



UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

Teorema di Group Completion e Spazi di configurazioni

Relatore:
Prof. Filippo Callegaro

Candidato:
Alessandro Fenu

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Indice

Introduzione	2
1 Oggetti simpliciali e BC	3
2 Omologia di gruppi	8
3 Spazi di Configurazioni e Trecce	11
4 Teorema di Group Completion	16
5 Spazi di configurazione e loop iterati	23
6 Conclusioni	33
A Disintegrazione su un ricoprimento	35
B Quasi-fibrazione $EM \rightarrow BM$	39

Introduzione

Introdurremo alcune definizioni e risultati principali di topologia algebrica di natura simpliciale. Daremo una definizione di *gruppo di trecce su k fili* e studieremo i loro spazi classificanti (in questo caso spazi di Eilenberg-MacLane): questi saranno gli spazi di configurazioni di k punti sul piano.

Indagheremo preliminarmente la relazione che intercorre tra l'omologia di un monoide topologico M e del suo completamento ΩBM basandoci principalmente sull'approccio, leggermente rivisitato, di G. Segal e D. McDuff. Sotto blande ipotesi, ossia la centralità degli elementi di grado zero nell'anello di Pontrjagin del monoide M , stabiliremo un isomorfismo tra la localizzazione di $H_*(M)$ rispetto agli elementi di grado 0 e l'anello $H_*(\Omega BM)$.

Parleremo successivamente di Spazi di Configurazioni generalizzati: daremo una topologia all'insieme dei punti distinti di \mathbb{R}^n etichettati da elementi di uno spazio topologico X e proveremo a capirne il tipo di omotopia.

Il risultato conclusivo dello studio degli spazi di configurazioni ci permetterà di stabilire l'equivalenza omotopica fra $\Omega^{n-1}S^n$ e lo spazio classificante (come monoide topologico) di $C'_n(X)$, dove quest'ultimo è uno spazio omotopicamente equivalente alle configurazioni $C_n(X)$. Per dimostrare questo risultato utilizzeremo strumenti di natura categorica quali la *suddivisione di Segal* che ci permetterà di stabilire l'equivalenza fra le realizzazioni del nervo di differenti categorie. Dato lo studio specifico delle configurazioni sul piano ne concluderemo che lo spazio classificante (come monoide topologico) dell'unione disgiunta degli spazi classificanti dei gruppi di trecce su finiti fili è omotopicamente equivalente allo spazio ΩS^2 .

Tramite argomenti di passaggio al colimite e sollevamento di mappe allo spazio totale della fibrazione di Hopf, dimostreremo in conclusione che

$H_*(Br_\infty) \cong H_*(\Omega^2 S^3)$, dove Br_∞ è il colimite delle inclusioni $Br_i \hookrightarrow Br_{i+1}$ sui primi fili.

Capitolo 1

Oggetti simpliciali e BC

In questo capitolo introduciamo il concetto di *oggetto simpliciale* e di *spazio classificante relativo ad una categoria piccola*.

Definizione 1.1. La categoria dei semplici è la categoria Δ con oggetti $ob(\Delta) = \{[n] = \{0, \dots, n\} | n \geq 0\}$ e morfismi $mor(\Delta) = \{f : [n] \rightarrow [m] | n, m \geq 0, f \text{ debolmente crescente}\}$.

All'interno della classe di morfismi si distinguono le mappe di cofaccia $d^i : [n] \rightarrow [n+1]$ e di co-degenerazione $s^i : [n] \rightarrow [n-1]$ rispettivamente come le uniche mappe crescenti che omettono e ripetono l'indice i .

Fatto 1.1. Le mappe di cofaccia e co-degenerazione generano l'insieme di morfismi di Δ .

Data una generica categoria \mathcal{C} , introduciamo adesso la nozione di oggetto simpliciale su \mathcal{C} .

Definizione 1.2. Un oggetto simpliciale su \mathcal{C} è un funtore $\Delta^{op} \rightarrow \mathcal{C}$.

Nella maggior parte dei casi di nostro interesse, $\mathcal{C} = Set$ e gli oggetti simpliciali prendono il nome di insiemi simpliciali. Notiamo che avremmo potuto equivalentemente definire un oggetto simpliciale come un prefascio di insiemi sopra Δ .

Un esempio comune di insiemi simpliciali è dato dagli *n-simplessi singolari* di uno spazio topologico X : le mappe (nella categoria Top) dal simpleso standard Δ^n ad X .

Questo esempio motiva le definizioni precedenti: con poco altro sforzo si definisce il complesso di catene singolari e conseguentemente l'omologia singolare,

pertanto sembrerebbe naturale l'interesse nel dare una struttura simpliciale ad una (sotto)categoria qualsiasi e catturarne proprietà geometriche e combinatoriche come è stato possibile fare sugli spazi topologici.

Il funtore $Sin : Top \rightarrow sSet$ (indicheremo così la categoria degli insiemi simpliciali $Fun[\Delta, Set]$) può essere generalizzato secondo la seguente definizione. Osservando che Δ è una sottocategoria *piena* nella categoria delle categorie piccole e che $[n]$ vi appartiene (vista come categoria di un insieme ordinato), possiamo dire che

Definizione 1.3 (Nervo). una categoria piccola \mathcal{C} determina un insieme simpliciale NC (denominato *nervo* di \mathcal{C}) con $(NC)_n = Fun([n], \mathcal{C})$.

Questa definizione risulterà fondamentale per il resto della trattazione. Diamo una interpretazione degli oggetti e delle mappe di NC e vediamone un esempio.

NC_0 sono gli oggetti di \mathcal{C} , NC_1 può essere visto come "i morfismi" di \mathcal{C} (inteso come il *dato* di sorgente, freccia, target), NC_2 sono le coppie di morfismi componibili e così via. Le mappe di cofaccia e di co-degenerazione inducono invece delle mappe (chiamate *di faccia* e *di degenerazione* vista la controvarianza) che si comportano come segue.

Le mappe di faccia $d_0, d_n : (NC)_n \rightarrow (NC)_{n-1}$ dimenticano rispettivamente il primo e l'ultimo morfismo della catena, le mappe d_i con $0 < i < n$ compongono il morfismi $i, i+1$. Le mappe di degenerazione invece interpongono morfismi identità in posizione i .

Ricordiamo che un gruppo G può essere visto come categoria piccola formata da un solo oggetto \bullet e con morfismi indicizzati dagli elementi di G che dunque dotano $Hom(\bullet, \bullet)$ di una struttura di gruppo isomorfo a G . Come esempio concreto (che verrà utilizzato anche dopo) calcoliamo NG con $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ categoria con un oggetto e con morfismi 0, 1.

Immediatamente vale $(NG)_n = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ e le mappe di faccia rispettano le relazioni

$$\begin{aligned} 0 < i < n, \quad d_i(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ d_0(g_0, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_n) \\ d_n(g_0, \dots, g_n) &= (g_0, \dots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

mentre per le mappe di degenerazione vale

$$s_i(g_0, \dots, g_n) = (g_0, \dots, g_{i-1}, 0, g_i, \dots, g_n).$$

Notiamo che l'unico elemento di $(NG)_n$ che **non** è immagine di una mappa di degenerazione è $(1, 1, \dots, 1)$. Una tale upla di morfismi si dice *non degenera*.

Introduciamo adesso, seguendo Milnor [Mil57], un modo per passare da insiemi simpliciali a spazi topologici.

Definizione 1.4 (Realizzazione geometrica). Dato X insieme simpliciale definiamo la *realizzazione geometrica* di X , indicata come $|X|$, lo spazio

$$\left(\coprod_{n \geq 0} \Delta^n \times X_n \right) / \sim$$

dove \sim identifica $\Delta^n \times X_n \ni (v, \phi^* x) \sim (\phi_* v, x) \in \Delta^m \times X_m$ e l'identificazione è effettuata sull'insieme di tutte le mappe $\phi : [n] \rightarrow [m]$.

Stiamo in sostanza attaccando simplessi seguendo le regole dettate dalla struttura simpliciale di X .

Fatto 1.2. Possiamo vedere $|X|$ come quoziente di una unione disgiunta di copie di Δ^k indicizzate dai k -simplessi **non degeneri** di X . Inoltre $|X|$ ammette struttura di CW-complesso con scheletri $sk_k(|X|) = \left(\coprod_{k \geq n \geq 0} \Delta^n \times X_n \right) / \sim$.

Teorema 1.1 (Milnor[Mil57]). La coppia di funtori $Sin : Top \rightarrow sSet$, $|\bullet| : sSet \rightarrow Top$ è una coppia di funtori aggiunta ed inoltre la mappa $|Sin(X)| \rightarrow X$ è una equivalenza debole.

Questo risultato giustifica l'utilizzo del formalismo delle categorie simpliciali nella trattazione di questioni omotopiche.

Possiamo ora dare l'ultima definizione di questa sezione.

Definizione 1.5 (BC). Data \mathcal{C} categoria piccola, denotiamo con BC la realizzazione geometrica del nervo di \mathcal{C} .

Questo spazio è denominato *spazio classificante* di \mathcal{C} . Questa nozione, se ristretta al caso dove G è un gruppo topologico, restituisce la nozione *classica* di BG come spazio base di una fibrato $EG \rightarrow BG$ con la proprietà che ogni G -fibrato principale sopra uno spazio paracompatto si ottiene come pullback del fibrato $EG \rightarrow BG$ ¹.

