Operad & Recognition Principle

Ale Fenu

January 10, 2025

1 Monadi

Diamo la definizione di monade.

Definizione 1.1. Una monade T su una categoria $\mathcal{C}$ è il dato (T, η, μ) di un endofuntore $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e trasformazioni naturali $\eta : 1 \Rightarrow T$ e $\mu : T^2 \Rightarrow T$ che fanno commutare i diagrammi

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, Rightarrow, "\eta_T"] \arrow[dr, Rightarrow, "Id"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"'] & T \arrow[l, Rightarrow, "T\eta"'] \arrow[dl, Rightarrow, "Id"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, Rightarrow, "T\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

Un esempi classico di monade può essere ottenuto considerando una coppia di funtori covarianti aggiunti.
Ricordiamo che dati $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ essi si dicono *aggiunti* se esiste un isomorfismo naturale tra gli **hom-set**

$$\Phi_{C,D} : \mathcal{D}(FC, D) \overset{\cong}{\to} \mathcal{C}(C, GD).$$

Ad una coppia di funtori covarianti aggiunti può essere associata una monade.

Proposizione 1.2. *Dati F, G coppia di funtori covarianti aggiunti come sopra, GF è una monade su $\mathcal{C}$.*

Proof. L'ipotesi di aggiunzione garantisce l'esistenza di una unità

$$\eta : 1 \Rightarrow GF \text{ equivalentemente } \eta_X : X \to GFX$$

data da $\Phi_{X,FX}(Id_{FX})$.
Usando invece la counità

$$\epsilon : GF \Rightarrow 1 \text{ equivalentemente } \epsilon_Y : GFY \to Y$$

data da $\Phi^{-1}_{FY,Y}(Id_{FY})$ possiamo costruire una mappa di moltiplicazione

$$\mu : GFGF \Rightarrow GF$$

definendola come $G\epsilon F$.

□

Diamo ora la definizione di algebra su una monade T e di $T-$funtore.

Definizione 1.3. Data una monade T su $\mathcal{C}$, diciamo che una struttura di $T-$algebra su un oggetto $X \in \mathcal{C}$ è un funtore

$$\theta : TX \to X$$

che rende commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"'] \arrow[dr, bend right, "Id_X"] & TX \arrow[d, "\theta"'] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "T\theta"'] & TX \arrow[d, "\theta"] \\ TX \arrow[r, "\theta"'] & X \end{tikzcd}$$

Definizione 1.4. Data una monade T su $\mathcal{C}$, un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è detto $T-$funtore se T agisce a destra su F tramite trasformazione una trasformazione naturale

$$\lambda : FT \Rightarrow T$$

che rende commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta_X"'] \arrow[dr, Rightarrow, bend right, "1"] & FT \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"'] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FT^2 \arrow[r, Rightarrow, "F\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\lambda T"'] & FT \arrow[d, Rightarrow, "\lambda"] \\ FT \arrow[r, Rightarrow, "\lambda"'] & F \end{tikzcd}$$

2 Operad

Gli operad vogliono formalizzare la struttura di 'composizione ad albero' delle funzioni con arietà finita. In questa sezione diamo la definizione formale di operad su una categoria (monoidale simmetrica) ed esibiamo degli esempi.

Definizione 2.1. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice *monoidale 'stretta'* se è dotata di un oggetto $1 \in \mathcal{C}$ e un bifuntore $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tale che per ogni terna di oggetti A, B, C e morfismi f, g, h valgano

- $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;
- $1 \otimes A = A \otimes 1 = A$;
- $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$;
- $f \otimes Id_1 = Id_1 \otimes f = f$.

Se in più $A \otimes B \cong B \otimes A$ tramite trasformazioni naturali (in entrambi gli argomenti) di *swap* il cui quadrato è l'identità, allora la categoria $\mathcal{C}$ è detta *simmetrica*.

