Poliedri ed origami modulari.

Settimana Matematica al Dipartimento di Matematica di Pisa
Laboratorio 3: *A proposito di poliedri: dimostrazioni, confutazioni e robot*
Responsabile: Prof.Abbondandolo

Pietro Battiston

8 Febbraio 2007

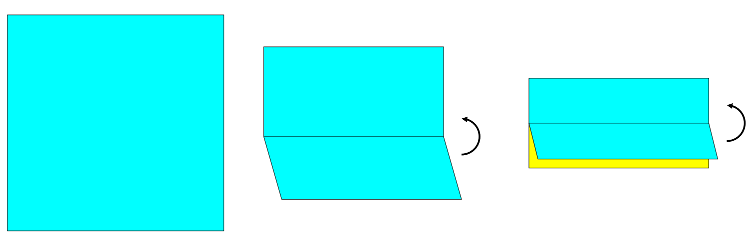
La pagina *Origami* di Wikipedia Italia comincia così:

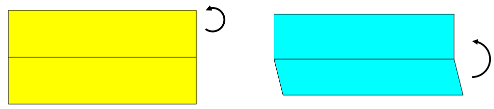
"*L'origami è l'arte di piegare la carta (dal giapponese* ori*, piegare e* kami *carta).*"

L'origami classico parte da un singolo pezzo di carta, solitamente un quadrato, per realizzare, senza utilizzo di colla e forbici, strutture anche molto complesse.
Gli origami modulari sono invece particolari origami composti da tanti pezzi identici l'uno all'altro. Sono probabilmente il modo più semplice e matematicamente interessante per creare complesse figure geometriche tridimensionali.

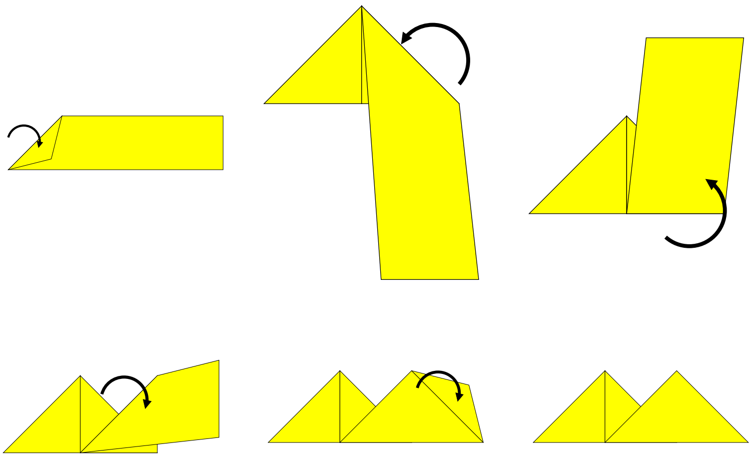
1 "Art Attack" (senza colla vinilica)

Esistono svariati moduli con cui è possibile costruire poliedri, e ogni modulo ha le sue caratteristiche e le sue limitazioni. Di seguito, è spiegata la costruzione del modulo che abbiamo utilizzato: il *PHIZZ*, inventato da Tom Hull, professore di geometria combinatoria al Merrimack College, nel New Hampshire.
Si parte da un quadrato, che si piega a metà parallelamente a un lato; quindi si ripiegano all'esterno, sempre a metà e sempre lungo la stessa direzione, le due parti ottenute, fino ad ottenere un rettangolino a "fisarmonica":