Quando ristretto ad uno spazio topologico discreto G ritroviamo invece la nozione di **spazio di Eilenberg-MacLane**.

Ricordiamo che lo spazio di Eilenberg-MacLane $K(G, n)$ è il² tipo di omotopia

¹Il termine 'classificante' deriva proprio da questa proprietà.

²Si dimostra l'unicità a meno di equivalenza omotopica di tale spazio, almeno quando ristretti alla categoria dei CW-complessi.

di un CW-complesso X tale che $\pi_i(X) = 0 \forall i \neq n$, $\pi_n(X) = G$.

Considerazioni elementari permettono di vedere che una ostruzione all'esistenza di un $K(G, n)$ è l'abelianità di G quando $n \geq 2$. Un risultato classico è il seguente.

Teorema 1.2. *Per ogni gruppo G esiste un $K(G, 1)$ e se G è abeliano esistono anche i $K(G, n)$ per ogni n .*

Varie dimostrazioni di questo risultato possono essere trovate in referenze classiche come Hatcher [Hat01]. Diamo una dimostrazione per il caso $n = 1$ utilizzando gli strumenti appena introdotti.

Dimostrazione. Consideriamo la categoria \mathcal{C} che ha come oggetti gli elementi di G e come morfismi quelli dati dalla moltiplicazione sinistra.

Denotiamo con EG lo spazio classificante di questa categoria.

EG è contraibile: un n -simplexso $[g_0, \dots, g_n]$ è faccia di $[e, g_0, \dots, g_n]$ e l'omotopia lineare che manda un punto $x \in [g_0, \dots, g_n]$ nel vertice $[e]$ passa a quoziente. Il gruppo G agisce *simplicialmente* e liberamente sui simplexsi di EG , pertanto l'azione è di rivestimento.

Il quoziente EG/G è conseguentemente un $K(G, 1)$: il gruppo fondamentale è G vista la corrispondenza tra automorfismi di rivestimento e gruppo fondamentale dello spazio base, inoltre i gruppi di omotopia superiori sono banali in quanto isomorfi (segue dalle proprietà di sollevamento o dalla successione esatta lunga di fibrazione) a quelli del rivestimento universale che nel nostro caso è contraibile.

□

In realtà EG/G è proprio BG : l'azione di G su EG identifica tutti gli 0-simplexsi ad un punto $[e]$ (uno qualsiasi degli oggetti di \mathcal{C}), pertanto il quoziente è un CW-complesso ottenuto incollando k -simplexsi alle k -uple di morfismi componibili (indicizzati da G e compatibilmente) che entrano ed escono da $[e]$. Questa è la realizzazione del nervo di G .

In realtà la contraibilità di EG segue da un fatto generale la cui dimostrazione segue dal teorema di Eilenberg-Zilber insieme al fatto che $B\bullet$ preserva i colimiti e usa l'omeomorfismo $BC \times BD \cong B(\mathcal{C} \times \mathcal{D})$ valido quando uno tra BC, BD è compatto. Per una referenza di questo fatto citiamo G. Segal [Seg68].

Fatto 1.3. *Il funtore $B\bullet$ manda trasformazioni naturali in omotopie.*

Come conseguenze abbiamo che una coppia di funtori aggiunti induce equivalenze omotopiche e che l'esistenza di un oggetto terminale o iniziale implica la contraibilità (questo è il caso di EG).

Fatto 1.4. *Una categoria filtrante è contraibile.*

Concludiamo il capitolo con un esempio concreto: descriviamo $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Per quanto detto, basta osservare i semplici non degeneri, che nel caso di $N\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sono uno in ogni dimensione.

Le mappe di faccia invece incollano le facce di un k -simpleso (non degeneri) doppiamente al $k - 1$ semplice non degeneri del livello inferiore (infatti le mappe di faccia non estremali atterrano su un semplice degeneri visto che compongono due morfismi non banali di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Questa è proprio la struttura simpliciale che eredita $S^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ tramite azione antipodale sugli emisferi (che si intersecano in un S^{n-1}), dunque è una struttura simpliciale per $\mathbb{R}P^n$.

Da quanto detto segue $B\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}P^\infty$, che è effettivamente un modello di $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$ in quanto quoziente dello spazio contraibile S^∞ per l'azione antipodale.

Capitolo 2

Omologia di gruppi

Introduciamo brevemente il concetto di omologia di gruppi e dimostriamo un risultato che lega l'omologia di un gruppo a quella¹ del suo spazio classificante.

Definizione 2.1. Dato G gruppo, denotiamo con $\mathbb{Z}G$ il gruppo abeliano libero sugli elementi di G . L'operazione $G \times G \rightarrow G$ ci permette di dotare $\mathbb{Z}G$ di una struttura di anello (non necessariamente commutativo) che chiameremo *group ring* di G .

Definiamo ora l'omologia di un gruppo G seguendo C. Weibel [Wei94].

Definizione 2.2 (Omologia di G a coefficienti in A). Dato A un $\mathbb{Z}G$ -modulo sinistro, definiamo l' i -esimo gruppo di omologia di G a coefficienti in A come

$$H_i(G; A) := \text{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$

dove \mathbb{Z} è considerato come $\mathbb{Z}G$ -modulo sinistro banale.

Dalla teoria standard sui funtori derivati (in particolare l'uguaglianza dei derivati sinistri del prodotto tensore sinistro e destro) ed usando la struttura banale di $\mathbb{Z}G$ -bimodulo di \mathbb{Z} , sappiamo che un calcolo effettivo di questi gruppi può essere portato avanti come segue: si sceglie

$$\dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

risoluzione proiettiva di \mathbb{Z} , si applica il funtore $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} A$

$$\dots \longrightarrow P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} A \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} A$$

¹Nei nostri casi sarà equivalente lavorare con omologia simpliciale, singolare, cellulare.

e si calcola l'omologia di questo complesso.

Per dei risultati standard di algebra omologica, per cui rimandiamo alla referenza [Wei94], l'omologia del complesso finale non dipende dalla risoluzione proiettiva scelta.

Teorema 2.1 ($H_i(G; A) \cong H_i^{cell}(K(G, 1); A)$). *L'omologia di un gruppo G con coefficienti in un $\mathbb{Z}G$ modulo A coincide con l'omologia cellulare di un CW -complesso $K(G, 1)$ a coefficienti in A .*

Dimostrazione. Consideriamo rivestimento universale $\widetilde{K(G, 1)}$ con struttura cellulare ottenuta sollevando quella del $K(G, 1)$ sottostante.

Il complesso (**di \mathbb{Z} moduli**) *aumentato* di catene cellulari associato è

$$\dots \longrightarrow C_2(\widetilde{K(G, 1)}) \xrightarrow{\delta_2} C_1(\widetilde{K(G, 1)}) \xrightarrow{\delta_1} C_0(\widetilde{K(G, 1)}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$$

dove ogni $C_k(\widetilde{K(G, 1)})$ è il gruppo abeliano libero generato dai sollevamenti delle k -celle di $K(G, 1)$. Dato che G agisce secondo *automorfismi* di rivestimento su $\widetilde{K(G, 1)}$, G agisce (a sinistra) anche sui moduli $C_k(\widetilde{K(G, 1)})$ permutando le basi e tale azione commuta con le mappe di bordo δ_\bullet (per unicità dei sollevamenti di mappe).

L'azione di G è anche compatibile con la mappa di augmentazione se a \mathbb{Z} viene data la struttura di $\mathbb{Z}G$ modulo banale.

Segue dunque che i $C_k(\widetilde{K(G, 1)})$ rimangono liberi anche come $\mathbb{Z}G$ moduli e il complesso precedente è anche un $\mathbb{Z}G$ complesso.

Questo complesso (di $\mathbb{Z}G$ moduli) è esatto: lo era osservando solo la struttura di gruppi abeliani in quanto $\widetilde{K(G, 1)}$ è contraibile e lo rimane in quanto l'azione di G è libera (e compatibile) su ogni termine.

Abbiamo perciò ottenuto una risoluzione proiettiva di \mathbb{Z} fatta di $\mathbb{Z}G$ moduli e possiamo calcolarne l'omologia dopo aver applicato il funtore $\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} A$: da un lato otteniamo per definizione l'omologia *come gruppi* $H_*(G; A)$. D'altro canto questa risulta essere per definizione l'omologia cellulare a coefficienti locali in A (indicherò così per sottolineare la dipendenza dalla particolare azione di G su A), dunque abbiamo concluso la tesi.

Facciamo anche una considerazione finale. Nel caso in cui G agisca **banalmente** su A , visto che una base di $C_k(\widetilde{K(G, 1)})$ come $\mathbb{Z}G$ modulo è in corrispondenza con una base di $C_k(K(G, 1))$ come \mathbb{Z} modulo, vale l'isomorfismo tra gruppi abeliani

$$C_k(\widetilde{K(G, 1)}) \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong C_k(K(G, 1)) \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

che è il generico termine del complesso di catene cellulari di $K(G, 1)$ a coefficienti globali in A .

In questo caso allora l'omologia calcolata è proprio $H_*^{cell}(K(G, 1); A)$ come voluto.

□

Capitolo 3

Spazi di Configurazioni e Trecce

Definiamo il gruppo di trecce su n fili e diamone una presentazione semplice, seguendo E. Artin[Art47] e il lavoro di Fox e Neuwirth[FN62b].