Definizione 2.2 (Operad)**.** Data una categoria monoidale simmetrica stretta, una **operad** su $\mathcal{C}$ è una famiglia di oggetti $\{\mathcal{O}(n)\}_{n\geq 0}$ e morfismi

$$\gamma_{n;m_1,\dots,m_n} : \mathcal{O}(n)\otimes\mathcal{O}(m_1)\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(m_n)\to\mathcal{O}(m_1+\dots+m_n)$$

che soddisfano i seguenti assiomi:

- Associatività: il seguente diagramma commuta (la mappa ρ è la giusta permutazione dei fattori data dalla simmetria di $\mathcal{C}$)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(n)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{O}(m_i)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}(\mathcal{O}(k_{i,1})\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(k_{i,m_i})) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\gamma_{n;m_1,\dots,m_n}\otimes 1"'] & \mathcal{O}(n)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}(\mathcal{O}(m_i)\otimes\mathcal{O}(k_{i,1})\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(k_{i,m_i})) \arrow[d, "1\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}\gamma_{m_i;k_{i,1},\dots,k_{i,m_i}}"'] \\
\mathcal{O}(m_1+\dots+m_n)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}(\mathcal{O}(k_{i,1})\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(k_{i,m_i})) \arrow[d, "\gamma_{m_1+\dots+m_n;k_{1,1},\dots,k_{n,m_n}}"'] & \mathcal{O}(n)\otimes\bigotimes_{i=1}^{n}\mathcal{O}(k_{i,1}+\dots+k_{i,m_i}) \arrow[dl, "\gamma_{n;m_{1,1}+\dots+m_{1,m_1},\dots,m_{1,m_n}+\dots+m_{n,m_n}}"] \\
\mathcal{O}(k_{1,1}+\dots+k_{n,m_n}) &
\end{tikzcd}$$

- Unità: se $1\in\mathcal{C}$ è l'unità allora esiste un morfismo $\eta : 1\to\mathcal{O}(1)$ tale che le composizioni

$$\mathcal{O}(n)\otimes 1^{\otimes n}\xrightarrow{1\otimes\eta^{\otimes n}}\mathcal{O}(n)\otimes\mathcal{O}(1)\dots\mathcal{O}(1)\xrightarrow{\gamma_{n;1,\dots,1}}\mathcal{O}(n)$$

$$1\otimes\mathcal{O}(n)\xrightarrow{\eta\otimes 1}\mathcal{O}(1)\otimes\mathcal{O}(n)\xrightarrow{\gamma_{1;n}}\mathcal{O}(n)$$

  siano le moltiplicazioni per 1 della struttura monoidale;

- ogni $O(n)$ ammette una azione destra di S_n;

- equivarianza rispetto a tale azione, nel senso di commutatività del seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(n)\otimes\mathcal{O}(m_1)\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(m_n) \arrow[r, "1\otimes\rho"'] \arrow[dd, "\sigma\otimes 1^{\otimes n}"] & \mathcal{O}(n)\otimes\mathcal{O}(m_{\sigma^{-1}1})\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(m_{\sigma^{-1}n}) \arrow[d, "\gamma_{n;m_{\sigma^{-1}1,\dots,\sigma^{-1}n}}"'] \\
 & \mathcal{O}(m_1+\dots+m_n) \arrow[d, "\sigma_{m_1,\dots,m_n}"'] \\
\mathcal{O}(n)\otimes\mathcal{O}(m_1)\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(m_n) \arrow[r, "\gamma_{n;m_1,\dots,m_n}"] & \mathcal{O}(m_1+\dots+m_n)
\end{tikzcd}$$

  dove ρ è la composizione di *swap* associata a σ mentre $\sigma_{m_1,\dots,m_n}$ è l'elemento di $S_{m_1+\dots+m_n}$ corrispondente alla mappa di permutazione (secondo σ) di n blocchi di dimensione $m_1,\dots,m_n$.

Esibiamo ora un esempio **fondamentale** di operad, l'operad degli endomorfismi $\mathcal{E}nd_X$.
Dato X oggetto in una categoria monoidale simmetrica (d'ora in poi assumeremo tacitamente queste ipotesi) definiamo l'operad $\mathcal{E}nd_X$ ponendo

$$\mathcal{E}nd_X(n) := Hom_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}, X)$$