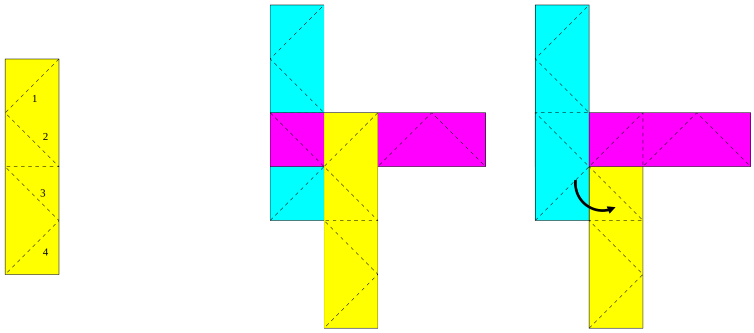




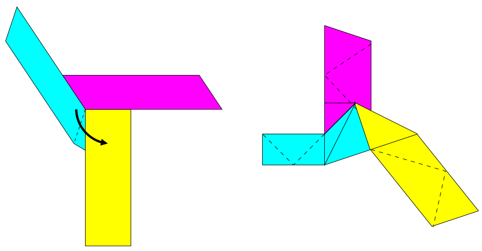
Da questo rettangolo, che ha un rapporto tra i lati 4:1, prenderà forma il nostro modulo. La sua struttura a fisarmonica ci serve solo per poter poi incastrare tra di loro, inserendoli uno nell'altro, diversi moduli, così da unirli.



Il modulo PHIZZ sarà la parte essenziale per creare i nostri poliedri. Ogni modulo infatti corrisponde ad uno spigolo, ed in ogni vertice si uniscono 3 moduli, nel modo descritto di seguito. Innanzitutto i moduli vanno riaperti nei rettangoli di origine. Si può così notare su ogni modulo le tracce delle 4 piegature oblique: numeriamole da 1 a 4.
Per unire 3 mduli, ognuno dovrà avere una diagonale *esterna* (la 1 o la 4) che combacia con una diagonale *interna* (la 2 o la 3) di un altro. La figura al centro, che è possibile realizzare nel piano, mostra una diagonale esterna del modulo giallo appoggiata su una interna di quello fucsia, e una esterna di quello fucsia appoggiata su una interna di quello azzurro. Nella figura successiva, i moduli, invece che appoggiati, sono stati inseriti uno nell'altro, sfruttando la struttura a fisarmonica. Manca ancora un passo però: la diagonale esterna del pezzo azzurro dovrebbe combaciare con la diagonale interna del pezzo giallo.



Risulterà evidente che questo ultimo passaggio non è raggiungibile continuando a lavorare con una figura piana: dobbiamo passare alle 3 dimensioni. Un buon modo di inserire anche l'ultimo pezzo al suo posto è piegare momentaneamente ognuno dei 3 moduli in modo tale da separare un quadrato "esterno" dagli altri 3 quadrati, e di assemblare i 3 moduli in modo tale che questi quadrati esterni assumano la posizione di altrettante facce "adiacenti" (ovvero, che condividono *un vertice*) di un cubo.



Quando ogni estremità è al suo posto, ripiegando lungo le piegature diagonali (e facendo invece scomparire quella ortogonale appena descritta) si ottiene il nodo vero e proprio. Avendo inserito gli elementi uno nell'altro e avendo piegato per "bloccarli", il nodo è non solo bello da vedersi ma soprattutto discretamente robusto.

Osserviamo che esattamente la metà di ogni modulo è "impegnata" nel nodo, mentre le altre estremità rimangono libere per attaccarsi ad altri nodi. Per creare un poliedro, si comincia a costruire una faccia, concatenando diversi nodi: poi, sempre costruendo nodi sulle estremità rimaste libere, si attacca altre facce, e così via fino a che non si costruisce un nodo con le ultime 3 estremità rimaste libere.

Detto così è semplice, ma nella pratica ci si accorge che con questi moduli è difficile fare quadrati, ed estremamente difficile fare triangoli. Infatti diventa necessario distorcere i moduli, e si ottiene strutture meno eleganti e solide.

2 Assalto al Pentagono

Appurato che non cercheremo quindi di costruire poliedri con facce che abbiano meno di 5 lati, viene naturale buttarsi sui pentagoni. Cominciando a chiudere una faccia ogni volta che raggiunge i 5 lati ci si accorgerà che dopo un po' (per la precisione dopo avere inserito 30 moduli) si ottiene un dodecaedro: 20 vertici, 30 spigoli, 12 facce. La cosa a pensarci è un po' sorprendente: non è necessario nessuno sforzo, nessuna attenzione particolare, per ottenere un dodecagono. E allora se io volessi fare un poliedro a facce pentagonali che ne abbia più (o meno) di 12?!

