Esercizi della settimana del 16 dicembre

Esercizio 1

Sia R un anello senza nilpotenti, ossia tale che se $x^n = 0$ per qualche n allora necessariamente $x = 0$. Sappiamo inoltre che, per ogni $a, b \in R$ vale $(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$. Dimostrare che R è commutativo.

Esercizio 2

Consideriamo l'anello A delle funzioni continue $[0, 1] \to \mathbb{R}$, dove la struttura di anello è data dalla somma puntuale e dal prodotto puntuale.

Siano adesso, per $n \geq 2$, $f_1, \ldots, f_n$ delle date funzioni. Sappiamo che non si annullano tutte contemporaneamente.

1. Mostrare che l'ideale da loro generato $(f_1, \ldots, f_n)$ è tutto A.
2. Provare a capire chi sono gli ideali massimali $I \subset A$ e conseguentemente chi è il campo A/I.

Esercizio 3

Definiamo *caratteristica* di un anello A in maniera grezza come "il minimo numero n tale che sommando n volte consecutive il neutro della moltiplicazione, si arriva a 0". Tale caratteristica può essere 0 quando n è infinito (ossia non arrivo mai a 0) oppure un numero positivo.

Supponiamo adesso A campo.

1. Che valori può avere n?

2. Esiste un campo con n elementi? Se sì, quanti omomorfismi di anelli esistono $\mathbb{F}_n \to A$? Questi oggetti si chiamano "*oggetti iniziali*" (in un appropriato contesto).

3. Cosa abbiamo usato di A campo? Verificare che tutto ciò che abbiamo detto funziona usando solo A dominio.

4. Esiste un dominio con 15 elementi? E con 64?

Esercizio 4

L'unità immaginaria i è contenuta nell'estensione dei razionali $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{-2})$? E $\sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$?

Esercizio 5

Quanti polinomi irriducibili di grado n esistono nell'anello $\mathbb{F}_p[x]$?