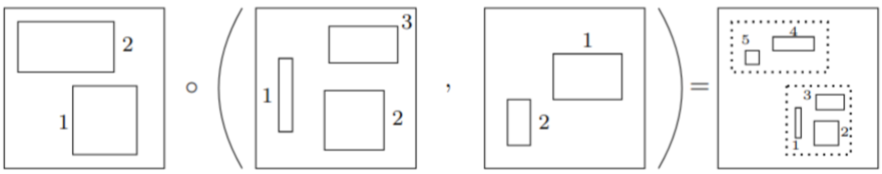
e definendo $\gamma_{n;m_1,\dots,m_n}$ come la trasposta di

$$\begin{array}{c}
(\mathcal{E}nd_X(n) \otimes \mathcal{E}nd_X(m_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}nd_X(m_n)) \otimes X^{\otimes m_1+m_2+\cdots+m_n} \\
\downarrow \\
\mathcal{E}nd_X(n) \otimes (\mathcal{E}nd_X(m_1) \otimes X^{\otimes m_1}) \otimes (\mathcal{E}nd_X(m_2) \otimes X^{\otimes m_2}) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{E}nd_X(m_)) \otimes X^{\otimes m_n}) \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes ev^{\otimes n}} \\
\mathcal{E}nd_X(n) \otimes X^n \\
\downarrow{\scriptstyle ev} \\
X
\end{array}$$

e come unità $\eta : 1 \to \mathcal{E}nd_X(1)$ la mappa di unità monoidale $1 \otimes X \cong X$.
L'azione di S_n è invece data dai morfismi ρ dati dalla simmetria di $\mathcal{C}$.
Diamo un secondo esempio, anche esso di fondamentale importanza per il risultato principale.
Definiamo l'operad $\mathcal{C}_k$ (e la chiamiamo *operad dei piccoli k-cubi*) nel seguente modo: gli oggetti

$$\mathcal{C}_k(n) = \mathbf{lEmb}\left(\coprod_{j=1}^{n} I^k, I^k\right)$$

sono gli embedding lineari di n copie distinte di I^k dentro I^k con i lati "paralleli" a quelli del cubo di partenza.
Possiamo anche topologizzare questi oggetti vedendoli come sottospazio di $\mathbb{R}^{2kn}$. S_n agisce in maniera naturale su questi embedding, permutando prima i termini dell'unione disgiunta (ossia ri-etichettando le copie di I^k in partenza), mentre la composizione è data dalla composizione degli embedding esattamente come fossero funzioni $k-$arie.



Si può considerare anche un operad limite, notando che esistono morfismi $\mathcal{C}_k \hookrightarrow \mathcal{C}_{k+1}$ includendo tutti $I^k \hookrightarrow I^{k+1}$ ponendo ultima coordinata uguale a $\frac{1}{2}$.
Un operad $\mathcal{O}$ può agire su un oggetto della categoria $\mathcal{C}$ dove vive. In questo caso si dice che l'azione su X lo dota di una struttura di $\mathcal{O}$-algebra. Più formalmente:

Definizione 2.3. Data $\mathcal{O}$ un operad in una categoria simmetrica $\mathcal{C}$, una $O-$algebra è il dato di un oggetto $X \in \mathcal{C}$ è un morfismo

$$\alpha : \mathcal{O} \to \mathcal{E}nd_X$$

che sia compatibile con l'azione di S_n, composizione ed unità.

Fissato un operad $\mathcal{O}$, la classe di $\mathcal{O}-$algebre forma una categoria $\mathcal{O} - \mathbf{Alg}$ ed un morfismo di operad $\mathcal{O} \to \mathcal{P}$ induce una mappa $\mathcal{P} - \mathbf{Alg} \to \mathcal{O} - \mathbf{Alg}$ tramite la composizione $\mathcal{O} \to \mathcal{P} \to \mathcal{E}nd_\bullet$.
Esiste una corrispondenza tra algebre su una monade ed algebre su un operad, che è descritta dai seguenti risultati.

Proposizione 2.4. *Sia $\mathcal{O}$ un operad in $\mathcal{C}$ ed X un oggetto in $\mathcal{C}$. La monade associata ad $\mathcal{O}$ è definita ponendo*

$$OX = \left(\bigsqcup_j \mathcal{O}(j) \times X^j \right) / \sim$$

con quoziente fatto rispetto alla relazione $(\sigma_i f, x) \sim (f, s_i x)$ e $(f\sigma, x) \sim (f, \sigma x)$.
Sui morfismi $g : X \to X'$ si pone $Og : OX \to OX'$ mandando $[f, x] \mapsto [f, g^j x]$.
I morfismi di unità sono $\eta(x) = [\eta(1), x]$ mentre la moltiplicazione

$$\mu([f, [f^1, x^1], \dots, [f^n, x^n]]) = [\gamma(f, f^1, \dots, f^n), (x^1, \dots, x^n)].$$