La risposta ci viene dalla formula di Eulero. Stiamo infatti trattando poliedri semplici e con facce semplicemente connesse, per cui deve valere la famosa equazione:

$$V - S + F = 2$$

, dove V è il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di facce.

Sia ora F_5 il numero di pentagoni nel poliedro che vogliamo costruire. Abbiamo detto che *tutte* le facce sono pentagoni, per cui ovviamente $F = F_5$. Ogni faccia ha 5 lati, ma una volta che queste facce sono "incollate" insieme gli spigoli si "fondono" a due a due, per cui $S = \frac{5F_5}{2}$; infine ogni faccia ha 5 angoli, ma una volta che vengono "incollate" questi angoli si "fondono" a tre a tre, per cui $V = \frac{5F_5}{3}$. Con questi dati, l'equazione di Eulero diventa:

$$2 = \frac{5}{3}F_5 - \frac{5}{2}F_5 + F_5$$

Moltiplicando a destra e a sinistra per 6 si ottiene:

$$12 = 10F_5 - 15F_5 + 6F_5 = F_5$$

Ovvero qualsiasi poliedro costituito solo da facce pentagonali e tale che in ogni vertice si incontrino esattamente 3 facce avrà in tutto esattamente 12 facce!

Osservazione: potrebbe essere allettante attribuire questa "costrizione algebrica" alla rigidità delle facce, agli angoli che esse hanno e in ultima analisi alla limitata flessibilità dei nostri moduli. Invece il risultato è ancora più sorprendente se si osserva che la formula di Eulero si applica perfettamente anche a facce non regolari, non piane o addirittura con lati curvilinei[1]
Precisiamo però, per evitare equivoci, che per noi un lato è la curva continua lungo la quale combaciano due facce. In altre parole, se due pentagoni confinano

[1] Anche se potrebbe sembrare che l'ammettere *facce non piane* costituisca una generalizzazione più ampia dell'ammettere *lati curvilinei*, è vero il contrario. Infatti se una faccia ha un lato curvilineo, necessariamente la faccia con cui condivide quel lato è non piana. Invece è possibile costruire "poliedri" con facce non piane ma senza spigoli curvilinei.

in due spigoli consecutivi per noi sono semplicemente due quadrati che combaciano in un solo spigolo, e se un pentagono ha due spigoli che combaciano tra di loro per noi è semplicemente un triangolo! Questa considerazione comunque non riguarda i nostri origami, dato che, perlomeno con questi moduli, è impossibile far combaciare due poligoni lungo due loro lati consecutivi.

3 ***Ripieghiamo*** sull'esagono?

Insomma, se non vogliamo ridurci a costruire solo e soltanto dodecaedri dobbiamo ammettere facce che non siano pentagoni... logicamente andando in ordine viene voglia di inserire qualche esagono. Se quindi F_6 è il numero degli esagoni, la formula di Eulero diventa:

$$\begin{aligned} 2 = \frac{5}{3}F_5 - \frac{5}{2}F_5 + F_5 + \frac{6}{3}F_6 - \frac{6}{2}F_6 + F_6 &= \frac{5}{3}F_5 - \frac{5}{2}F_5 + F_5 + (2-3+1)F_6 \\ &= \frac{5}{3}F_5 - \frac{5}{2}F_5 + F_5 \end{aligned}$$

Stranamente, l'equazione non è cambiata! Il numero di pentagoni deve essere sempre 12, e il numero di esagoni... beh, la formula di Eulero non ci impone nessuna restrizione! Vale la pena di osservare che abbiamo dimostrato che *non può esistere un poliedro formato di sole facce esagonali*: anche se questo sembra ovvio quando si parla di esagoni regolari (dato che con tali poligoni si può pavimentare il piano, non ci si aspetta che ci si possa creare poliedri), ricordiamo che il risultato si estende a facce non regolari o anche curvilinee.