Definizione 3.1. Denotiamo con $C_{2,n}$ lo spazio delle configurazioni di n punti sul piano

$$C_{2,n} = \left((\mathbb{R}^2)^n \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \{x_i = x_j\} \right) / \Sigma_n$$

dove il gruppo simmetrico Σ_n agisce in maniera libera permutando le n coordinate di un punto di $(\mathbb{R}^2)^n$.

Per giustificare la prossima definizione dimostriamo un semplice lemma.

Lemma 3.1. *Lo spazio $C_{2,n}$ è connesso per archi.*

Dimostrazione. Dati (p_1, \dots, p_n) e (q_1, \dots, q_n) rappresentanti di due punti di $C_{2,n}$, mostriamo che esiste un arco che li collega. Siano x_1, \dots, x_n punti di \mathbb{R}^2 distinti tra loro e distinti da tutti i p_i, q_i . Basterà mostrare l'esistenza di archi che connettono entrambi i punti a (x_1, \dots, x_n) . Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, x_2, \dots, x_n\}$ è connesso per archi troviamo archi γ_1 e γ_2 che collegano p_1 e q_1 a x_1 . Allora $(\gamma_1, c_{p_2}, \dots, c_{p_n})$ e $(\gamma_2, c_{q_2}, \dots, c_{q_n})$ sono validi cammini¹ del quoziente che collegano rispettivamente (p_1, \dots, p_n) a (x_1, p_2, \dots, p_n) e (q_1, \dots, q_n) a (x_1, q_2, \dots, q_n) . Iterando sulle altre coordinate abbiamo la tesi. \square

¹Con c_\bullet indico il cammino costante.

Possiamo ora definire senza ambiguità il gruppo Br_n .

Definizione 3.2. Chiamiamo gruppo di trecce su n fili il gruppo

$$Br_n := \pi_1(C_{2,n}).$$

Intuitivamente questo gruppo è fatto da lacci che rappresentano n stringhe uscenti da n punti distinti ed entranti in n punti distinti che si intrecciano senza annodarsi (ossia "non tornano indietro"), osservati a meno di isotopia ambiente. L'idea intuitiva viene resa precisa dal seguente teorema noto, di cui non riporterò la dimostrazione. Una dimostrazione che utilizza la scrittura del gruppo fondamentale in termini di curve che intersecano celle di una particolare struttura di CW su $C_{2,n}$ può essere trovata in [FN62b].

Teorema 3.1. Br_n ammette una presentazione della forma

$$Br_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \forall |i-j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \forall 1 \leq i \leq n-2 \rangle.$$

Gli elementi di questo gruppo possono essere rappresentati da "diagrammi di treccia": diagrammi formati da $2n$ punti, n sopra ed n sotto, collegati da n stringhe, ognuna delle quali interseca al più una volta ogni linea orizzontale.

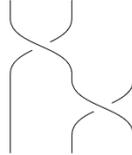


Figura 3.1: Esempio di diagramma su 3 fili.

Due tali diagrammi si dicono equivalenti se è possibile ottenere l'uno dall'altro tramite una successione di mosse ognuna delle quali deforma continuamente un filo e non crea sovrapposizioni tra le stringhe.

Se definiamo σ_i come il diagramma dove il filo i e il filo $i+1$ si scambiano mantenendo il filo i **sopra**, ed inoltre se diciamo che l'operazione di gruppo sulle classi di equivalenza di string diagrams è la concatenazione in basso di due diagrammi, allora l'esempio riportato in figura mostra l'identità $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$. Diamo ora alcune definizioni ed enunciamo alcune semplici proprietà.

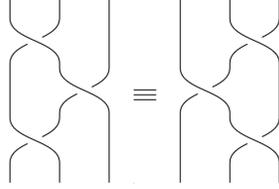


Figura 3.2: Esempio di diagrammi equivalenti.

Definizione 3.3. Consideriamo il morfismo (evidentemente surgettivo) di gruppi che associa ad una treccia $\sigma \in Br_n$ la permutazione di Σ_n indotta osservando l'estremo terminale di ogni filo.

Il nucleo di questo morfismo è detto *gruppo di trecce pure* e si indica con PBr_n .

Lemma 3.2. Definito $\widetilde{C}_{2,n}$ rispetto alla **Definizione 3.1** in maniera tale che $C_{2,n} = \widetilde{C}_{2,n} / \Sigma_n$ si ha che $\widetilde{C}_{2,n}$ è connesso per archi e $\pi_1(\widetilde{C}_{2,n}) = PBr_n$.

Dimostrazione. La dimostrazione della connessione per archi è presente nella dimostrazione del **Lemma 3.1** mentre l'isomorfismo tra il gruppo fondamentale e il gruppo di trecce pure segue dalla corrispondenza di Galois tra rivestimenti connessi e sottogruppi e dall'esattezza di

$$0 \rightarrow PBr_n \hookrightarrow Br_n \twoheadrightarrow \Sigma_n \rightarrow 0.$$

□

Il seguente lemma sarà fondamentale per il resto della trattazione.

Teorema 3.2. Un modello di $K(Br_n, 1)$, dunque lo spazio classificante di Br_n , è $C_{2,n}$.

Dimostrazione. Dato che $C_{2,n}$ è ottenuto come quoziente per l'azione libera e propriamente discontinua di un gruppo finito sullo spazio $\widetilde{C}_{2,n}$, questi due spazi hanno lo stesso π_i per $i \geq 2$. Questo segue dalla successione esatta lunga di fibrazione (la fibra è discreta).

Basterà dunque dimostrare che $\pi_i(\widetilde{C}_{2,n}) = 0 \forall i \geq 2$.

Procediamo induttivamente, ignorando il caso $n = 1$.

Per $n = 2$, $\widetilde{C}_{2,2} \cong \mathbb{C}^2 \setminus \{x = y\}$. Quest'ultimo spazio è omeomorfo tramite cambio di coordinate $(x, y) \mapsto (x, x - y)$ a $\mathbb{C}^2 \setminus \{y = 0\}$ che a sua volta è omotopicamente equivalente ad S^1 , evidentemente un $K(\mathbb{Z}, 1)$ essendo rivestito da \mathbb{R} .

Consideriamo ora la mappa $p_n : \widetilde{C}_{2,n} \rightarrow \widetilde{C}_{2,n-1}$ che dimentica l'ultimo punto. Asseriamo che questa è una fibrazione. In effetti, da un teorema di Fadell e Neuwirth (per cui rimandiamo a [FN62a]) è un fibrazione localmente banale. La fibra di un punto è $\mathbb{R}^2 \setminus \{n-1 \text{ punti}\}$, per cui possiamo esibire la seguente torre di fibrazioni.

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigvee_{n-1} S^1 & \longleftarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{n-1 \text{ punti}\} & \longrightarrow & \widetilde{C}_{2,n} \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & \dots \\
 & & & & \downarrow p_4 \\
 \bigvee_2 S^1 & \xleftarrow{\cong} & \mathbb{R}^2 \setminus \{2 \text{ punti}\} & \longrightarrow & \widetilde{C}_{2,3} \\
 & & & & \downarrow p_3 \\
 & & & & \widetilde{C}_{2,2} \xleftarrow{\cong} S^1
 \end{array}$$

La tesi segue ora per induzione osservando che nelle successioni esatte lunghe di fibrazione in omotopia, i termini $\pi_i(\bigvee_j S^1)$ sono sempre banali per $i \geq 2$. \square

Diamo ora una semplice conseguenza del teorema appena dimostrato.

Teorema 3.3. *Per ogni n , il gruppo Br_n non ha elementi di ordine finito.*

Dimostrazione. $C_{2,n}$ può essere dotato di una struttura cellulare (come esibito in [FN62b]) dove ogni cella ha dimensione al massimo $2n$.

Dimostriamo allora un fatto più generale.

Dato X CW-complesso di dimensione finita che è un modello $K(G, 1)$, vale sempre che G non ha torsione.

Se infatti G avesse torsione esisterebbe un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sottogruppo di G e \widetilde{X} rivestimento di X che è un modello **finito dimensione**² di $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$ (basta infatti prendere il rivestimento connesso di X con gruppo fondamentale $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$). Da un lato, l'omologia di \widetilde{X} è definitivamente nulla in quanto sono definitivamente nulle le catene cellulari, tuttavia anche gli *spazi lenticolari* infiniti $S^\infty/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ sono un modello di $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$ e visto che tutti i modelli di $K(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, 1)$ sono debolmente equivalenti, anche l'omologia degli spazi di lenticolari dovrebbe essere definitivamente nulla. Questo è un assurdo dato che $H_n(S^\infty/(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ per tutti gli n dispari³. \square

Concludiamo la sezione dando una ultima definizione.

²Basta sollevare una struttura cellulare di X .

³Questo fatto è un semplice calcolo che si può trovare in [Hat01] **Proposizione 2.45**.

Definizione 3.4. Definiamo il gruppo di trecce su infiniti fili come

$$Br_\infty = \varinjlim_{i \in \mathbb{N}} Br_i$$

dove il colimite è fatto sui morfismi $(i \leq j) \longleftarrow Br_i \hookrightarrow Br_j$ di inclusione dei primi i fili.

Capitolo 4

Teorema di Group Completion

In questo capitolo esponiamo una dimostrazione del teorema di Group Completion, seguendo il lavoro di D. McDuff e G. Segal [MS76].