Proposizione 2.5. *Dato un operad $\mathcal{O}$ e detta O la monade associata, esiste una corrispondenza uno $\mathcal{O} - \mathbf{Alg} \leftrightarrow O - \mathbf{Alg}$.*

Proof. Data X una $\mathcal{O}-$algebra con mappe di struttura $\alpha_n : \mathcal{O}(n) \times X^n \to X$ possiamo definire una mappa $\alpha : OX \to X$ mandando $[f, x]$ in $\alpha_n(f, x)$.
Viceversa se X è una $O-$algebra possiamo usare la mappa α per definire α_n come

$$\alpha_n(f, x) = \alpha[f, x]$$

e verificare che queste due mappe sono una inversa dell'altra. □

3 Generalizzazione della costruzione Bar

Possiamo generalizzare la nozione di spazio classificante associato ad una categoria $\mathcal{C}$ facendo dipendere la costruzione da un certo $T-$funtore, con T una $\mathcal{C}$-monade.

Definizione 3.1. Data una tripla (F, T, X) con T monade, F un $T-$funtore ed X una $T-$algebra, possiamo definire uno spazio simpliciale

$$B_*(F, T, X)$$

con scheletri

$$B_k(F, T, X) = FT^k X$$

e mappe di faccia date da

- per $i = 0$ la mappe di struttura $FT \to F$ (F è un $T-$funtore);
- per $0 < i < k$ la mappa di moltiplicazione $T^2 \to T$;
- per $i = k$ la mappa di $T-$algebra $TX \to X$; e le mappe di degenerazione date da $\eta : 1 \to T$.

Effettivamente, dato G gruppo topologico possiamo considerare G come una monade che agisce su **Top** mandando $X \mapsto G \times X$ e $f \mapsto (Id, f)$.
In questo modo, la usuale nozione coincide quella data come

$$BG = |B_*(*, G, *)|.$$

4 Teorema di May: Recognition Principle

Teorema 4.1 (The Geometry of Iterated Loop Space, Thm 13.1, May). *Sia $\mathcal{C}_k$ l'operad dei piccoli $k-$cubi (con k non necessariamente finito). Ogni spazio della forma $\Omega^k X$ ammette una struttura di $\mathcal{C}_k-$algebra. Viceversa, ogni spazio topologico connesso X che ammette una struttura di $\mathcal{C}_k-$algebra è debolmente omotopicamente equivalente a $\Omega^k Y$ per un appropriato spazio Y.*

Prima parte.
Vogliamo definire una mappa $\alpha_k : \mathcal{C}_k \to \mathcal{E}nd_{\Omega^k X}$.
Per tutti i livelli n finiti, dobbiamo trovare una mappa $\mathcal{C}_k(n) \otimes (\Omega^k X)^n \to \Omega^k X$. Abbiamo una scelta naturale. Un punto in $(\Omega^k X)^n$ non è altro che una $n-$upla di punti di $\Omega^k X$, ossia mappe $S^k \to X$. Ognuna di queste mappe proviene da $\gamma_i : I^k \to X$ (una volta scelta una proiezione $I^k \to S^k$ che manda ∂I^k in $* \in S^k$).
Possiamo allora considerare il dato $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ equivalente al dato di un punto di $(\Omega^k X)^n$.
Adesso la costruzione della mappa $\overbrace{c}^{\in \mathcal{C}_k} \otimes (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \to \overbrace{(\Gamma : I^k \to X)}^{\in \Omega^k X}$ può essere descritta come segue:

$$\Gamma(p) = \begin{cases} \gamma_i(c^{-1}(p)) & p \in c(I_i^k) \text{ ossia } p \text{ sta nell'immagine dell'} i\text{-esimo cubetto} \\ * & p \in \left(\bigsqcup_i c(I_i^k)\right)^c \text{ ossia se } p \text{ non sta nell'immagine di nessun cubetto} \end{cases}$$

