{k-\mu+1}^m(u_k) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=u_k} \psi_{k-\mu+1}^m(\tau_i^m(t, u_k))$$

Dimostrazione.

Svolgendo dei calcoli, con l'aiuto di risultati precedenti, troviamo che la velocità sinistra è

$$\begin{aligned} \dot{P}_{k-\mu+1}^m(u_k) &= \sum_{i=1}^{m-\mu} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=u_k} \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_i^{m-\mu}(t, u_k)) + \\ &+ \mu \cdot D_t \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Svolgendo dei calcoli, con l'aiuto di risultati precedenti, troviamo che la velocità sinistra è

$$\begin{aligned} \dot{P}_{k-\mu+1}^m(u_k) &= \sum_{i=1}^{m-\mu} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=u_k} \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_i^{m-\mu}(t, u_k)) + \\ &+ \mu \cdot D_t \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)) \end{aligned}$$

Similmente, la velocità destra è

$$\begin{aligned} \dot{P}_{k+1}^m(u_k) &= \sum_{i=1}^{m-\mu} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=u_k} \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_i^{m-\mu}(t, u_k)) + \\ &+ \mu \cdot D_t \gamma(a_{k+1}^m(t), P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Mostriamo adesso che $\Delta_1 := \dot{P}_{k+1}^m(u_k) - \dot{P}_{k-\mu+1}^m(u_k) = 0$.

Siano $p = P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k)$ e $q = P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Delta_1 &= D_t \Big|_{t=u_k} \gamma(a_{k+1}^m(t), \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k), p, q), q) - \\ &\quad - D_t \Big|_{t=u_k} \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), p, \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k), p, q)) \end{aligned}$$

Dimostrazione.

Mostriamo adesso che $\Delta_1 := \dot{P}_{k+1}^m(u_k) - \dot{P}_{k-\mu+1}^m(u_k) = 0$.

Siano $p = P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k)$ e $q = P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \Delta_1 &= D_t \Big|_{t=u_k} \gamma(a_{k+1}^m(t), \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k), p, q), q) - \\ &\quad - D_t \Big|_{t=u_k} \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), p, \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k), p, q)) \end{aligned}$$

Svolgendo i dovuti calcoli, segue la tesi. □

Ricordiamo il teorema sulla regolarità delle B-spline:

Teorema 1

Se $M = \mathbb{R}^n$, allora

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 Se $\mu \leq m - j$, con $1 \leq j \leq m - 1$, allora β è C^j in u_k .

In [KKS95], gli autori osservano che il punto 2 è falso, se $j = 2$ e $M = S^3$.

Ricordiamo il teorema sulla regolarità delle B-spline:

Teorema 1

Se $M = \mathbb{R}^n$, allora

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 Se $\mu \leq m - j$, con $1 \leq j \leq m - 1$, allora β è C^j in u_k .

In [KKS95], gli autori osservano che il punto 2 è falso, se $j = 2$ e $M = S^3$.
Calcoliamo la differenza Δ_2 tra accelerazione covariante destra e sinistra,

$$\Delta_2 := D_t \Big|_{t=u_k} \dot{P}_{k+1}^m(t) - D_t \Big|_{t=u_k} \dot{P}_{k-\mu+1}^m(t).$$

Ricordiamo il teorema sulla regolarità delle B-spline:

Teorema 1

Se $M = \mathbb{R}^n$, allora

- 1 β è continua in u_k ;
- 2 Se $\mu \leq m - j$, con $1 \leq j \leq m - 1$, allora β è C^j in u_k .

In [KKS95], gli autori osservano che il punto 2 è falso, se $j = 2$ e $M = S^3$.
Calcoliamo la differenza Δ_2 tra accelerazione covariante destra e sinistra,

$$\Delta_2 := D_t \Big|_{t=u_k} \dot{P}_{k+1}^m(t) - D_t \Big|_{t=u_k} \dot{P}_{k-\mu+1}^m(t).$$

Questa è l'ostruzione alla continuità C^2 della B-spline β .