Ricordiamo che dato M monoide topologico, la sua omologia $H_*(M)$ ammette una struttura di anello - detto *anello di Pontrjagin* - proveniente dalla mappa interna $M \times M \rightarrow M$.

Esiste una mappa naturale $M \rightarrow \Omega BM$ (BM è lo spazio classificante della categoria sottostante alla struttura monoidale) che è data da

$$M \ni m \mapsto \left(t \mapsto (m, t, 1-t) \in \coprod_{n \geq 0}^{\in M \times \Delta^1} \Delta^n \times M_n / \sim \right)$$

e questa mappa induce una mappa da $S^1 \rightarrow BM$ visto che il punto $(m, 0, 1) \sim (m, 1, 0)$. Pertanto questa composizione è una mappa continua $M \rightarrow \Omega BM$ che risulta essere anche una mappa di H -spazi¹ e dunque induce un morfismo di *anelli di Pontrjagin*.

Teorema 4.1 (Group Completion). *Dato M monoide topologico tale che $\pi_0(M)$ stia nel centro di $H_*(M)$ allora $H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}] \cong H_*(\Omega BM)$.*

In effetti dimostreremo un risultato leggermente più forte.

¹Segue notando che il loop associato ad ab è identificato alla giunzione del loop associato ad a seguito da b nel quoziente di destra.

Definizione 4.1. Dati $C \xrightarrow{f} A$, $C \xrightarrow{g} B$ morfismi fra spazi topologici, definiamo il *cilindro doppio* $cyl(A \leftarrow C \rightarrow B)$ come lo spazio quoziente

$$\left(A \sqcup C \times I \sqcup B \right) / \sim$$

per la relazione \sim che identifica $(c, 0) \sim f(c)$, $(c, 1) \sim g(c)$.

Similmente, data una successione di morfismi $X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots$ definiamo il *telescopio* $Tel(X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots)$ come lo spazio quoziente

$$\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times [n, n+1] \right) / \sim$$

per la relazione che identifica $(x_n, n) \sim (f_n(x_n), n+1)$.

Entrambi questi oggetti possono essere visti come colimiti omotopici di adeguati diagrammi di spazi.

Definizione 4.2.

- Una mappa $p : E \rightarrow B$ si dice *fibrazione in omologia* se $\forall b \in B$ la mappa $p^{-1}(b) \rightarrow F(p, b)$ di inclusione nella fibra omotopica è una equivalenza in omologia.
- Una mappa $p : E \rightarrow B$ si dice *fibrazione debole in omologia* se $\forall b \in B$ esiste un intorno di b contraibile U tale che $p^{-1}(b') \rightarrow p^{-1}(U)$ è una equivalenza in omologia per ogni $b' \in U$.

Teorema 4.2. Dato M monoide topologico che agisce su uno spazio X , definiamo X_M come la realizzazione della categoria con oggetti X e morfismi $M \times X$: per ogni (m, x) esiste un morfismo da x ad mx . Se per ogni $m \in M$ la mappa $x \mapsto mx$ induce una equivalenza in omologia allora la mappa $X_M \rightarrow BM$ è una fibrazione in omologia con fibra X .

Asseriamo che **Teorema 4.2** \Rightarrow **Teorema 4.1**.

Dimostrazione. Assumiamo inizialmente $\pi_0(M) = \mathbb{N}$ e sia m_1 nella componente connessa 1. Sia $M_\infty = Tel(M \xrightarrow{m_1} M \xrightarrow{m_1} \dots)$. L'omologia di M_∞ è il limite diretto di $H_*(M) \rightarrow H_*(M) \rightarrow \dots$ con mappe indotte dalla moltiplicazione per m_1 . Questo colimito è proprio la localizzazione $H_*(M)[\pi_0(M)^{-1}]$ (sotto le ipotesi di centralità del **Teorema 4.1**).

M agisce a sinistra su M_∞ inducendo equivalenze in omologia: il cammino tra m e $k \cdot m_1$ (per una appropriata scelta di k affinché esista) testimonia l'omotopia

tra le mappe di moltiplicazione per m e per $k \cdot m_1$ pertanto è sufficiente notare che la moltiplicazione per m_1 (e dunque sue iterazioni) induce isomorfismi in omologia. Questo però è conseguenza di come abbiamo definito M_∞ .

Segue dal **Teorema 4.2** che la mappa $(M_\infty)_M \rightarrow BM$ è una fibrazione in omologia e dunque la fibra M_∞ e la fibra omotopica hanno stessa omologia. La fibra omotopica è però il loop space ΩBM dato che $(M_\infty)_M$ è contraibile (è un telescopio con pezzi M_M che sono contraibili in quanto la categoria da cui provengono ha oggetto iniziale $[e]$) e dunque vale il **Teorema 4.1**.

Se $\pi_0(M) \neq \mathbb{N}$ ma generato da $\{m_1, \dots, m_k\}$, si consideri m nella componente connessa di $m_1 \cdot \dots \cdot m_k$. Il procedimento precedente ci dice che

$H_*(M)[(m_1 \cdot \dots \cdot m_k)^{-1}] \cong H_*(\Omega BM)$, tuttavia invertire il prodotto dei generatori corrisponde ad invertire tutto il monoide $\pi_0(M)$.

Nel caso di $\pi_0(M)$ generico basta notare che un monoide è limite diretto dei propri sottomonoidi finitamente generati e i funtori $H_*(\bullet), B\bullet$ rispettano i colimiti (già notato per il **Fatto 1.3**). \square

Rimane da dimostrare il **Teorema 4.2**. Procederemo come segue: dimostreremo preliminarmente che il teorema vale sostituendo nella tesi *fibrazione in omologia* con la nozione più lasca di *fibrazione debole in omologia* e successivamente mostreremo che *fibrazione debole in omologia* \Rightarrow *fibrazione in omologia*. Non ci metteremo problemi nel considerare spazi localmente contraibili: possiamo sostituire X con $|\text{Sin}(X)|$ che ha questa proprietà ed è omotopicamente equivalente per il **Teorema 1.1**.

Lemma 4.1. *Dato una diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \longleftarrow & E_0 & \longrightarrow & E_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xleftarrow{f_1} & B_0 & \xrightarrow{f_2} & B_2 \end{array}$$

con p_i fibrazioni deboli e $p_0^{-1}(b) \rightarrow p_i^{-1}(f_i(b))$ equivalenza omologica per ogni $b \in B_0$, allora anche la mappa indotta tra i cilindri

$\text{cyl}(E_1 \leftarrow E_0 \rightarrow E_2) \xrightarrow{p} \text{cyl}(B_1 \leftarrow B_0 \rightarrow B_2)$ è una fibrazione debole in omologia.

Dimostrazione. Ogni punto di $\text{cyl}(B_1 \leftarrow B_0 \rightarrow B_2)$ possiede intorno arbitrariamente piccoli della forma di mapping cylinder $\text{cyl}(U_0 \rightarrow U_i)$ con $U_0 \subset B_0$ e $U_i \subset B_i$.

La preimmagine rispetto a p è data da $\text{cyl}(p_0^{-1}(U_0) \rightarrow p_i^{-1}(U_i))$.

Se $i = 0$ questa mappa è semplicemente $(p_0^{-1}, Id) : U_0 \times I \rightarrow p_0^{-1}(U_0) \times I$ che è chiaramente una fibrazione debole dato che - componendo con la contrazione della seconda coordinata che è una equivalenza omotopica, è equivalente al fatto che p_0 sia fibrazione debole in omologia.

Se $i \neq 0$ allora abbiamo due casi da controllare: $b' \in U_i$ oppure $b' \in \text{cyl}(U_0 \rightarrow U_i) \setminus U_i$.

Nel primo caso, l'inclusione $p^{-1}(b') \rightarrow \text{cyl}(p_0^{-1}(U_0) \rightarrow p_i^{-1}(U_i))$ è una equivalenza in omologia in quanto - nuovamente contraendo il corpo del cilindro in arrivo - equivalente al fatto che p_i è fibrazione debole.

Nel secondo caso vale una cosa simile: contraendo entrambi i corpi dei cilindri, chiedere che $p^{-1}(b') \rightarrow \text{cyl}(p_0^{-1}(U_0) \rightarrow p_i^{-1}(U_i))$ sia una equivalenza in omologia è equivalente a chiedere che lo sia $p_0^{-1}(b') \rightarrow p_i^{-1}(f_i(b'))$.

Queste condizioni sono garantite dalle ipotesi e pertanto la tesi è verificata. \square

Teorema 4.3. *Dato M monoide topologico che agisce su uno spazio X , definiamo X_M come la realizzazione della categoria con oggetti X e morfismi $M \times X$. Se per ogni $m \in M$ la mappa $x \mapsto mx$ induce una equivalenza in omologia allora la mappa $X_M \rightarrow BM$ è una fibrazione debole in omologia con fibra X .*

Questo teorema è l'esatto analogo del **Teorema 4.2** ma con fibrazioni deboli.

Dimostrazione. Dimostriamo la tesi per induzione sugli scheletri. Il caso degli 0-scheletri è evidente.