chiaramente continua in quanto $\{c(I_i^k)\}_i \cup \left(\bigsqcup_i c(I_i^k)\right)^c$ è un dominio fondamentale.
Per definirla a livello ∞, osserviamo cosa succede prendendo $X = \Omega Y$.
Seconda parte.
Abbiamo dimostrato nella sezione precedente che esiste una monade C_k tale che le algebre su di lei siano (tutte e sole le) algebre su $\mathcal{C}_k$.
Ricordando che Ω^k e Σ^k sono funtori aggiunti (nel verso giusto) otteniamo che $\Omega^k \Sigma^k$ ha una naturale struttura di monade (come visto nel capitolo sulle monadi).
Riusciamo a definire un morfismo di monadi $\rho_k : C_k \to \Omega^k \Sigma^k$ ponendo sugli oggetti

$$C_k X \overset{C_k \eta}{\to} C_k \Omega^k \Sigma^k X \overset{\theta}{\to} \Omega^k \Sigma^k X$$

dove l'ultima mappa esiste dato che, per la prima parte del teorema, ogni spazio di cammini iterati ammette una struttura di $\mathcal{C}_k$algebra e dunque di C_k-algebra.
Per il teorema [May, Geometry of Iterated Loop Space, Thm 6.1] (esposto parzialmente nell'Appendice A) si può affermare che, quando X è connesso, la mappa $C_k X \to \Omega^k \Sigma^k X$ è una equivalenza omotopica debole.
Per completezza, daremo una dimostrazione alternativa di questo fatto nella **Appendice**, tuttavia nella sua interezza è lunga. Adesso l'obiettivo è "tornare indietro" è predicare sul tipo di omotopia di X. Troviamo una struttura simpliciale appropriata su X.
Dato che tutte le monadi T sono $T-$funtori, possiamo considerare gli spazi simpliciali

$$B_*(C_k, C_k, X)$$

e $X_n = X$ con mappe di faccia e di degenerazione date dall'identità $Id : X \to X$. Notiamo che evidentemente

$$|X_*| = \left(\bigsqcup_n \Delta^n \times X \right) / \sim \; \cong X.$$

Esiste una mappa

$$B_*(C_k, C_k, X) \to X_*$$

data, scheletro per scheletro, da $C_k^{i+1}X \overset{\mu^i}{\to} C_k X \overset{\theta}{\to} X$ (provenienti dalla struttura di C_k-algebra e dalla C_k-funtorialità di C_k).
Diciamo che in effetti questa mappa è una equivalenza omotopica, con inversa data da

$$X \overset{\eta^{i+1}}{\longrightarrow} C_k^{i+1}X.$$

In effetti

$$X \overset{\eta^{i+1}}{\longrightarrow} C_k^{i+1}X \overset{\mu^i}{\to} C_k X \overset{\theta}{\to} X$$

è l'identità, come segue usando la commutatività dei diagrammi

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"'] \arrow[dr, bend right, "Id_X"'] & TX \arrow[d, "\theta"'] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "T\theta"'] & TX \arrow[d, "\theta"] \\ TX \arrow[r, "\theta"'] & X \end{tikzcd}$$

Per l'altra composizione, esibiamo una omologia simpliciale tra

$$C_k^{i+1}X \overset{\mu^i}{\to} C_k X \overset{\theta}{\to} X \overset{\eta^{i+1}}{\longrightarrow} C_k^{i+1}X$$

e $Id_{C_k^{i+1}X}$. Possiamo definire

$$h_\bullet : C_k^{q+1}X \overset{\mu^\bullet}{\to} C_k^{q+1-\bullet}X \overset{\eta^{\bullet+1}}{\to} C_k^{q+2}X$$

e verificare che questa sia una valida omotopia simpliciale che fa al caso nostro.
Abbiamo concluso l'equivalenza omotopica

$$|B_*(C_k, C_k, X)| \cong |X_*| \cong X.$$

La mappa di monadi $\rho_k : C_k \to \Omega^k\Sigma^k$ e la sua trasposta (fissato un oggetto X) $\rho_k^\# : \Sigma^k C_k X \to \Sigma^k X$ data dalla aggiunzione $\Omega^k - \Sigma^k$ permettono di dare una struttura di C_k-funtori sia a Σ^k che a $\Omega^k\Sigma^k$ via le mappe

$$\Omega^k\Sigma^k C_k \overset{\Omega^k\Sigma^k\rho_k}{\longrightarrow} \Omega^k\Sigma^k\Omega^k C_k \overset{\mu}{\longrightarrow} \Omega^k\Sigma^k$$

$$\Sigma^k C_k \overset{\rho_k^\#}{\longrightarrow} \Sigma^k.$$

Definiti allora $B_*(\Omega^k\Sigma^k, C_k, X)$ e $B_*(\Sigma^k, C_k, X)$ si ottiene che, ad esempio