Non è ovvio verificare che effettivamente, dato un *qualsiasi* numero naturale si può creare un "poliedro curvilineo" con 12 pentagoni e un tale numero di esagoni: verificare la formula di Eulero è una condizione necessaria ma non sufficiente. In ogni caso, a noi non interessa particolarmente, dato che ci occupiamo solo di ciò che possiamo ottenere con i nostri moduli, e cioé...

Le buckyball: con questo buffo nome vengono solitamente chiamati i poliedri di una particolare classe: quelli costituiti da 12 pentagoni (ma va'!) e un certo numero di esagoni *uniformemente distribuiti.* Più avanti daremo una definizione esatta di cosa significhi questa *uniformità*; per adesso basti qualche esempio:

- il dodecaedro è ovviamente la più piccola buckyball
- aggiungendo 4 esagoni (ognuno dei quali circondato da pentagoni), si ottiene un'altra buckyball formata da 42 spigoli (28 vertici e 16 facce)
- aggiungendo 20 esagoni (ovvero distanziando tutti i pentagoni tra di loro grazie ad una "corona" di esagoni), si ottiene... il pallone da calcio (formalmente, *tronco di icosaedro*): 32 facce, 90 spigoli e 60 vertici

E così via... le buckyball sono infinite, e hanno avuto il loro momento di celebrità quando si è scoperto che i *fullereni*, molecole costituite solo di atomi di carbonio (per la precisione una delle 4 configurazioni in cui è possibile trovare il carbonio in natura, insieme al diamante, alla grafite e alla cerafite), hanno esattamente la forma delle buckyball... e il fullerene che si trova più di frequente è proprio il C_{60}, con 60 atomi di carbonio, ovvero 60 vertici... il pallone da calcio!

4 Avanti il prossimo!

A questo punto il prossimo passo è fin troppo ovvio... se provassimo ad aggiungere qualche eptagono?

Sia F_7 il numero di eptagoni nel nostro poliedro; la formula di Eulero diventa:

$$2 = \frac{5}{3}F_5 - \frac{5}{2}F_5 + F_5 + \frac{6}{3}F_6 - \frac{6}{2}F_6 + F_6 + \frac{7}{3}F_7 - \frac{7}{2}F_7 + F_7$$

Moltiplicando, al solito, per 6 otteniamo:

$$12 = 10F_5 - 15F_5 + 6F_5 + 14F_7 - 21F_7 + 6F_7 = F_5 - F_7$$

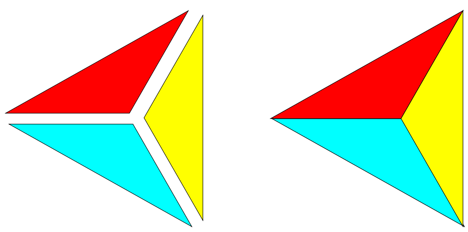
Ovvero: i pentagoni devono essere almeno 12; inoltre per ogni eptagono che aggiungiamo dobbiamo aggiungere anche un pentagono.
Sappiamo che quando utilizziamo la formula di Eulero, non supponiamo alcuna forma di rigidità metrica: in altre parole, stiamo giocando con dei poligoni di gomma: si possono deformare a piacere sia le forme dei lati che le loro lunghezze che le misure degli angoli.

Questo però è il momento giusto per fare anche qualche considerazione più "rigida"...

