Period Maps viste infinitesimalmente

Enrico Berni, 582049

February 26, 2024

Data una varietà complessa, l'insieme delle strutture complesse vicine alla struttura complessa data è completamente descritto dal teorema di Kuranishi, che enunceremo dopo aver introdotto qualche concetto ausiliare. Successivamente, esamineremo più da vicino la derivata della period map, che porta con se' invarianti di algebra multilineare.

1 Deformazioni di varietà complesse compatte

Nel Capitolo 4 abbiamo considerato famiglie lisce di varietà complesse compatte. In questo capitolo fisseremo una varietà complessa compatta X_o, vista come isomorfa a una fibra speciale su un punto o contenuto in una base liscia S di una tale famiglia $f : X \to S$, che verrà detta deformazione di X_o.
Due deformazioni $f : X \to S$ e $g : Y \to T$ si dicono isomorfe se esiste un biolomorfismo tra X e Y che preserva le fibre e che induce l'identità quando ristretto a X_o (ricordiamo che l'identificazione di X_o come fibra su un punto è parte del dato). Osserviamo inoltre che un tale isomorfismo non deve essere l'identità quando $S = T$.
Vedremo poi che è naturale considerare basi più generali di varietà complesse, ma per il momento possiamo supporre che sia S che X lo siano.
Abbiamo visto nel Capitolo 4 che una qualsiasi fibra X_t della deformazione è diffeomorfa a X_o. Lo abbiamo dimostrato scegliendo un cammino liscio γ da o a t, e sollevando il campo vettoriale della velocità a $f^*{-1}\gamma \subset X$. Lo abbiamo fatto in due passi; il primo è locale, e può essere usato anche per sollevare campi vettoriali olomorfi sulla base a campi vettoriali olomorfi su un aperto di X. Il secondo passo usava una partizione dell'unità, e non può quindi essere usato nel contesto complesso. Infatti, potremmo avere dei cambiamenti non banali nella struttura olomorfa quando passiamo da X_o a X_t. L'idea è che strizzando S se necessario, possiamo ricoprire X con delle carte $\{U_j\}_{j\in I}$ sulle quali possiamo sollevare un germe dato di un campo vettoriale olomorfo locale v vicino ad o; chiamiamo $\bar{v}_j$ questo sollevamento. Allora, le differenze $\bar{v}_i - \bar{v}_j$ nelle intersezioni $U_i \cap U_j$ non vuote definiscono un cociclo di Čech a valori nel fascio Θ_{X_o} dei germi dei campi vettoriali olomorfi sulla fibra X_o. Questo definisce la classe di Kodaira-Spencer $\theta(v) \in H^1(X_o, \Theta_{X_o})$. Si potrebbe

verificare che la classe è indipendente dai sollevamenti scelti. È chiaro che $\theta(v)$ dipende linearmente dalla direzione tangenziale v, così da ottenere una mappa lineare

$$\rho : T_{S,o} \longrightarrow H^1(X_o, \Theta_{X_o})$$

detta mappa di Kodaira-Spencer, che misura la variazione infinitesimale della struttura complessa vicino ad o, nelle varie direzioni tangenziali.
La prossima domanda è se questo rifletta o meno dei veri cambiamenti nella struttura complessa di modo che una mappa di Kodaira-Spencer che si annulla implichi la locale banalità della famiglia esaminata, cioè che la famiglia sia isomorfa alla famiglia prodotto $X_o \times S$.
Questo in generale non è vero, a causa di un fenomeno di salto di dimensione degli spazi vettoriali $H^1(X_t, \Theta_{X_t})$ al variare di t. Tuttavia, se queste dimensioni sono localmente costanti in o, allora ρ rileva adeguatamente le deviazioni nella struttura prodotto vicino ad o. Per ulteriori dettagli e una discussione più approfondita, rimandiamo a [7].
Ritornando alle deformazioni, ci possiamo chiedere se ne esista una massimale in un qualche senso, dalla quale derivare le altre in maniera standard. Le nozioni rilevanti qua sono quelle di deformazione indotta e completezza. Partiamo con la prima: sia $\phi : (T, o) \to (S, o)$ una mappa olomorfa che preserva il punto base. Il prodotto fibrato su S della nostra deformazione $f : X \to S$ e $\phi : T \to S$ ci dà una nuova deformazione di X_o, detta famiglia pullback o famiglia indotta da ϕ. Per quanto riguarda la seconda nozione, una deformazione di X_o si dice completa se una qualsiasi altra deformazione di X_o è indotta da essa. Se la mappa che le induce è unica, la deformazione si dice universale; se è unica soltanto la sua derivata al punto base, si dice versale. Le famiglie versali sono uniche a meno di isomorfismo, quantomeno localmente nel punto base.
Esiste un criterio molto utile per la completezza, la cui dimostrazione si trova in [6]:

Teorema 1.1. *Una famiglia liscia di varietà complesse compatte con mappa di Kodaira-Spencer suriettiva è completa nel punto base. In particolare, se la mappa di Kodaira-Spencer è bigettiva, la famiglia è versale.*

Infine, una domanda naturale riguarda l'esistenza di deformazioni versali o universali. La risposta è negativa, almeno se ci restringiamo a famiglie la cui base sia una varietà. C'è tuttavia un caso speciale che è possibile trattare nel contesto delle varietà. Il seguente risultato è ancora dovuto a Kodaira, Nirenberg e Spencer, vedi [7]:

Teorema 1.2. *Se $H^2(X, \Theta_X) = 0$, esiste una deformazione versale di X la cui mappa di Kodaira-Spencer sia un isomorfismo.*

Non è eccessivamente difficile mostrare che, se anche $H^0(X, \Theta_X) = 0$, la famiglia versale è anche universale.
Un paio di esempi:

1. Se C è una curva di genere $g > 1$, il teorema precedente implica che la base della deformazione versale è liscia, ha dimensione $\dim H^1(C, \Theta_C) = \dim H^1(C, \Omega_C^{\otimes 2}) = 3g - 3$, ed è universale.

2. Sia X un'ipersuperficie liscia in $\mathbb{CP}^{n+1}$ di grado d. Mostriamo sotto che eccetto per le quartiche in $\mathbb{CP}^3$, una famiglia versale con base liscia può essere ottenuta dalla famiglia di tutte le ipersuperfici lisce di grado d in $\mathbb{CP}^{n+1}$, se ristretta a una fetta S_F trasversa all'orbita secondo PGL del punto base F nello spazio dei parametri. Si può anche mostrare che $H^0(X, \Theta_X) = 0$ se $n \geq 2$ e $d \geq 3$. In questi casi, la famiglia versale è universale.

2 Enter: il punto denso

Come detto in precedenza, il problema dell'esistenza di deformazioni versali non può essere risolto senza spazi di parametri più generali. Servono infatti degli spazi complessi; ricordiamone la definizione. Come per le varietà, si parte con dei modelli locali adatti, che saranno i sottospazi analitici di un aperto $U \subseteq \mathbb{C}^n$. Un tale sottospazio analitico è definito specificando una quantità finita di funzioni analitiche in U, $f_1, ..., f_n$. Queste definiscono prima di tutto un insieme, $V = V(f_1, ..., f_n)$, che altro non è che il luogo dei punti dove si annullano; in seconda battuta, definiscono un sottofascio $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_U$ del fascio dei germi delle funzioni olomorfe in U, prendendo in ogni punto l'ideale generato dai loro germi nel punto. Pertanto, V è il supporto del fascio, e le funzioni analitiche su V sono le sezioni del fascio quoziente $\mathcal{O}_U/\mathcal{F}$. In realtà basterebbe il solo dato di $\mathcal{F}$, dal momento che determina V, ma l'inverso non è vero.
Avendo descritto i nostri modelli locali, possiamo incollarli per formare uno spazio complesso X. Un modo facile di farlo è quello di dare a X una struttura di spazio anellato specificando un sottofascio del fascio delle funzioni da X a valori complessi. Questo sottofascio è un fascio di $\mathbb{C}$-algebre, e in ogni modello locale dello stesso tipo, questo è isomorfo proprio a $\mathcal{O}_U/\mathcal{F}$.
Ricapitolando, uno spazio complesso è uno spazio anellato di Hausdorff, localmente isomorfo come spazio anellato a un sottospazio analitico di un aperto di $\mathbb{C}^n$.
Per esempio, fissato un naturale $n \in \mathbb{N}$, abbiamo il punto denso di ordine n, indicato con O_n dato dal sottospazio di $\mathbb{C}$ definito dall'ideale (z^n) nell'anello delle serie formali convergenti in una variabile. Il punto O_2, come vederemo, ha un ruolo naturale nella teoria delle deformazioni.
Per generalizzare la nozione di deformazione al caso in cui la base sia un qualsiasi spazio complesso, ricordiamo che una mappa olomorfa tra spazi complessi $f : X \to Y$ è una sommersione se X è localmente diffeomorfo al prodotto di un aperto di $\mathbb{C}^n$ e un aperto della base, di modo che tramite questo diffeomorfismo f sia una proiezione sul secondo fattore. Osserviamo che, come conseguenza, le fibre di f sono varietà. Nel caso in cui