Teorema 3

Sia $\mu \leq m - 2$, e siano $Q = P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)$, $\rho = \frac{u_k - u_{k-\mu}}{u_{k+1} - u_{k-\mu}}$. Siano inoltre

- $v = \dot{\gamma}(\rho, P_{k-\mu}^{m-u-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k));$
- $v_0 = \dot{\gamma}(1, P_{k-\mu-1}^{m-u-2}(u_k), P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k));$
- $v_1 = \dot{\gamma}(0, P_{k-\mu+1}^{m-u-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-2}(u_k)).$

Teorema 3

Allora, la B-spline generalizzata β soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \Delta_2 &= - \frac{1}{(u_{k+1}-u_k)(u_k-u_{k-\mu})} v \\ &+ \frac{1}{(u_k-u_{k-\mu})(u_k-u_{k-\mu-1})} (d_{-\rho v} \exp_Q)^{-1}(v_0) \\ &+ \frac{1}{(u_{k+1}-u_k)(u_{k+2}-u_k)} (d_{(1-\rho)v} \exp_Q)^{-1}(v_1). \end{aligned}$$

Un esempio significativo

Sia $M = S^2$.

Osserviamo che le geodetiche minimizzanti sono uniche per qualsiasi coppia di punti non antipodali, e sono parametrizzate da

$$\gamma(t, p, q) = \frac{\sin((1-t)\theta)}{\sin\theta} p + \frac{\sin(t\theta)}{\sin\theta} q$$

quando $0 < \theta = d(p, q) < \pi$. Allora, per $w \in T_p M = \{p\}^\perp$, $\|w\| < \pi$, vale

$$\exp_p(w) = \cos \|w\| p + \frac{\sin \|w\|}{\|w\|} w$$

Un esempio significativo

In particolare,

$$(d_w \exp_p)(z) = \frac{\sin \|w\|}{\|w\|} z + \frac{\langle z, w \rangle}{\|w\|} \left(\left(\frac{\cos \|w\|}{\|w\|} - \frac{\sin \|w\|}{\|w\|^2} \right) w - \sin \|w\| p \right)$$

Dato che $\exp_p(0) = p$, e $d_0 \exp_p = id$,

$$(d_w \exp_p)^{-1}(z) = \frac{\|w\|}{\sin \|w\|} z + \langle z, \cos \|w\| w - \|w\| \sin \|w\| p \rangle \left(\left(\frac{\cos \|w\|}{\|w\| \sin \|w\|} - \frac{1}{\|w\|^2} \right) w - p \right)$$

Un esempio significativo

Osserviamo anche che l'accelerazione covariante di una curva in S^2 è la proiezione ortogonale dell'accelerazione "classica":

$$D_s \Big|_{s=t} \dot{\gamma}(s) = \ddot{\gamma}(t) - \langle \ddot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \gamma(t).$$

Un esempio significativo

Prendiamo dunque nella definizione $n = 4$, e (fino alla sesta cifra significativa),

- $P_0^0 = (0.969003, 0.242251, 0.0484502)$;
- $P_1^0 = (-0.0705346, 0.705346, 0.705346)$;
- $P_2^0 = (-0.990148, 0.0990148, -0.0990148)$;
- $P_3^0 = (-0.00832582, -0.999098, -0.0416291)$;
- $P_4^0 = (0.953463, -0.0953463, -0.286039)$.

Prendiamo anche $m = 3$, ed $u_i = i$ per ogni $i \leq 6$. La B-spline corrispondente, β , è definita su $[2, 4]$, ed è liscia dovunque, meno che in $u_3 = 3$, di molteplicità 1. Usando i risultati precedentemente esposti, troviamo

Un esempio significativo

- $P_1^1(3) = P_1^0$;
- $P_2^1(3) = (-0.869459, 0.422729, 0.255620)$;
- $P_3^1(3) = (-0.892370, -0.437511, -0.110728)$;
- $P_4^1(3) = P_3^0$;
- $P_2^2(3) = P_2^1(3)$;
- $P_3^3(3) = (-0.996601, 0.00836167, 0.0819603)$;
- $P_4^2(3) = P_3^1(3)$,

e $P_3^3(3) = P_3^2(3) = P_4^3(3)$.