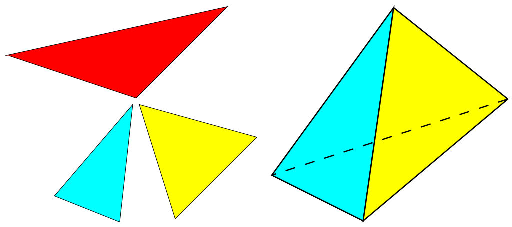
5 Curvature mozzafiato

Quando uniamo gli angoli di 3 o più poligoni facendo combaciare a due a due le facce, possiamo avere 3 situazioni:

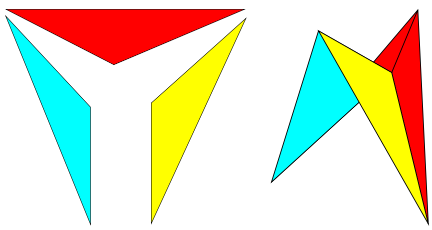
1. la somma degli angoli interni adiacenti è esattamente 360°: i poligoni formeranno una porzione di piano (l'esempio più lampante sono 3 esagoni regolari)



2. la somma degli angoli interni è minore di 360°: i poligoni saranno costretti a "sollevarsi" al di sopra del piano, creando il classico spigolo



3. la somma degli angoli è maggiore di 360°: i poligoni saranno costretti a discostarsi dal piano *sia al di sopra che al di sotto!*



   È facile verificare quest'ultimo caso incollando insieme, ad esempio, due angoli da 180° e uno da 90°, ottenibili semplicemente strappando in tre parti un foglio rettangolare.

In matematica, diciamo che una superficie ha *curvatura positiva* in un certo punto se siamo nel caso 2 e *curvatura negativa* se siamo nel caso 3... altrimenti si dice che la curvatura è nulla[2].

Per capire meglio, immaginiamo una formichina che stia su una faccia della figura del caso 2: supponiamo ora che la formichina parta dritta verso il vertice, finendo poi sulla faccia opposta; il suo percorso consisterà per forza in una salita seguita da una discesa, ovvero abbiamo quello che in analisi si chiama un *massimo*.

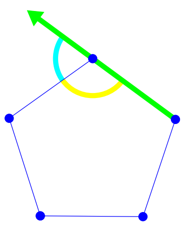
Immaginiamo ora una formichina su uno dei poligoni del caso 3: come prima, la facciamo andare diritta verso il vertice e poi nella faccia opposta: partendo da alcuni punti, il suo percorso consisterà in una salita seguita da una discesa, ma partendo da altri ci sarà una discesa seguita da una salita. Abbiamo quello che in analisi si chiama (e non è difficile capire perché) un *punto di sella*.

[2] Il concetto di curvatura può risultare tutto sommato abbastanza intuitivo, ma ci sono dei casi "inaspettati": ad esempio gli *spigoli* dei nostri poliedri, così come le pareti di un cilindro, hanno curvatura nulla! Infatti si possono ottenere semplicemente curvando un piano, e con questa trasformazione noi non modifichiamo *localmente* gli angoli che vi si trovano sopra.

Se poi mettiamo una formichina su uno dei poligoni del caso 1, passerà sul vertice senza neanche accorgersene, dato che il suo percorso non cambierà affatto direzione.

Si potrebbe dire che in realtà nella figura del caso 2 il vertice è un massimo solo perché è stata orientata così, ma se la si ribalta può diventare un minimo, o non essere né l'uno né l'altro...
Il punto è che invece la figura del caso 3 *non sarà mai* né un massimo né un minimo, a prescindere di come la si voglia orientare: per questo la differenza tra i due casi è *intrinseca* alla superficie, e non dipende da "come la guardiamo". Il caso 1 poi è evidentemente diverso dagli altri due.

Ma in che caso siamo noi con i nostri poliedri? Per saperlo dobbiamo calcolare i rispettivi *angoli interni*.



La misura di un angolo interno (in giallo, nella figura) si può ottenere sottraendo a 180 la misura dell'*angolo esterno*. A differenza di quanto si potrebbe pensare infatti, si dicono angoli esterni (in azzurro, nella figura) di un poligono non quelli formati esternamente da due lati adiacenti (non sono gli *esplementari* dei lati interni), ma da un lato ed il *prolungamento* di un suo lato adiacente (sono i *supplementari* degli angoli interni). E quanto valgono questi angoli esterni in un poligono regolare? Per capirlo, possiamo vederli come i *cambiamenti di direzione* che una formichina che percorre il perimetro del poligono deve effettuare ad ogni vertice. Siccome la formichina alla fine avrà fatto un giro completo (360°), ogni "svolta" consisterà in un angolo di $\frac{360}{n}$ gradi, e quindi gli angoli interni misurano ognuno $180 - \left(\frac{360}{n}\right)$ gradi.