Osserviamo che X_M e BM sono le realizzazioni geometriche degli insiemi simpliciali $X \times M^k$ ed M^k . Gli scheletri $|X_M|_k, |BM|_k$ sono rispettivamente i double mapping cylinder delle righe del seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} |X_M|_{k-1} & \longleftarrow & \partial\Delta^k \times X \times M^k & \longrightarrow & \Delta^k \times X \times M^k \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_0 & & \downarrow p_2 \\ |BM|_{k-1} & \xleftarrow{f_1} & \partial\Delta^k \times M^k & \xrightarrow{f_2} & \Delta^k \times M^k \end{array}$$

Le due mappe verticali di destra sono fibrazioni indotte dalla proiezione e dunque in particolare fibrazioni deboli in omologia.

La mappa verticale a sinistra è una fibrazione debole per ipotesi induttiva.

Per concludere che anche la mappa indotta fra i due colimiti è una fibrazione debole dobbiamo verificare la seconda condizione del **Lemma 4.1**: $p_0^{-1}(b) \rightarrow p_i^{-1}(f_i(b))$ deve essere equivalenza in omologia.

Le mappe f_1 ed f_2 , per come abbiamo definito la realizzazione geometrica, sono indotte dalle mappe di faccia. Ricordiamo che queste mappe di faccia (che provengono dalla struttura simpliciale del nervo) prendono una k -upla di morfismi componibili e la identificano con una $k - 1$ -upla di morfismi componibili nel seguente modo: d_0 dimentica il primo morfismo (dunque percorre la catena partendo dal primo target), d_i compone i -esimo ed $i + 1$ -esimo morfismo della catena mentre d_n dimentica l'ultimo morfismo.

Dato che X_M è costruito incollando k -simplessi a k -uple di morfismi *indicizzati da M* ma con sorgente un oggetto di X , tutte le mappe di faccia tranne

d_0 inducono come inclusione delle fibre $p_0^{-1}(b) \rightarrow p_i^{-1}(f_i(b))$ l'identità - che è evidentemente una equivalenza omologica.

Per quanto riguarda l'incollamento tramite le mappe d_0 invece vale la seguente considerazione: se d_0 stava agendo su una catena con sorgente $x \in X$ e con primo morfismo m (dunque primo target mx) allora la mappa di inclusione tra le fibre $p_0^{-1}(b) \rightarrow p_i^{-1}(f_i(b))$ corrisponderà alla moltiplicazione per m . Per ipotesi sappiamo che M agisce su X tramite equivalenze in omologia, pertanto anche questa mappa indurrà isomorfismo in omologia intera.

Abbiamo verificato tutte le ipotesi del **Lemma 4.1** e pertanto ne concludiamo induttivamente che $|X_M|_k \rightarrow |BM|_k$ è una fibrazione debole.

La tesi sugli scheletri e il lemma sui doppi cilindri ci permettono di fare un passaggio al limite:

per ogni catena di spazi $X_\bullet \xrightarrow{f_\bullet}$ il telescopio $Tel(X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots)$ è il doppio cilindro

$$\left(\prod_{i \text{ pari}} X_i \leftarrow \prod_i X_i \rightarrow \prod_{i \text{ dispari}} X_i \right)$$

dove la mappa di sinistra è inclusione nei pari ed incollamento nel dispari precedente, viceversa per la mappa a destra.

□

Rimane da dimostrare, come preannunciato, che *fibrazione debole in omologia* \Rightarrow *fibrazione in omologia*. In questo modo possiamo concludere che $X_M \rightarrow BM$ è fibrazione in omologia e dunque che vale il **Teorema 4.1** come mostrato in 4.

Stabiliremo l'implicazione in due lemmi.

Lemma 4.2. *Dato B contraibile localmente contraibile e $p : E \rightarrow B$ fibrazione debole in omologia, allora l'inclusione $p^{-1}(b) \rightarrow E$ è una equivalenza in omologia $\forall b \in B$.*

Dimostrazione. Vista l'ipotesi di p fibrazione debole in omologia possiamo prendere una base \mathfrak{B} di aperti U di B tali che $p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(U)$ sia una equivalenza omologica per tutti i $b \in U$.

Possiamo sostituire B con $|\mathfrak{B}|$ (che adesso mostriamo essere contraibile e dunque a lui omotopicamente equivalente) e E con uno spazio (a lui equivalente) $E_{\mathfrak{B}}$ tale che la mappa $E_{\mathfrak{B}} \rightarrow |\mathfrak{B}|$ rispetti la seguente condizione:

la fibra di un punto nella parte interna di un semplice $[U_0 \subset \dots \subset U_p] \subset |B|$ è $p^{-1}(U_0)$.

Otterremo la tesi tramite la sequenza spettrale di Serre applicata alla filtrazione di $E_{\mathfrak{B}}$ data dalle preimmagini degli scheletri di $|\mathfrak{B}|$. Ci riferiamo in particolare alla **Proposizione 16, pag. 480** di [Spa59]

Per la contraibilità di $|\mathfrak{B}|$: visto che \mathfrak{B} è una base, sopra ogni punto $x \in B$

e collezione finita di aperti U_i sopra x , esiste un oggetto U di \mathfrak{B} tale che $x \in U \subset U_1 \cap \dots \cap U_n$.

Segue che per ogni punto x la sovra-categoria sopra x è filtrata e dunque contraibile per il **Fatto 1.4** e dunque che $|\mathfrak{B}| \rightarrow B$ è una equivalenza omotopica per il Teorema A di Quillen (citiamo come referenza il **Teorema IV, 3.7** di [Wei13]).

Dai noti risultati di convergenza di questa successione spettrale abbiamo

$$H_p(|\mathfrak{B}|, \mathfrak{H}_q) \Rightarrow H_*(E_{\mathfrak{B}})$$

dove indichiamo con \mathfrak{H}_q il sistema di coefficienti locali $U \mapsto H_q(p^{-1}(U))$.

Dato che $|\mathfrak{B}|$ contraibile vale $H_0(|\mathfrak{B}|, \mathfrak{H}_q) \cong H_q(E)$ e dunque che $H_q(B) \cong H_q(E)$. □

Lemma 4.3. *Dato B spazio paracompatto localmente contraibile e $p : E \rightarrow B$ fibrazione debole, l'inclusione $p^{-1}(B) \rightarrow F(p, b)$ è una equivalenza in omologia per ogni $b \in B$.*

Dimostrazione. Ricordiamo che $F(p, b)$ è il pullback di

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow \text{val}_1 & \\ E & \longrightarrow & B \end{array}$$

dove P è lo spazio dei cammini uscenti da b e val_1 è una fibrazione di Hurewicz². Presa una base \mathfrak{B} di aperti contraibili di B , possiamo costruire una base di P , denotata \mathfrak{B}^* , tale che $\text{val}_1(U) \in \mathfrak{B} \forall U \in \mathfrak{B}^*$ ed inoltre $\text{val}_1 \upharpoonright U : U \rightarrow \text{val}_1(U)$ fibrazione di Hurewicz.

Possiamo costruire questi aperti così: consideriamo i sottinsiemi

$$P(t_1, \dots, t_k; U_1, \dots, U_k; V_1, \dots, V_k) \subset P \text{ con}$$

$$0 = t_1 \leq \dots \leq t_k = 1 \text{ e } U_1 \supset V_1 \subset U_2 \supset V_2 \subset \dots \subset U_k \text{ in } \mathfrak{B}.$$

Dichiariamo che un cammino α (punto di P) appartiene a questo insieme se e solo se $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i \forall i < k$ e $\alpha(t_i) \in V_i$.

Ricordando la topologia compatto aperta di P , si ricava che questi insiemi sono aperti e inoltre sono contraibili.

Abbiamo allora che $\text{val}_1 \upharpoonright U$ è una equivalenza omotopica e una fibrazione di Hurewicz e dunque $\text{val}_1^* E|_U \rightarrow E|_{\text{val}_1(U)}$ è una equivalenza omotopica.

Adesso seguendo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} f^* E & \longrightarrow & P \\ \downarrow & & \downarrow \text{val}_1 \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

²Questa è la *pathspace fibration*.

sugli aperti garantiti dal fatto che p è fibrazione debole e componendo con le equivalenze omotopiche, abbiamo che $f^*E \rightarrow P$ è anch'essa fibrazione debole. Abbiamo appena dimostrato che $F(p, b) \rightarrow P$ è fibrazione debole ma P è localmente contraibile e contraibile, pertanto il **Lemma 4.2** garantisce che l'inclusione di una fibra in $F(p, b)$ sia equivalenza in omologia. Nuovamente seguendo il diagramma si ottiene la tesi. □

Abbiamo effettivamente dimostrato con i lemmi precedenti che *fibrazione debole in omologia* \Rightarrow *fibrazione in omologia* concludendo a cascata le dimostrazioni del **Teorema 4.2** e **4.1**.

Capitolo 5

Spazi di configurazione e loop iterati

Seguiamo in questo capitolo la trattazione di [Seg73].

Come convenzione, userò \cong per indicare omeomorfismi e \approx per equivalenze omotopiche.

Tutti gli spazi trattati sono tacitamente assunti avere il tipo di omotopia di un CW complesso.

Generalizziamo preliminarmente le definizioni date nel **Capitolo 3**.

Definizione 5.1. Definiamo $C_n = \sqcup C_{n,k}$ con

$$C_{n,k} = \left((\mathbb{R}^n)^k \setminus \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} \{x_i = x_j\} \right) / \Sigma_k$$

topologizzato come unione disgiunta di quozienti di aperti di $\mathbb{R}^{n \cdot k}$.

Vogliamo dare una struttura di monoide topologico a questo spazio: la giustapposizione. Per fare ciò modifichiamo leggermente C_n .