sia X che Y siano varietà, f è una sommersione se lo è nel senso usuale, cioè se il suo differenziale è suriettivo ovunque. Questo fatto motiva la seguente definizione:

Definizione 2.1. *1. Una famiglia di varietà su S, detta anche con base S, è una sommersione olomorfa suriettiva $f : X \to S$ tra spazi complessi, tale che le fibre siano connesse. Diciamo che la famiglia è compatta se f è propria. Una famiglia è detta deformazione di una varietà data X_o se la fibra su o è isomorfa alla varietà di partenza X_o. Se X_o è compatta, richiediamo che la famiglia lo sia.*

2. Se $f : X \to S$ è una famiglia di varietà su S, e $\phi : T \to S$ è una mappa olomorfa, la famiglia indotta è il profotto fibrato di f e ϕ, visto come famiglia su T.

Adesso possiamo introdurre i concetti di deformazione indotta e deformazione completa, famiglie versali ed universali. La mappa di Kodaira-Spencer ha una descrizione particolarmente elegante, usando le deformazioni sul punto denso O_2. Infatti, l'insieme delle classi di isomorfismo delle deformazioni su O_2 può essere identificato con $H^1(X_o, \Theta_{X_o})$. Dato che ogni vettore tangente ζ al punto base o di una data deformazione $f : X \to S$ può essere visto come un morfismo del punto denso O_2 in (S, o), possiamo considerare la deformazione indotta sul punto denso, e questo ci dà un elemento $\kappa(f)(\zeta) \in H^1(X_o, \Theta_{X_o})$, detto classe di Kodaira-Spencer della deformazione. Questi dati definiscono la mappa di Kodaira-Spencer

$$\rho := \kappa(f) : T_{S,o} \longrightarrow H^1(X_o, \Theta_{X_o})$$

È possibile verificare che la mappa così definita coincide con la definizione classica se S è una varietà.
Arrivati a questo punto, possiamo enunciare il teorema di esistenza dovuto a Kuranishi ([2]):

Teorema 2.1 (Kuranishi, [8])**.** *Sia X una varietà complessa compatta. Esiste una deformazione versale con mappa di Kodaira-Spencer bigettiva. Se $H^0(X, \Theta_X) = 0$, la deformazione può essere scelta universale. La base S della deformazione è la fibra sull'origine di una mappa olomorfa tra intorni dell'origine in $H^1(X, \Theta_X)$ e $H^2(X, \Theta_X)$ con derivata nulla nell'origine. In particolare, S è liscia precisamente quando questa mappa è identicamente nulla.*