Un esempio significativo

Dal Teorema 2, sappiamo che β è C^1 in u_3 . Posto $k = 3$, dal Teorema 3 ricaviamo

$$\Delta_2 = -2v + (d_{-v/2} \exp_Q)^{-1}(v_0) + (d_{v/2} \exp_Q)^{-1}(v_1)$$

con $Q = P_3^2(3)$ e

- $v = (-0.0238407, -0.895152, -0.381216)$,
- $v_0 = (-0.474030, -0.567174, -0.674396)$,
- $v_1 = (0.485407, -0.992599, 0.0100238)$,

da cui

- $(d_{-v/2} \exp_Q)^{-1}(v_0) = (-0.0575237, -0.653076, -0.766090)$,
- $(d_{v/2} \exp_Q)^{-1}(v_1) = (0.0108934, -1.11189, 0.0190234)$.

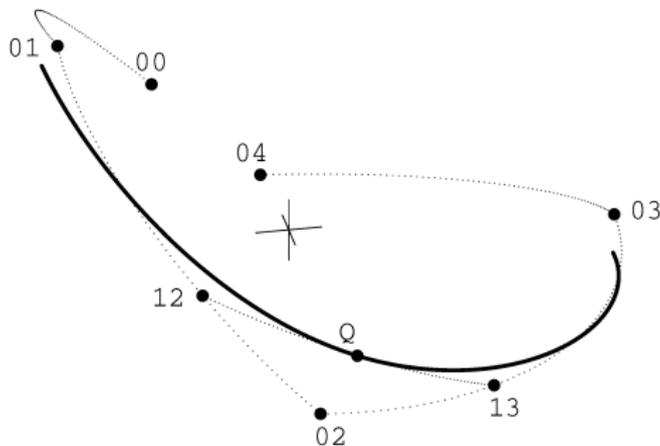
Un esempio significativo

Allora,

$$\Delta_2 = (0.00105109, 0.0253392, 0.0153659)$$

Comparando Δ_2 con le due accelerazioni covarianti, si trova

- $\frac{\|\Delta_2\|}{\|D_t|_{t=u_3} \dot{P}_3^3(t)\|} = 0.0216811$;
- $\frac{\|\Delta_2\|}{\|D_t|_{t=u_3} \dot{P}_4^3(t)\|} = 0.0216722$.



Un esempio significativo

Osserviamo che Δ_2 può diventare arbitrariamente grande, se scegliamo dei nodi appropriati che siano sufficientemente vicini l'uno all'altro.

D'altro canto, il nostro esempio mostra che le discontinuità dell'accelerazione covariante di una B-spline generalizzata possono essere ragionevolmente piccole.

Questo fatto è particolarmente promettente, specialmente per quanto riguarda le applicazioni pratiche della costruzione presentata.

Teorema 3

Ricordiamo il risultato che vogliamo dimostrare:

Teorema 3

Sia $\mu \leq m - 2$, e siano $Q = P_{k-\mu+1}^{m-\mu}(u_k)$, $\rho = \frac{u_k - u_{k-\mu}}{u_{k+1} - u_{k-\mu}}$. Siano inoltre

- $v = \dot{\gamma}(\rho, P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k));$
- $v_0 = \dot{\gamma}(1, P_{k-\mu-1}^{m-\mu-2}(u_k), P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k));$
- $v_1 = \dot{\gamma}(0, P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-2}(u_k)).$

Teorema 3

Allora, la B-spline generalizzata β soddisfa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \Delta_2 &= -\frac{1}{(u_{k+1}-u_k)(u_k-u_{k-\mu})} v \\ &+ \frac{1}{(u_k-u_{k-\mu})(u_k-u_{k-\mu-1})} (d_{-\rho v} \exp_Q)^{-1}(v_0) \\ &+ \frac{1}{(u_{k+1}-u_k)(u_{k+2}-u_k)} (d_{(1-\rho)v} \exp_Q)^{-1}(v_1) \end{aligned}$$

Da ora in poi, mettiamoci nel caso $\mu \leq m-2$; per $b_0, b_1 \leq a$, sia $\tau_{b_0, b_1}^a(x, y, z)$ definita in maniera analoga a $\tau_b^a(x, y)$.