Definizione 5.2. Sia $C'_n = \{(c, t) \in C_n \times \mathbb{R}^+ \mid c \subset (0, t) \times \mathbb{R}^{n-1}\}$.

Lemma 5.1. $C'_n \approx C_n$.

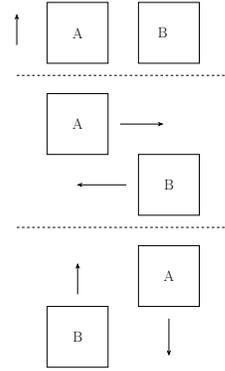
Dimostrazione. L'omotopia

$$(c, t) \xrightarrow{h \in [0,1]} \left(c \cdot \frac{t + h \cdot (1-t)}{t}, t + h \cdot (1-t) \right)$$

termina in uno spazio omeomorfo a C_n tramite l'omeomorfismo che manda $\mathbb{R}^n \mapsto (0, 1) \times \mathbb{R}^{n-1}$. □

Il vantaggio di considerare C'_n è che ha una naturale struttura di monoide. Presi (x_1, t_1) e (x_2, t_2) definiamo la loro somma come $(x_1 \cup \text{trasl}(x_2, t_1), t_1 + t_2)$ dove con $\text{trasl}(\bullet, t)$ si intende la configurazione in cui la prima coordinata di tutti i punti è stata traslata avanti di t .

Questo monoide è inoltre omotopicamente commutativo: tramite una omotopia che stringe la seconda coordinata di ogni punto dentro $(0, 1)$ abbiamo liberato una dimensione dove far scorrere le configurazioni e farle commutare.



Siamo interessati a dimostrare il seguente

Teorema 5.1. $BC'_n \approx \Omega^{n-1}S^n$.

Dimostreremo il **Teorema 5.1** in maggiore generalità:

Definizione 5.3. Dato uno spazio topologico X con un *buon punto base* 0 (ossia $0 \in X$ è un retratto di deformazione di un suo intorno) definiamo $C_n(X)$ (configurazioni etichettate da X) come il quoziente di

$$\bigsqcup_k (\widetilde{C}_{n,k} \times X^k) / \Sigma_k$$

per la relazione che identifica $(c_1, x_1) \sim (c_2, x_2)$ se $c_1 \subset c_2$, $x_2 \upharpoonright_{c_1} = x_1$ e $x_2(p) = 0 \forall p \notin c_1$.

Stiamo pensando ai punti di $C_n(X)$ come configurazioni di \mathbb{R}^n etichettate da punti di X diversi dal punto 0 .

In questo modo, C_n corrisponde a $C_n(S^0)$.

Definiamo lo spazio $C'_n(X)$ in maniera analoga a prima, ottenendo uno spazio omotopicamente equivalente a $C_n(X)$.

Il **Teorema 5.1** sarà implicato dal seguente

Teorema 5.2. $BC'_n(X) \approx \Omega^{n-1}S^n X$.

La strategia dimostrativa sarà la seguente: dimostreremo che vale il

Lemma 5.2. $BC'_n(X) \approx C_{n-1}(SX)$.

e che questo lemma implica il **Teorema 5.2**.

Dato che la dimostrazione del **Lemma 5.2** è laboriosa, mostriamo prima l'implicazione.

Lemma 5.3. *Dato M monoide topologico connesso per archi vale $M \approx \Omega BM$.*

Dimostrazione. La costruzione classica di $EM \rightarrow BM$ è tale che EM sia contraibile ad esempio in quanto realizzazione di una categoria con oggetto iniziale (oppure esattamente come fatto nel caso di $M = G$ gruppo, basta fare scorrere linearmente un k -simplexso $[m_0, \dots, m_k]$ visto come faccia di $[e, m_0, \dots, m_k]$ verso $[e]$) ed ha fibre omotope ad M .

Nel caso generale $EM \rightarrow BM$ non è una fibrazione ma solo una *quasi-fibrazione*, ossia induce comunque una successione esatta lunga in omotopia.

Il seguente è un fatto classico: data $F \rightarrow E \rightarrow B$ quasi-fibrazione con E contraibile allora $F \approx \Omega B$ (a priori in senso debole).

Considero h_t contrazione di E e noto che $E \ni e \mapsto p(h_t(e)) \in B$ definisce una mappa $E \rightarrow PB$ che si restringe su F ad una mappa $F \rightarrow \Omega B$ (che è proprio quella che voglio). Osservando il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \updownarrow \\ \Omega B & \hookrightarrow & PB & \xrightarrow{\gamma \mapsto \gamma(1)} & B \end{array}$$

e leggendolo tramite successione lunga in omotopia di (quasi-)fibrazione, ne concludo che $F \rightarrow \Omega B$ è equivalenza omotopica debole usando il lemma dei cinque.

Rimane da dimostrare che $EM \rightarrow BM$ sia effettivamente una quasi-fibrazione. Per comodità rimandiamo la dimostrazione all'**Appendice B**. \square

Osserviamo la seguente catena di equivalenze omotopiche, valide dal **Lemma 5.3** (stiamo traducendo le equivalenze deboli in equivalenze):

$$C_{n-1}(SX) \approx C'_{n-1}(SX) \approx \Omega BC'_{n-1}(SX) \approx \Omega C'_{n-1}(S^2 X) \approx \dots \approx \Omega^{n-1} C_0(S^n X)$$

e guardando il primo e l'ultimo termine concludiamo che **Lemma 5.2** \Rightarrow **Teorema 5.2**.

Cominciamo ora con la dimostrazione del **Lemma 5.2**.

Un monoide topologico parziale è definito come il dato di una coppia $M, M_2 \subset M \times M$ (questo sottospazio è fatto dai punti componibili) ed una mappa $M_2 \rightarrow M$ tale che esista un elemento neutro $1 \in M, 1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ e tale che $m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3) = (m_1 \cdot m_2) \cdot m_3$.

A $C_{n-1}(X)$ è possibile dare una struttura di monoide parziale: $(c_1, x_1) \cdot (c_2, x_2)$ è definito se e solo se $c_1 \cap c_2 = \emptyset$ ed in tal caso vale $(c_1 \cup c_2, x_1 \cup x_2)$.

In maniera analoga a quanto fatto nel **Capitolo 1** possiamo associare ad un monoide parziale M uno spazio BM costruito incollando simplessi alle k -uple di morfismi componibili: più precisamente definiamo $M_k \subset M \times \cdots \times M$ come il sottospazio formato dalle k -uple di punti di M tali che ogni coppia di coordinate vicine stia in M_2 . Questo spazi hanno una usuale struttura di insieme simpliciale con mappe di faccia e di degenerazione date rispettivamente dalla composizione (o dall'esclusione del primo o ultimo morfismo) oppure dall'inserzione di un morfismo identità.

Sotto queste notazioni possiamo concludere che

Lemma 5.4. $BC_{n-1}(X) \cong C_{n-1}(SX)$.

Dimostrazione. Per semplicità seguiamo la notazione di [Seg73] ponendo $M = C_{n-1}(X)$. Vogliamo dimostrare un *omeomorfismo*. Esibiamo mappe in entrambe le direzioni.

Consideriamo Δ^k come le k -uple crescenti $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1$. Possiamo definire una mappa $BC_{n-1}(X) \rightarrow C_{n-1}(SX)$ come segue:

preso un punto di $M_k \times \Delta^k \ni ((c_1, x_1), \dots, (c_k, x_k), t_1, \dots, t_k)$ lo mappiamo in $(\cup c_i, \tilde{x}) \in C_{n-1}(SX)$ dove $\tilde{x} \stackrel{\in c_i}{(p)} = (t_i, x_i(p))$.

Questa mappa passa a quoziente dell'unione disgiunta $\bigsqcup M_k \times \Delta^k$ definendo così una mappa $BM \rightarrow C_{n-1}(SX)$ che risulta surgettiva ed iniettiva.

Notiamo infatti che possiamo prendere $x \in BM$ ed osservarlo nella parte interna di un k simpleso non degenerare: diventa evidente che l'immagine di x determina uno e un solo valore di x : la cardinalità della configurazione di SX ci dice il valore di k , le altezze ci dicono le coordinate sul simpleso e (il dato del)le etichette ci dicono a quale k -simpleso appartiene x .

Questa considerazione si traduce in una inversa, che è continua dato che proviene dal passaggio a quoziente della mappa $\widetilde{C_{n,k}} \times X^k \times [0, 1]^k \rightarrow M^k \times [0, 1]^k \rightarrow M^k \times \Delta^k$.

□

Consideriamo ora

$$C'_n(X) \supset C''_n(X) = \{(c, x, t) \in C'_n(X), |pr_2(c)| = |c|\}$$

dove $pr_2 : \mathbb{R}^n_{(0,t)} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ è la proiezione sulle ultime $n - 1$ coordinate (quelle non limitate da t). Questo spazio eredita la struttura di monoide *parziale*¹ topologico da $C'_n(X)$.

¹Infatti, sebbene su $C'_n(X)$ la composizione sia sempre ben definita, non è vero che lo è quando ristretta ai *proiettabili*. Ad esempio $c + c$ non è mai proiettabile per qualsiasi configurazione c non vuota.

$C_n''(X)$ si proietta su $C_{n-1}(X)$ e questa mappa rispetta le operazioni di monoide. In particolare due elementi di $C_n''(X)$ sono componibili se e solo se lo sono le immagini tramite questa mappa.