$$|B_*(C_k, C_k, X)| \overset{\cong}{\to} |B_*(\Omega^k\Sigma^k, C_k, X)|$$

ottenuta dalla mappa $\rho_k X : C_k X \to \Omega^k\Sigma^k X$ (che è una equivalenza omotopica per X connesso come già fatto notare).
Per X spazio simpliciale sufficientemente bello, vale

$$|\Omega X| \cong \Omega|X|$$

pertanto, componendo tutte le equivalenze omotopiche deboli esibite, otteniamo

$$X \cong |X_*| \leftarrow |B_*(C_k, C_k, X)| \rightarrow |B_*(\Omega^k \Sigma^k, C_k, X)| \rightarrow \Omega^k |B_*(\Sigma^k, C_k, X)|$$

ossia che X è debolmente omotopicamente equivalente ad uno spazio di cammini chiusi iterato k volte.

A X connesso $\Rightarrow C_kX \overset{\rho_k}{\cong} \Omega^k S^k X$.

In tutto questo capitolo lavoreremo nella categoria $\mathcal{T}$ degli spazi topologici di Hausdorff compattamente generati puntati e morfismi puntati.

Teorema A.1 (Approximation Theorem di May)**.** *Sia $X \in \mathcal{T}$ ed $n \geq 1$. Esiste uno spazio E_nX che contiene C_nX ed esistono mappe $E_nX \to C_{n-1}SX$ e $\tilde{\alpha}_n : E_nX \to P\Omega^{n-1}S^nX$ tali che commuti*

$$\begin{array}{ccccc} C_nX & \xrightarrow{\subset} & E_nX & \xrightarrow{\pi_n} & C_{n-1}SX \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{n-1}} \\ \Omega^n S^n X & \xrightarrow{\subset} & P\Omega^{n-1}S^nX & \xrightarrow{p} & \Omega^{n-1}SX \end{array}$$

dove, se $n = 1$, $C_0SX = SX$ e α_0 è l'identità.
E_nX è contraibile per ogni X e π_n è una quasi-fibrazione con fibra C_nX per ogni X connesso. Dunque α_n è una equivalenza omotopica debole per ogni X connesso e tutti gli $1 \leq n \leq \infty$.

Cominciamo definendo un funtore E_n dalle coppie $(X, A) \in \mathcal{T}$. Lo spazio E_nX del teorema sarà successivamente $E_n(TX, X)$ dove TX è il cono puntato $X \times I/(* \times I \cup X \times \{0\})$ (che osserviamo essere un endofuntore di $\mathcal{T}$).
Dato un piccolo n-cubo (aperto, ed indicherò con $J = (0, 1)$) f, scriviamo $f = f' \times f''$ dove $f' : J \to J$ ed $f'' : J^{n-1} \to J^{n-1}$ (poniamo $f \equiv f'$ se $n = 1$). Definiamo

$$\mathcal{E}_n(j; X, A)$$

come il sottospazio di $\mathcal{C}_n(j) \times X^j$ formato dai punti $(< c_1, \ldots, c_j >, x_1, \ldots, x_j)$ tale che $x_i \notin A$ implica $(c_i'(0), 1) \times (c_i''(J^{n-1}))$ non intersechi $c_s(J^n)$ per ogni $s \neq i$. La relazione di equivalenza della definizione di monade associata all'operade dei piccoli k-cubi si restringe ad una relazione di equivalenza su $\bigsqcup \mathcal{E}_n(j; X, A)$. Poniamo $E_n(X, A) = \bigsqcup \mathcal{E}_n(j; X, A)/\sim$ topologizzato come sottospazio di C_nX.
Diamo ora un po' di proposizioni.