Teorema 3

Dati interi $1 \leq i, j \leq m$, scriviamo

$$f_i^j = \begin{cases} D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=s} \psi_{k+1}^m(\tau_i^m(t, u_k)) & \text{se } i = j \\ D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k} \psi_{k+1}^m(\tau_{i,j}^m(s, t, u_k)) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$g_i^j = \begin{cases} D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=s} \psi_{k-\mu+1}^m(\tau_i^m(t, u_k)) & \text{se } i = j \\ D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k} \psi_{k-\mu+1}^m(\tau_{i,j}^m(s, t, u_k)) & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Allora, per come abbiamo scelto i nodi,

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (f_i^j - g_i^j).$$

Teorema 3

Dal momento che $D_s \partial_t = D_t \partial_s$, vale anche $g_i^j = g_j^i$ e $f_i^j = f_j^i$.

Lemma 4

$$\sum_{i=1}^{m-\mu} \sum_{j=1}^{m-\mu} (f_i^j - g_i^j) = 0.$$

Teorema 3

Dal momento che $D_s \partial_t = D_t \partial_s$, vale anche $g_i^j = g_j^i$ e $f_i^j = f_j^i$.

Lemma 4

$$\sum_{i=1}^{m-\mu} \sum_{j=1}^{m-\mu} (f_i^j - g_i^j) = 0.$$

Lemma 5

$$\sum_{i,j=m-\mu+1}^m (f_i^j - g_i^j) = (\mu - 1)(\mu - 2)(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_1 - \omega_2)),$$

Lemma 5

dove

$$\omega_1 = \gamma(a_{k+1}^m(t), \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k)), \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(\tau_{m-\mu-1}^{m-\mu-1}(s, u_k)))$$

$$\omega_2 = \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), \psi_{k-\mu}^{m-\mu-1}(\tau_{m-\mu-1}^{m-\mu-1}(s, u_k)), \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k))).$$

Teorema 3

Lemma 6

Definiamo $\sigma = \sum_{i=1}^{m-\mu} \sum_{j=m-\mu+1}^m (f_i^j - g_i^j) + \sum_{i=m-\mu+1}^m \sum_{j=i}^{m-\mu} (f_i^j - g_i^j)$.

Allora,

$$\sigma = 2\mu(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k} (\omega_3 - \omega_4)),$$

dove

$$\omega_3 = \gamma(a_{k+1}^m(t), \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k)), \psi_{k-\mu+2}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k)))$$

$$\omega_4 = \gamma(a_{k-\mu+1}^{m-\mu+1}(t), \psi_{k-\mu}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k)), \psi_{k-\mu+1}^{m-\mu}(\tau_{m-\mu}^{m-\mu}(s, u_k))).$$

Teorema 3

Siano dunque ω_j definiti come sopra. Come conseguenza dei lemmi 5 e 6, possiamo esprimere la discontinuità dell'accelerazione covariante come

$$\Delta_2 = (\mu-1)(\mu-2)(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_1-\omega_2)) + 2\mu(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_3-\omega_4)).$$

La dimostrazione del Teorema 3 si completa in due passi: supponiamo prima $\nu = 0$.

Teorema 3

Siano dunque ω_j definiti come sopra. Come conseguenza dei lemmi 5 e 6, possiamo esprimere la discontinuità dell'accelerazione covariante come

$$\Delta_2 = (\mu-1)(\mu-2)(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_1-\omega_2)) + 2\mu(D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_3-\omega_4)).$$

La dimostrazione del Teorema 3 si completa in due passi: supponiamo prima $\nu = 0$.

Per il Lemma 1, $P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k) = P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)$, e

$$P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k) = \gamma(h, P_{k-\mu}^{m-\mu-1}(u_k), P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)) = P_{k-\mu+1}^{m-\mu-1}(u_k)$$

Teorema 3

Dato che $d_0 \exp_Q = 1_{T_Q M}$, ci basta mostrare che

$$\frac{1}{(\mu - 1)(\mu - 2)} \Delta_2 = \frac{1}{(u_k - u_{k-\mu})(u_k - u_{k-\mu-1})} v_0 \\ + \frac{1}{(u_{k+1} - u_k)(u_{k+2} - u_k)} v_1.$$

