Esercizio 1 Mostrare che se G è gruppo finito vale la formula

$$\#\text{ elementi di G con ordine } n = \varphi(n) \cdot \big(\#\text{ sottogruppi ciclici di G con ordine } n\big)$$

per ogni n intero positivo.

Esercizio 2 Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$G_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } z^n = 1\}$$

forma un sottogruppo di ordine n di $\mathbb{C}^*$ (il gruppo dei numeri complessi non nulli con il prodotto usuale). Costruire un isomorfismo da $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a G_n.

Esercizio 3 Sia G un gruppo abeliano. Consideriamo le applicazioni:

$$\begin{array}{ll} \phi : G \to G \times G & \qquad \pi : G \times G \to G \\ g \mapsto (g^2, g^{-1}) & \qquad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2^2 \end{array}$$

Mostrare che: i) ϕ e π sono omomorfismi di gruppi, ii) ϕ è iniettiva, iii) π è surgettiva, iv) il nucleo di π coincide con l'immagine di ϕ.

Esercizio 4 Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ un omomorfismo. Mostrare che se f è surgettivo allora è pure iniettivo. E' vero il viceversa?

Esercizio 5 Mostrare che in un gruppo finito G di ordine pari esiste almeno un $g \in G$, diverso dall'elemento neutro $e \in G$, tale che $g^2 = 1$. (Hint: mostrare che l'applicazione $g \mapsto g^{-1}$ ha almeno due punti fissi usando il principio della piccionaia).