Questo calcolo permette di trovare le seguenti misure:

Poligono regolare	**Numero di lati**	**Angoli esterni**	**Angoli interni**
pentagono	5	72°	108°
esagono	6	60°	120°
eptagono	7	$\approx 51°$	$\approx 129°$

Tabella 1: Misure degli angoli dei nostri poligoni regolari

Osserviamo che finché utilizzavamo pentagoni ed esagoni per i nostri origami noi avevamo in ogni vertice (in cui si incontrano sempre - ricordiamolo - 3 facce) una curvatura positiva o almeno nulla:

Numero di pentagoni	**Numero di esagoni**	**Somma degli angoli interni**
3	0	324°
2	1	336°
1	2	348°
0	3	360°

Tabella 2: Somma degli angoli interni in ogni vertice

Con l'arrivo degli eptagoni noi introduciamo la possibilità di creare vertici a curvatura negativa. Cosa significa in pratica? Significa che perdiamo la certezza che i nostri poliedri siano *convessi*: quando abbiamo un vertice "normale", tutti i punti vicini stanno "dalla stessa parte" (esiste un piano che tocca il vertice e che chiude tutto il poliedro in un semispazio), ma quando abbiamo un punto di sella questo non è più vero, e di conseguenza anche i segmenti che congiungono due punti della superficie possono essere talvolta esterni e talvolta interni al nostro poliedro.
In sostanza, alla superficie del nostro poliedro possiamo aggiungere degli avvallamenti e delle bozze con gli eptagoni, ma tali avvallamenti devono essere compensati (sui loro "bordi") da una curvatura positiva maggiore da parte dei pentagoni, che perciò devono essere di più[3].

6 Ciambelle... sbav...

E possiamo aggiungere ottagoni, ennagoni... ma ormai non ci aspettiamo più cambiamenti *qualitativi*: esisteranno spigoli con curvatura sempre più negativa e saranno necessari sempre più pentagoni per compensare.

Invece possiamo fare un altro passaggio interessante cercando di non limitarci più a soli poliedri *semplicemente connessi*. Infatti se pensiamo ad una superficie chiusa che abbia in qualche suo punto una curvatura negativa ci verrà probabilmente in mente il *toro*. Proviamo quindi ad applicare la formula di Eulero generalizzata al caso in cui il nostro poliedro abbia un buco (*genere* $g = 1$):

$$V - S + F = \chi = 2 - 2g = 0$$

Riformulando, come sopra, V, S e F in termini di F_5, F_6, F_7 otteniamo:

$$0 = 10F_5 - 15F_5 + 6F_5 + 14F_7 - 21F_7 + 6F_7 = F_5 - F_7$$

Ovvero: per gli esagoni abbiamo di nuovo una certa libertà, invece per ogni eptagono che vogliamo mettere dobbiamo aggiungere un pentagono[4]. Come

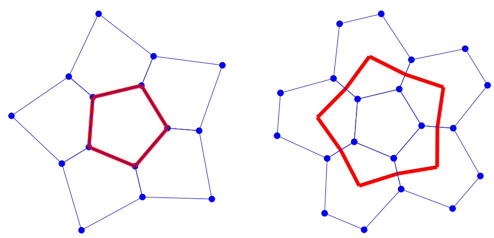
[3] Curvatura *maggiormente positiva* significa, come si può immaginare, che il vertice è più "acuto", mentre curvatura *maggiormente negativa* significa che il punto di sella è più fortemente "ondulato". Un famoso teorema, di Gauss-Bonnet, stabilisce tra l'altro che la curvatura *totale* di una superficie chiusa dipende soltanto dal *genere* g della superficie: essa è infatti uguale a $2\pi\chi$, dove $\chi = 2 - 2g$ è la caratteristica di Eulero. Nel caso di un poliedro semplicemente connesso, la curvatura totale è sempre 4π. Il teorema originario in realtà si applica a superfici lisce (formalmente: derivabili infinite volte), ma è stato riformulato in una versione combinatoria nel caso in cui i punti con curvatura non nulla siano finiti, come nei nostri poliedri.