Osserviamo che il teorema di esistenza della sezione precedente è il caso particolare quando $H^2(X, \Theta_X) = 0$, cioè quando S è liscia.
La deformazione versale di X la cui esistenza è enunciata nel precendente teorema è detta famiglia di Kuranishi, o deformazione di Kuranishi di X, e lo spazio dei parametri si dice spazio di Kuranishi. Infatti, solo il germe della famiglia di Kuranishi intorno alla fibra sul punro base è ben definita, e lo stesso vale per lo spazio di Kuranishi: solo il suo germe nel punto base è ben definito. Ci sono esempi in cui lo spazio di Kuranishi è liscio anche se $H^2(X, \Theta_X)$ non è nullo, come nel seguente esempio:

Supponiamo che X sia una varietà di Calabi-Yau, cioè che abbia dimensione 3, e che K_X sia banale. Per la dualità di Kodaira-Serre, lo spazio delle ostruzioni $H^2(X, \Theta_X)$ è duale a $H^1(\Omega^1_X)$, che sicuramente non si annulla quando X è di Kähler. Per un risultato contenuto in [10], lo spazio di Kuranishi è liscio.
Potremmo spingerci oltre e guardare alle deformazioni di spazi complessi. [3] e [11] hanno sviluppato la teoria nel caso degli spazi complessi compatti. Per singolarità isolate di uno spazio non necessariamente compatto, queste deformazioni furono esaminate da [5], [4] e [9]. Qualche anno più tardi, [1] dette una trattazione uniforme del problema.

3 Il differenziale della period map

In questa sezione, diamo un'interpretazione del differenziale della period map di una variazione geometrica come una costruzione di algebra lineare che coinvolge la mappa di Kodaira-Spencer della deformazione sottostante.
Iniziamo dando la nozione di variazione astratta di una struttura di Hodge su una varietà puntata (S, o) piccola abbastanza, con period map

$$\mathcal{P} : S \longrightarrow D$$

dove D è un dominio per strutture di Hodge polarizzate con peso w, su un gruppo abeliano libero $H_{\mathbb{Z}}$ di rango finito, dotato di una forma bilineare $(-1)^w$-simmetrica b.
Sia

$$\bigoplus_{p+q=w} H_F^{p,q}$$

la decomposizione di Hodge corrispondente al punto base $o \in S$. Affermiamo che questo induce una decomposizione sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di endomorfismi di $H = H_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$;

$$\mathfrak{g} = End(H, b)$$

La dimostrazione usa il seguente modo per riformulare l'antisimmetria di b;

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Ker}(s : End(H) \to End(H))$$

$$s : \xi \longmapsto \xi + \xi^t$$

Qui la trasposizione è definita dall'equazione

$$b(\xi u, v) = b(u, \xi^t v)$$

Per ogni $u, v \in H$, ben definita perché b è non degenere.
Enunciamo dunque, e dimostriamo, l'affermazione fatta sopra in modo più elegante:

Lemma 3.1. *1. La scelta di una reference Hodge structure su D definisce una struttura di Hodge di peso reale 0 su $End(H)$.*

2. *L'omomorfismo s definito sopra è un morfismo di strutture di Hodge, e $\mathfrak{g}$ eredita la struttura di Hodge di $End(H)$; in particolare, la sua $(p,-p)$-componente è data da*

$$\mathfrak{g}^{p,-p} = \{\xi \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} | \xi(H^{r,s}) \subseteq H^{r+p,s-p} \textit{per ogni } (r,s)\}$$

Proof. 1. Lo spazio $End(H)$ eredita una struttura di Hodge di peso 0 come conseguenza della funtorialità delle strutture di Hodge.

2. Supponiamo che ξ abbia peso $(-r,r)$, e sia $u \in H^{p+r,q-r}$. Allora, $\xi u \in H^{p,q}$, e per la prima relazione bilineare $b(\xi u, v) = 0$, a meno che non valga $v \in H^{q,p}$. D'altra parte, abbiamo che $b(u, \xi^t v) = 0$,a meno che non valga $\xi^t v \in H^{q-r,p+r}$, da cui segue che anche $\xi^t v$ ha peso $(-r,r)$.
Pertanto, la trasposizione si estende a un morfismo di strutture di Hodge, e dunque anche s lo è, da cui segue che $\mathfrak{g}$ ne eredita una.