La mappa di proiezione ha come inversa omotopica

$$C_{n-1}(X) \ni (c, x) \mapsto (s(c), x, 1) \in C_n''(X)$$

con $s : \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{x \mapsto (1/2, x)} \mathbb{R}^n$ e l'omotopia è quella che prima schiaccia la prima coordinata in $(0, 1)$ e poi comprime tutta la altezza sulla sezione $t = 1$.

Data la compatibilità della proiezione con le due strutture di monoide parziali osserviamo che anche la mappa indotta sugli scheletri $C_n''(X)_k \rightarrow C_{n-1}(X)_k$ è una equivalenza omotopica e dunque anche la mappa indotta fra i rispettivi spazi classificanti $BC_n''(X) \rightarrow BC_{n-1}(X)$ per il lemma seguente.

Lemma 5.5. *Data $f : A \rightarrow B$ mappa fra spazi simpliciali con un buon punto base 5.3 che induce equivalenze omotopiche $A_n \rightarrow B_n$, allora anche $|A| \rightarrow |B|$ è una equivalenza omotopica.*

Dal **Lemma 5.5** concludiamo che $BC_n''(X) \approx BC_{n-1}(X)$ pertanto per concludere il **Lemma 5.2** basta mostrare che $BC_n''(X) \approx BC_n'(X)$. Per fare ciò introduciamo alcune nuove nozioni.

Definizione 5.4 (Twisted Arrows category). Data \mathcal{C} categoria piccola, denotiamo con $tw(\mathcal{C})$ la categoria con oggetti i morfismi $a \rightarrow b$ di \mathcal{C} e come morfismi $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)$ i quadrati commutativi della forma

$$\begin{array}{ccc} a & \longleftarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow \\ b & \longrightarrow & d \end{array}$$

in \mathcal{C} .

Seguendo [Cal22] e [Seg73] mostriamo che

Lemma 5.6. $BC \cong B(tw\mathcal{C})$.

Questo interessante fatto è un istanza di *edgewise subdivision* di Segal.

Definizione 5.5. Definiamo il funtore $\epsilon : \Delta \rightarrow \Delta$ in maniera tale che

$$\epsilon([n]) = [n]^{op} \star [n] = (\bar{n} < \overline{n-1} < \dots < \bar{0} < 0 < \dots < n) \cong [2n+1].$$

Dato X insieme simpliciale definiamo la sua *edgewise Segal subdivision* come $sd(X) = X \circ \epsilon$.

In questo modo, $sd(\bullet)$ è un funtore $\mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{sSet}$ e

Fatto 5.1. $sd(s_j) = s_{n-j} \circ s_{n+1+j}$, $sd(d_j) = d_{n-j} \circ d_{n+1+j}$.

Questa suddivisione è legata alla *categoria twistata* come precisato dal prossimo lemma.

Lemma 5.7. *Data \mathcal{C} categoria piccola vale $sd(N\mathcal{C}) \cong N(\text{tw}\mathcal{C})^2$.*

Dimostrazione. In maniera evidente vale $sd(\mathcal{C})_n \cong N\mathcal{C}_{2n+1}$ dato che corrispondono alle $2n + 1$ -uple di morfismi componibili di \mathcal{C} .

$$sd(N\mathcal{C})_1 \cong N\mathcal{C}_3 = \{\rightarrow \cdot \rightarrow \cdot \rightarrow\} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \cdot & \leftarrow & \cdot & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdot & \rightarrow & \cdot & & \end{array} \right\} = N \text{tw}(\mathcal{C})_1$$

Per una considerazione analoga vale $N\mathcal{C}_{2n+1} \cong N(\text{tw}\mathcal{C})_n$ in quanto i diagrammi di n quadrati *twistati* commutativi

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{0} & \leftarrow & \bar{1} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \overline{n-1} & \leftarrow & \bar{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & n-1 & \rightarrow & n \end{array}$$

sono in corrispondenza con le catene di $2n + 1$ -uple di morfismi di \mathcal{C} osservando il percorso esterno (i morfismi centrali sono forzati dalla commutatività)

$$\begin{array}{ccccccccc} \bar{0} & \leftarrow & \bar{1} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & \overline{n-1} & \leftarrow & \bar{n} \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & 1 & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & n-1 & \rightarrow & n \end{array}$$

inoltre le mappe di faccia e di degenerazione corrispondono ad unione di due quadrati adiacenti o inserzione di un quadrato con lati identità. Seguendo gli indici si ottengono le relazioni del **Fatto 5.1** e si conclude l'isomorfismo cercato. \square

Lemma 5.8. *Per tutti gli insiemi simpliciali X vale $|X| \cong |sd(X)|$.*

Dimostrazione. Seguiamo la dimostrazione di Segal [Seg73].

Interpretando Δ^n come le tuple $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq 1$ notiamo che può essere suddiviso in 2^n semplici in base all'ordinamento della tupla $(t_1, \dots, t_n, 1 - t_n, \dots, 1 - t_1)$ (ossia, ad esempio, quante tali tuple sono debolmente crescenti): in ogni punto della successione posso scegliere se il termine successivo sia uno dei t_i o uno degli $1 - t_i$ (e la scelta in tal caso è forzata compatibilmente con l'ordinamento ed è determinata dopo n elementi per la simmetria $t_i \leftrightarrow 1 - t_{n-i}$). Costruiamo mappe $|sd(X)| = |X \circ \epsilon| \rightleftharpoons |X|$. I 2^n semplici in cui viene diviso

²Qui l'isomorfismo è inteso in $sSet$.

Δ^n sono indicizzati da mappe $\theta : [2n+1] \rightarrow [n]$ (ad esempio, interpretando ogni apparenza di t_i in una delle tuple dette precedentemente come un $+1$ e quella di un $1 - t_i$ come un $+0$).

Denotata con i la mappa $\Delta^n \rightarrow \Delta^{2n+1}$

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \left(1 - \frac{t_n}{2}, \dots, 1 - \frac{t_1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{t_1}{2}, \dots, \frac{t_n}{2}\right)$$

vale che $\theta_* \circ i$ è un omeomorfismo $\Delta^n \rightarrow \Delta^{2n+1} \rightarrow \Delta_\theta^n$. Allora le mappe

$$X_{2n+1} \times \Delta^n \rightarrow X_{2n+1} \times \Delta^{2n+1} : (x, p) \mapsto (x, i(p))$$

$$X_n \times \Delta_\theta^n \rightarrow X_{2n+1} \times \Delta^n : (x, \theta_* \circ i(p)) \mapsto (\theta^* x, p)$$

inducono sulle realizzazioni mappe una l'inversa dell'altra. \square

Abbiamo sviluppato delle nozioni e dimostrato dei risultati che ci permettono di sostituire una categoria piccola \mathcal{C} con la categoria $tw(\mathcal{C})$ ogni qual volta siamo interessati a dei risultati inerenti (il tipo di omeomorfismo di) BC .

Vogliamo stabilire il seguente risultato:

Lemma 5.9. *l'inclusione $C_n''(X) \rightarrow C_n'(X)$ induce una equivalenza $BC_n''(X) \approx BC_n'(X)$.*

Per quanto appena mostrato, considereremo $BC_n'(X)$ come la realizzazione di $tw(C_n'(X))$.

Definiamo Q come la categoria ordinata con oggetti $(u, v, c, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C_n \times X / \sim$ dove c è un subset di $\mathbb{R}_{u,v}^n$, $u \leq 0 \leq v$, $x : c \rightarrow X$ (soggetto alle relazioni di equivalenza definite in **Definizione 5.3**) e morfismo $a \rightarrow b$ se e solo se $a \leq b$. Ordiniamo Q per inclusione nella maniera naturale: $(u, v, c, x) \leq (u', v', c', x') \Leftrightarrow [u, v] \subset [u', v']$, $c' \cap [u, v] \times \mathbb{R}^{n-1} = c$, $x' \upharpoonright c = x$.

Possiamo definire un funtore $Q \rightarrow tw(C_n'(X))$ mandando

$$(u, v, c, x) \mapsto (trasl(c, -u), x, u - v).^3$$

Lemma 5.10. *La mappa indotta fra le realizzazioni $|Q| \xrightarrow{\pi} |tw(C_n'(X))|$ è shrinkable (ossia esiste una sezione s tale che $s|\pi| \approx Id$ tramite una contrazione delle fibre che preservi le fibre in ogni istante) e dunque è una equivalenza omotopica.*

Dimostrazione. Definito \mathcal{I} come lo spazio ordinato degli intervalli chiusi che contengono lo zero, possiamo considerare Q come il pullback di

$$\mathcal{I} \rightarrow tw(\mathbb{R}_+) \leftarrow tw(C_n'(X))$$

³Ricordiamo che i morfismi della categoria associata ad un monoide sono identificati con gli elementi del monoide quindi è lecito identificare gli oggetti della rispettiva categoria twistata con gli elementi del monoide.

dove la prima mappa è $[u, v] \mapsto (0 \xrightarrow{v-u} 0)$ mentre la seconda è indotta dal morfismo di monoidi $(c, x, t) \mapsto t$.

