4 Novembre 2018

1. Gruppo Orologio

   Sia $G = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ e $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ l'applicazione definita dalla seguente regola: $\varphi(n) = (z, y, x)$, con $n \in \mathbb{N}$, $z \equiv \left\lfloor \frac{n}{3600} \right\rfloor$[1] $\pmod{24}$, $y \equiv \left\lfloor \frac{n}{60} \right\rfloor \pmod{60}$ e $x \equiv n \pmod{60}$.

   i) Stabilire se φ è un omomorfismo di gruppi.
   ii) Si definiscano $\psi : G \longrightarrow G$ l'automorfismo "fuso Italia-Romania", che riceve in partenza l'ora legale italiana e restituisce quella rumena, e $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ t.c. $f(n) = n + 1$.
   Verificare che il seguente diagramma non commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ G & \xrightarrow[\psi]{} & G \end{array}$$

   iii) Sia $g \in G$ t.c d sia il suo massimo ordine in G. Trovare il valore d.
   Sia $n \in \mathbb{N}$ t.c. $\varphi(n) = g$ con $ord(g) = d$. Trovare un valore n per cui si verifichi la condizione richiesta.
   iv) Classificare tutti i sottogruppi di ordine 24 in G e dire quale di questi "simboleggia" correttamente la lancetta delle ore; sia esso H.
   v) Sia $R_{60} \triangleleft \mathrm{D}_{60}$, il sottogruppo delle rotazioni del diedrale le cui isometrie del piano lasciano immutato un poligono regolare di 60 lati. Dimostrare che $G/H \simeq R_{60} \times R_{60}$.
   vi) Sia $\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ la proiezione t.c. $\forall n \in \mathbb{N}, \pi(n) = (\bar{n}^{24}, \bar{n}^{60}, \bar{n}^{60})$[2].
   Sia $\bar{\pi} : \mathbb{Z}/Ker(\pi) \longrightarrow G$ l'omomorfismo definito da $\bar{\pi}(m) = (\bar{m}^{24}, \bar{m}^{60}, \bar{m}^{60})$, con $m \in \mathbb{Z}/Ker(\pi)$. Sia $\bar{f} : \mathbb{Z}/Ker(\pi) \longrightarrow \mathbb{Z}/Ker(\pi)$ definita da $\bar{f}(m) = m + 1$. Caratterizzare tutti i $\bar{\psi} : G \longrightarrow G$ automorfismi tali che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/Ker(\pi) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{Z}/Ker(\pi) \\ {\scriptstyle\bar{\pi}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\pi}} \\ G & \xrightarrow[\bar{\psi}]{} & G \end{array}$$

   vii) Si definisce l'applicazione "viaggio nel futuro" nel seguente modo: $\chi_a : G \longrightarrow G$ in modo che $\chi_a((z, y, x)) = (az, ay, ax)$, con $a \in \mathbb{Z}$. Si puo' costruire χ_a in modo tale che esista χ_a^{-1}, l'applicazione "ritorno al passato"? Se si, come?

[1] funzione parte intera inferiore.
[2] dove con questa notazione indichiamo rispettivamente le classi di n modulo 24 e 60.