[4] E questo non sorprenderà chi ha letto la nota precedente, dato che la curvatura totale di una superficie chiusa di genere 1 è $2\pi(2 - 2) = 0$.

prima, Eulero non ci garantisce effettivamente che per qualsiasi $n, m \in \mathbb{N}$ esisterà una "ciambella" con n pentagoni, n eptagoni e m esagoni, ma proprio come prima esistono infinite configurazioni in cui non solo tali ciambelle esistono, ma sono anche realizzabili con i nostri moduli, distribuendo i pentagoni principalmente all'esterno (dove in effetti la curvatura è massima), gli eptagoni all'interno (dove in effetti la curvatura è negativa: il cerchio "interno" di una ciambella è fatto tutto di punti di sella!) e condendo il tutto di abbondanti esagoni *uniformemente distribuiti* per collegare l'interno con l'esterno.

7 La conclusione fondamentale

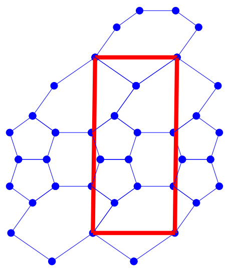
In conclusione, cerchiamo di dire con un minimo di precisione cosa intendiamo quando diciamo che nelle buckyball e nei "buckytori"[5] i pentagoni, gli eptagoni e gli esagoni sono distribuiti *uniformemente*: significa che è possibile individuare un motivo che si ripete. Nel caso del dodecaedro, questo motivo, che chiameremo *dominio fondamentale*, è ovviamente il pentagono. Nel caso del pallone da calcio, il dominio fondamentale è un pentagono più un terzo di ogni esagono adiacente. In entrambi i casi, dobbiamo ripetere tale motivo 12 volte per ottenere il poliedro. Nelle immagini seguenti vediamo le facce in blu, e il contorno del dominio fondamentale in rosso. Le facce sono ovviamente distorte, dato che le abbiamo "spianate".

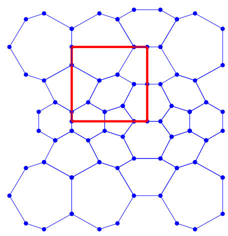


Per i tori i domini fondamentali sono solitamente dei rettangoli: qui di seguito vediamo il dominio fondamentale di un toro da 120 moduli (deve essere

[5] E non abbiamo neanche accennato ai "buckytubi"! Tali strutture, composte principalmente di esagoni - ma se vogliamo chiuderle in cima e in fondo ci servono sempre 12 pentagoni- sono, come le buckyball, importantissime perché ricorrono nella chimica organica.

ripetuto 8 volte) e di uno da 240 (deve essere ripetuto 20 volte):





Notiamo la presenza degli eptagoni sopra e sotto... e osserviamo che la parte "sopra" e quella "sotto" in realtà coincidono (sono la parte centrale del toro), mentre al centro (la parte esterna del toro) ci sono i pentagoni.

8 Webbografia

1. Pagina del prof. Fumagalli (Università di Firenze) sulla Mostra *Origami e Matematica*:
   http://www.math.unifi.it/ fumagalli/mostra-origami

2. Gli origami modulari di Michał Kosmulski:
   http://hektor.umcs.lublin.pl/ mikosmul/origami/misc.html

3. Lezioni di geometria combinatoria di Tom Hull; i tori:
   http://www.merrimack.edu/ thull/combgeom/tori/torusnotes.html

4. Il modulo PHiZZ descritto da suo inventore:
   http://www.merrimack.edu/ thull/phzig/phzig.html