□

Osserviamo che il sottospazio $\mathfrak{g}^{-1,1}$ corrisponde alle direzioni tangenziali per le quali vale la trasversalità di Griffiths, cioè tali che

$$d\mathcal{P}_o : T_{S,o} \longrightarrow T^{-1,1}_{D,F} = \mathfrak{g}^{-1,1}$$

Prima di descrivere questo differenziale, ricordiamo che abbiamo visto in precedenza che su S i fibrati della filtrazione di Hodge $\mathcal{F}^p$ sono sottofibrati olomorfi del fibrato $\mathcal{H}$, ma che i sottofibrati $\mathcal{H}^{p,q}$ sono solo sottofibrati di C^∞. I fibrati stessi hanno ancora una struttura olomorfa tramite l'isomorfismo

$$\mathcal{H}^{p,q} \cong Gr^p_{\mathcal{F}}\mathcal{H}$$

Infatti, il membro destro ha una naturale struttura olomorfa, essendo quoziente del fibrato olomorfo $\mathcal{F}^p$ per $\mathcal{F}^{p+1}$. Il membro sinistro, con la sua struttura olomorfa, è detto (p,q)-fibrato di Hodge.
Il fibrato di Hodge totale è dunque per definizione

$$\mathcal{H}_{Hdg} = Gr_{\mathcal{F}}\mathcal{H} = \bigoplus_p Gr^p_{\mathcal{F}}\mathcal{H} \cong \bigoplus_{p+q=w} \mathcal{H}^{p,q}$$

Questo fibrato, con la sua struttura olomorfa, è il fibrato sottostante a un cosiddetto fibrato di Higgs, che tratteremo in maggior dettaglio in seguito.
La restrizione di $d\mathcal{P}_o$ sulle componenti del fibrato di Hodge può essere descritto come segue:

Lemma 3.2. *La connessione di Gauss-Manin del sistema locale sottostante la variazione della struttura di Hodge induce mappe $\mathcal{O}_S$-lineari sui fibrati di Hodge,*

$$\sigma^p : Gr^p_{\mathcal{F}}\mathcal{H} \longrightarrow Gr^{p-1}_{\mathcal{F}}\mathcal{H} \otimes \Omega^1_S$$

Sia ora $F = \mathcal{P}(o)$. Per ogni vettore tangente $t \in T_oS$, la mappa lineare indotta sulle fibre in o del fibrato di Hodge totale $\mathcal{H}_{Hdg}$ è un endomorfismo di tipo $(-1, 1)$, e abbiamo

$$d\mathcal{P}_o(t) = \bigoplus_p \sigma^p(t) \in End^{-1,1}\mathcal{H}_{Hdg}$$

Proof. Dalla trasversalità di Griffiths, la connessione piatta canonica ∇ mappa una qualsiasi sezione olomorfa s di $\mathcal{F}^p$ vicino ad o in una sezione di $\mathcal{F}^{p-1} \otimes \Omega^1_S$. Sia f il germe in o di una funzione olomorfa. La regola di Leibniz implica che $\nabla(fs) = f\nabla(s)$ modulo $\mathcal{F}^p$, e dunque ∇ diventa $\mathcal{O}_S$-lineare come mappa da $Gr^p_{\mathcal{F}}\mathcal{H}$ a $Gr^{p-1}_{\mathcal{F}}\mathcal{H} \otimes \Omega^1_S$. Dunque, abbiamo un fibrato olomorfo che è chiaramente di tipo $(-1, 1)$. Dato che il differenziale della period map è dato dall'azione di ∇ su $Gr_{\mathcal{F}}\mathcal{H}$, segue la tesi. □

Diamo un'interpretazione di cosa succede nel caso in cui abbiamo una variazione che viene dalla coomologia primitiva di una famiglia proiettiva su una varietà base (S, o). Sia X la fibra sul punto base. Ricordiamo che un vettore tangente $t \in T_oS$ determina una classe di Kodaira-Spencer $\kappa(t) \in H^1(X, \Theta_X)$. La contrazione con $\kappa(t)$ definisce una mappa lineare $\Omega^p_X \to \Omega^{p-1}_X$, e quindi una mappa lineare

$$\delta^p : H^q_{prim}(\Omega^p_X) \longrightarrow H^{q+1}_{prim}(\Omega^{p-1}_X)$$

Possiamo identificare $H^q_{prim}(X, \Omega^p_X)$ e la fibra in o di $\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1}$.