Teorema 3

Dato che $d_0 \exp_Q = 1_{T_Q M}$, ci basta mostrare che

$$\frac{1}{(\mu-1)(\mu-2)} \Delta_2 = \frac{1}{(u_k - u_{k-\mu})(u_k - u_{k-\mu-1})} v_0 + \frac{1}{(u_{k+1} - u_k)(u_{k+2} - u_k)} v_1.$$

La dimostrazione si conclude mostrando che

$$D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_1) = D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_3) = \frac{v_1}{(u_{k+1} - u_k)(u_{k+2} - u_k)}$$

e

$$D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_2) = D_s|_{s=u_k} \partial_t|_{t=u_k}(\omega_4) = -\frac{v_0}{(u_k - u_{k-\mu})(u_k - u_{k-\mu-1})}.$$

Teorema 3

Per il caso $v \neq 0$, abbiamo bisogno di uno strumento aggiuntivo:

Definizione

Un campo di Jacobi J lungo una geodetica γ su una varietà Riemanniana geodeticamente completa è una soluzione dell'equazione differenziale

$$D_t^2 J + R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Qui, R indica il tensore di Riemann ([Mar24], p.311).

Teorema 3

Per il caso $v \neq 0$, abbiamo bisogno di uno strumento aggiuntivo:

Definizione

Un campo di Jacobi J lungo una geodetica γ su una varietà Riemanniana geodeticamente completa è una soluzione dell'equazione differenziale

$$D_t^2 J + R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Qui, R indica il tensore di Riemann ([Mar24], p.311).

Fatto

Ogni campo di Jacobi lungo γ si decompone come $(a + bt)\dot{\gamma} + J^\perp$.

Lemma 7

Siano p e q abbastanza vicini, e sia $\gamma(t) = \gamma(t, p, q)$. Allora,

- 1 $J_0(t) = (d_{t\gamma(0)} \exp_p)(tD_s|_{s=0} J_0(s))$ è un campo di Jacobi lungo γ nullo in 0;
- 2 $J_1(t) = (d_{-(1-t)\gamma(1)} \exp_q)(-(1-t)D_s|_{s=1} J_1(s))$ è un campo di Jacobi lungo γ nullo in 1.

Teorema 3

Lemma 7

Siano p e q abbastanza vicini, e sia $\gamma(t) = \gamma(t, p, q)$. Allora,

- 1 $J_0(t) = (d_{t\gamma(0)} \exp_p)(tD_s|_{s=0} J_0(s))$ è un campo di Jacobi lungo γ nullo in 0;
- 2 $J_1(t) = (d_{-(1-t)\gamma(1)} \exp_q)(-(1-t)D_s|_{s=1} J_1(s))$ è un campo di Jacobi lungo γ nullo in 1.

Supponiamo adesso di avere una superficie embedded in M , parametrizzata da una funzione $\xi(s, t)$; supponiamo anche che per ogni s_0 , la curva $\xi(s_0, t)$ sia una geodetica.

Fatto

Il campo $\partial_s|_{s=s_0} \xi(s, t)$ è un campo di Jacobi lungo $\xi(s_0, t)$.

Teorema 3

A questo punto, la dimostrazione procede osservando che le ω_j danno origine a delle geodetiche come illustrato, le derivate in s dei campi di Jacobi, e usando il Lemma 7 si riescono ad esprimere le derivate covarianti di tali campi in termini del differenziale della mappa esponenziale nei punti scelti.

Le espressioni che si ricavano, unite a dei calcoli piuttosto laboriosi, danno la tesi.

- [Far99] G. Farin. *NURBS: From Projective Geometry to Practical Use*. A.K.Peters, Ltd., 1999.
- [KKS95] M.-J. Kim, M.-S. Kim e S. Shin. “A C^2 continuous B-spline quaternion curve interpolating a given sequence of solid orientations”. In: *Proc. Computer Animations (1995)*, pp. 72–81.
- [Mar24] B. Martelli. *Manifolds*. Self-published, 2024.
- [Pop06] T. Popiel. “On parametric smoothness of generalized B-spline curves”. In: *Computer Aided Geometric Design (2006)*, pp. 655–668.

Grazie per l'attenzione!