Esercizio 1 $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times S_3$ con il prodotto definito mediante la formula

$$(a_1, a_2, a_3; \sigma) \cdot (b_1, b_2, b_3; \tau) = (a_{\tau(1)} + b_1, a_{\tau(2)} + b_2, a_{\tau(3)} + b_3; \sigma \cdot \tau)$$

è un gruppo.

(1) Mostrare che G non è commutativo.
(2) Calcolare l'ordine di $(1, 1, 0; (2, 3)) \in G$.
(3) Trovare una formula per l'inverso di un elemento di G.
(4) Trovare un sottogruppo di G di ordine 8 e un suo sottogruppo di ordine 6.
(5) Contare gli elementi di ordine 2 di G.

Esercizio 2 Sia G un gruppo abeliano finito. Per ogni p primo sia

$$G_p = \{a \in G \text{ t.c. } a^{p^n} = 1 \text{ per qualche } n\}$$

Dimostrare che:

(1) se p non divide $|G|$ allora G_p è banale,
(2) se p divide $|G|$ allora G_p è un sottogruppo di ordine la massima potenza di p che divide $|G|$,
(3) mostrare che se $p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}$ è la fattorizzazione in primi di $|G|$ allora

$$G = G_{p_1} \times ... \times G_{p_n}.$$

Cosa manca a questo ragionamento per concludere che ogni gruppo abeliano finito è un prodotto di gruppi ciclici?

Esercizio 3 Usare l'esercizo precedente per mostare che un gruppo abeliano con ordine un intero squarefree è ciclico.

Esercizio 4 Esibire una fattorizzazione in irriducibili del polinomio $z^6 + 1$ su $\mathbb{F}_2[z]$.