Lemma 3.3. *Consideriamo la variazione di struttura di Hodge su una varietà contrattile (S, o) associata con la coomologia primitiva delle fibre di una famiglia proiettiva liscia su S. Sia X la fibra su o. Il differenziale della period map in o in direzione t è il prodotto cup con la classe di Kodaira-Spencer $\kappa(t) \in H^1(X, \Theta_X)$, cioè*

$$\delta^p(t) = \sigma^p_F(t)$$

dove F corrisponde alla fibra in o di $\mathcal{F}$.

Proof. La classe di Kodaira-Spencer $\kappa(t)$ può essere calcolata in un ricoprimento di Čech $\{U_j\}$ di X prendendo prima dei sollevamenti $\tilde{t}_j$ di v, e poi prendendo la classe dell'1-cociclo dato da $\tilde{t}_j - \tilde{t}_k$ su $U_j \cap U_k$. Ora, la mappa $\sigma^p(t) : \mathcal{H}^{p,q}_F \to \mathcal{H}^{p-1,q+1}_F$ indotta dalla connessione di Gauss-Manin può essere calcolata, e si trova che a livello di cocicli troviamo il prodotto cup con l'1-cociclo $\{\tilde{t}_j - \tilde{t}_k\}$. □

Combinando i due lemmi, troviamo il seguente

Teorema 3.1. *Sia X la fibra su o di una famiglia proiettiva su una varietà base contrattile S. Il prodotto cup con la classe di Kodaira-Spencer $\kappa(v)$ definisce mappe lineari*

$$\delta_p(t) = \lambda_p(\kappa(t)) : H^q_{prim}(X, \Omega^p_X) \longrightarrow H^{q+1}_{prim}(X, \Omega^{p-1}_X)$$

con $p+q=w$. *Queste sono le componenti non nulle dell'endomorfismo* $\delta(t)$ *di* $H^w_{prim}(X,\mathbb{C})$ *corrispondente al differenziale della period map* $\mathcal{P}: S \to D$ *in* o *in direzione* v. *Esiste dunque il diagramma commutativo seguente*

$$\begin{tikzcd} T_{S,o} \arrow[rr, "\kappa"] \arrow[dr, "\delta"'] & & H^1(X,\Theta_X) \arrow[dl, "\lambda"] \\ & End^{-1,1} H^w_{prim}(X,\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

in cui λ *viene dal prodotto cup.*

References

[1] J. Bingener. “Lokale Modulräume in der analytischen Geometrie I, II”. **in***Aspects of Mathematics*: (1987).

[2] A. Douady. “Le problème de modules pour le variétés analytiques complexes”. **in***Sém. Bourbaki*: (1985).

[3] H. Grauert. “Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Raüme”. **in***Inv. Math.*: (1974).

[4] H. Grauert. “Über Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen.” **in***Inv. Math.*: (1972).

[5] Donin I.F. “On deformations of non-compact complex spaces”. **in***Russ. Math. Surv.*: (1978).

[6] D. Spencer Kodaira K. “A Theorem of Completeness for Complex Analytic Fibre Spaces”. **in***Acta Math.*: (1962).

[7] L. Nirenberg Kodaira K. **and** D.Spencer. “On the Existence of Deformations of Complex Structures”. **in***Ann. Math.*: (1958).

[8] M. Kuranishi. “New proof for the existence of locally complete families of complex analytic structures”. **in***Proc. Conf. Complex Analysis*: (1965).

[9] G. Pourcin. “Déformations de singularités isolées.” **in***Astérique*: (1974).

[10] G. Tiang. “Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi–Yau manifolds and its Petersson–Weil metric”. **in***Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi–Yau manifolds and its Petersson–Weil metric*: (1986).

[11] Palamodov V. “Deformations of complex spaces”. **in***Russ. Math. Surv.*: (1976).