Proposizione A.2. *Sia $X \in \mathcal{T}$ e $[c, x] \in E_n(X, *)$ dove $c =< c_1, \ldots, c_j >$ ed $x \in (X \setminus *)^j$ per qualche j. Poniamo $j = 1$ se $n = 1$, altrimenti indichiamo con $c'' =< c_1'', \ldots, c_j'' > \in \mathcal{C}_{n-1}(j)$. Esiste una mappa naturale surgettiva $v_n : E_n(X, *) \to C_{n-1}X$ definita come*

$$v_1([c, x]) = x \in X = C_0X, \tag{1}$$
$$v_i([c, x]) = [c'', x] \in C_{n-1}X \text{ se } i \neq 1. \tag{2}$$

Proof. CI PENSO IO E POI DECIDO. □

Proposizione A.3. *Per $X \in \mathcal{T}$ ed $n \geq 1$ esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccc} C_nX & \xrightarrow{\subset} & E_n(TX, X) & \xrightarrow{\pi_n} & C_{n-1}SX \\ {\scriptstyle C_n\eta_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle E_n\tilde{\eta}_n} & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}\eta_{n-1}} \\ C_n\Omega^nS^nX & \xrightarrow{\subset} & E_n(P\Omega^{n-1}S^nX, \Omega^nS^nX) & \xrightarrow{p} & C_{n-1}\Omega^{n-1}SX \end{array}$$

Proof. Ricordiamo che l'immersione $X \to TX$ è l'inclusione nella faccia 1. Definendo $\tilde{\eta}_n : TX \to P\Omega^{n-1}S^nX$ come

$$\tilde{\eta}_n[s, t](v) = [x, st, v] \text{ per } [x, s] \in TX, v \in S^{n-1}$$

si verifica che il seguente diagramma commuta, da cui la tesi per funtorialità di $C_n(\bullet, \bullet)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\eta_n"'] & TX \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\tilde{\eta}_n"] & SX \arrow[d, "\eta_{n-1}"] \\
\Omega^n S^n X \arrow[r, "\subset"] & P\Omega^{n-1} S^n X \arrow[r, "p"] & \Omega^{n-1} SX
\end{tikzcd}$$

□

Notando che α_n si fattorizza come $\theta_n \circ C_n \eta_n$, abbiamo metà della commutatività che cerchiamo.

Proposizione A.4. *Dato $X \in \mathcal{T}$, definiamo la mappa $\tilde{\theta}_{n,j} : \mathcal{E}_n(j; P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \to P\Omega^{n-1}X$ su un elemento (c, y) con $c =< c_1, \ldots, c_j >, y = (y_1, \ldots, y_j)$ come*

$$\tilde{\theta}_{n,j}(c, y)(t)(v) = \begin{cases} y_r(s)(u) & \textit{se } c_r(s, u) = (t, v) \\ y_r(1)(u) & \textit{se } t \geq c'_r(1), c''_r(u) = v, y_r \notin \Omega^n X \\ * & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Questa mappa induce una $\tilde{\theta}_n : E_n(P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \to P\Omega^{n-1}X$ che fa commutare il diagramma

$$\begin{tikzcd}
C_n \Omega^n X \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\theta_n"'] & E_n(P\Omega^{n-1}X, \Omega^n X) \arrow[r, "\pi_n"] \arrow[d, "\tilde{\theta}_n"] & C_{n-1}\Omega^{n-1}X \arrow[d, "\theta_{n-1}"] \\
\Omega^n S^n X \arrow[r, "\subset"] & P\Omega^{n-1}X \arrow[r, "p"] & \Omega^{n-1}X
\end{tikzcd}$$

Proof. Osserviamo che $\tilde{\theta}_{n,j}(c\sigma, y) = \tilde{\theta}_{n,j}(c, \sigma y)$ e $\tilde{\theta}_{n,j-1}(\sigma_i c, y) = \tilde{\theta}_{n,j}(c, s_i y)$ (mappe simpliciali nella definizione del quoziente di $\mathcal{E}_\bullet(\bullet, \bullet)$). Vale (Lemma 6.10 di Geometry of Iterated Loop Space di May) che $\tilde{\theta}_n = \theta_n$ su $C_n \Omega^n X$. Osservando la composizione $p\tilde{\theta}_n$ si ottiene

$$p\tilde{\theta}_n[c, y](v) = \begin{cases} y_r(1)(u) & \text{se } c''_r(u) = v \\ * & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per diagram-chase e definizioni, $p_n = v_n \circ E_n p$ e $p\tilde{\theta}_n = \theta_{n-1} p_n$, da cui la commutatività cercata. □

Dimostriamo ora l'Approximation Theorem di May.

Approximation Theorem. Definiamo $\tilde{\alpha}_n = \tilde{\theta}_n \circ E_n \eta_n$. Allora la commutatività del diagramma segue dai due lemmi precedenti. □