Dato che il nervo commuta con i prodotti fibrati basta osservare che la mappa $|\mathcal{I}| \rightarrow |tw(\mathbb{R}_+)|$ è shrinkable tramite una contrazione di \mathbb{R} che chiaramente rispetta l'ordinamento di \mathcal{I} . □

Consideriamo ora il sottospazio ordinato P di Q formato dai punti (u, v, c, x) con c proiettabile. Vale $\pi(P) = tw(C''_n(X))$ e lo shrinking presentato prima testimonia nuovamente $|P| \xrightarrow{\cong} |tw(C''_n(X))| \cong BC''_n(X)$.

Pertanto abbiamo dimostrato che

Lemma 5.11. *Se la mappa di inclusione $P \rightarrow Q$ induce una equivalenza omotopica $|P| \xrightarrow{\cong} |Q|$ allora è vero che $BC''_n(X) \approx BC'_n(X)$ e dunque il **Lemma 5.2** (ed il **Teorema 5.2** a cascata).*

Rimangono ora un paio di lemmi tecnici che ci permettono di concludere. Citando Segal, la ragione per cui ci si dovrebbe aspettare che $P \rightarrow Q \Rightarrow |P| \xrightarrow{\cong} |Q|$ è che per ogni punto q di Q troviamo un punto di P che sta sotto qualsiasi coppia di punti sotto q .

Lemma 5.12. *Sia Q uno spazio topologico con un buon punto base che sia ordinato in maniera tale che*

- *$inf(q_1, q_2)$ (che indichiamo con $q_1 \cap q_2$) sia definito ogni qual volta q_1, q_2 ammettano un maggiorante comune;*
- *$q_1 \cap q_2$ sia continuo in q_1 e q_2 se definito.*

Sia Q_0 un sottospazio aperto di q tale che tutti i punti di Q sotto ad un punto di Q_0 stiano in Q_0 .

Supponiamo Q ammetta un ricoprimento numerabile ⁴ $(U_\alpha)_\alpha$ tale che esistano mappe continue $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow Q_0$ con $f_\alpha(q) \leq q \forall q \in U_\alpha$.

Sotto tali ipotesi la mappa di inclusione induce $|Q_0| \rightarrow |Q|$ equivalenza omotopica.

Questo lemma implica il risultato voluto: X ha un buon punto base e l'omotopia corrispondente si solleva a mappe $h_t : Q \rightarrow Q$. Se prendiamo $Q_0 = h_1^{-1}(P)$ (che è chiaramente omotopicamente equivalente a P tramite h_t) e dimostriamo che valgono le ipotesi allora abbiamo concluso il risultato.

Le ipotesi sono verificate dato che l'omotopia che shrinka la mappa $Q \rightarrow tw(C'_n(X))$ è una contrazione di un intorno di un buon punto base che sta sulla fibra di un buon punto base di $tw(C'_n(X))$ (la suddivisione di Segal di uno

⁴Nel senso di [Dol63], ossia esiste una partizione dell'unità localmente finita i cui supporti rifiniscono il ricoprimento.

spazio con un buon punto base è ben puntato), pertanto Q è ben puntato. Indicati con $q_1 = (u_1, v_1, c_1, x_1)$, $q_2 = (u_2, v_2, c_2, x_2)$ la quantità $\text{inf}(q_1, q_2)$ è definita quando $(c_1, x_1), (c_2, x_2)$ coincidono su $([u_1, v_1] \cap [u_2, v_2]) \times \mathbb{R}^{n-1}$, che è equivalente ad ammettere un maggiorante comune secondo l'ordinamento dato a Q .

Nel sottospazio di $C \subset Q \times Q$ dove $\text{inf}(q_1, q_2)$ è definito, corrisponde a

$$\left(\overbrace{\max(u_1, u_2)}^M, \overbrace{\min(v_1, v_2)}^m, c_1 \upharpoonright [M, m], x_1 \upharpoonright [M, m] \right)$$

pertanto $\text{inf}(\bullet, \bullet)$ è continua dato che lo è ogni componente.

Possiamo definire U_α come i punti di Q della forma $[u, v, c, x]$ tale che $\text{im}(\pi(c))$ sia una configurazione di punti di \mathbb{R}^{n-1} a distanza reciproca maggiore di α e prendere come $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow Q_0$ la mappa che assegna a $[u, v, c, x]$ il punto $[u, v, c', x \upharpoonright c']$ con $c' \subset c$ formato dal punto più basso di ogni fibra sopra tutti i punti di $\pi(c)$.

Dimostrazione. Sia $p : \tilde{Q} \rightarrow Q$ la disintegrazione associata ad U . Questa è una equivalenza omotopica fra gli spazi classificanti come mostrato nell'ultimo lemma dell'**Appendice A**.

Possiamo ora incollare le f_α definendo una mappa $\tilde{Q} \rightarrow Q_0$ con la proprietà che $f(\zeta) \leq p(\zeta) \forall \zeta \in \tilde{Q}$.

Sia ora $\text{chn}(\tilde{Q})$ lo spazio delle catene finite $(\zeta_0 \leq \dots \leq \zeta_n)$ ordinato per inclusione.

La mappa $r : (\zeta_0 \leq \dots \leq \zeta_n) \mapsto \zeta_0$ induce una equivalenza omotopica fra le realizzazioni per il **Fatto 1.4**.

Osservando ora $F : \text{chn}(\tilde{Q}) \rightarrow Q_0$ che mappa

$$(\zeta_0 \leq \dots \leq \zeta_n) \mapsto \text{inf}(f(\zeta_0) \leq \dots \leq f(\zeta_n))$$

notiamo che rispetta $F(\sigma) \leq r \circ \text{chn}(p(\sigma))$ tuttavia sia $|r|$ che $|\text{chn}(p)|$ sono equivalenze omotopiche. $|F|$ è omotopa a $|r| \circ |\text{chn}(p)|$ dato che la relazione \leq ci fornisce una trasformazione naturale $F \rightarrow r \circ \text{chn}(p)$ e sappiamo che trasformazioni naturali inducono omotopie fra le realizzazioni dei funtori.

Mettendo assieme queste informazioni otteniamo che la composizione

$$|\text{chn}(\tilde{Q})| \xrightarrow{|F|} |Q_0| \xrightarrow{|i|} |Q|$$

è una equivalenza omotopica.

In maniera del tutto analoga la composizione

$$|\text{chn}(\tilde{Q}_0)| \rightarrow |\text{chn}(\tilde{Q}_0)| \rightarrow |Q_0|$$

è una equivalenza omotopica.

Osservando adesso il diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 |chn(\tilde{Q})| & \xrightarrow{F} & |Q_0| & \xrightarrow{\quad} & |Q| \\
 & & & & \\
 & & |Q| & & \\
 & & \approx \uparrow \gamma & & \\
 |chn(\tilde{Q}_0)| & \xrightarrow{chn(i)} & |chn(\tilde{Q})| & \xrightarrow{\quad} & |Q_0| \\
 & \curvearrowleft & \beta & \curvearrowright &
 \end{array}$$

si ottiene che $|Q| \xrightarrow{F \circ \alpha^{-1}} |Q_0| \xrightarrow{|i|} |Q|$ e $|Q_0| \xrightarrow{\gamma \circ |chn(i)| \circ \beta^{-1}} |Q| \xrightarrow{\gamma^{-1}} |chn(\tilde{Q})| \rightarrow |Q_0|$ sono inverse omotopiche sinistre e destre di $|Q_0| \xrightarrow{|i|} |Q|$ (stiamo usando che $\gamma \circ |chn(i)| \circ \beta^{-1} = |i|$).

Abbiamo concluso $|Q_0| \approx |Q|$. □

Dal **Lemma 5.11** segue $BC_n''(X) \approx BC_n'(X)$ e, come già detto, il **Teorema 5.2**.

Capitolo 6

Conclusioni

Tiriamo le somme dei risultati precedenti.

Teorema 6.1.

$$H_*(Br_\infty) \cong H_*(\Omega^2 S^3).$$

Dimostrazione. Per le considerazioni del **Capitolo 2** sappiamo che $H_*(Br_\infty) \cong H_*(K(Br_\infty, 1))$.

Dal **Capitolo 3** sappiamo che $B(Br_n) = C_{2,n}$ e dunque che $B(\sqcup Br_n) = \sqcup B(Br_n) = \sqcup C_{2,n} = C_2$.

Dalla equivalenza omotopica sappiamo che $H_*(C_2) \cong H_*(C'_2)$. Per il teorema di **Group Completion** 4.1 (C_2 è omotopicamente commutativo come mostrato precedentemente, pertanto rispetta le ipotesi) vale

$$H_*(C'_2)[\pi_0^{-1}] \cong H_*(\Omega BC'_2).$$

Dal **Teorema 5.2** otteniamo

$$BC'_2 \approx \Omega S^2$$

e dunque $H_*(C_2)[\pi_0^{-1}] \cong H_*(\Omega^2 S^2)$.

Facciamo adesso la seguente considerazione: $\Omega^2 S^2 \approx \mathbb{Z} \times \Omega^2 S^3$.

Infatti $\pi_0(\Omega^2 S^2) \cong \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ per l'aggiunzione tra sospensione e cammini e tutte le componenti connesse sono omotopicamente equivalenti (basta precomporre con mappe $S^2 \rightarrow S^2$ di grado ± 1 per spostarsi sulle componenti connesse tramite una equivalenza omotopica).

Dimostriamo che la componente connessa delle mappe di grado zero $\Omega_0^2 S^2$ è omotopicamente equivalente a $\Omega^2 S^3$.

Consideriamo la fibrazione di Hopf

$$S^1 \rightarrow S^3 \xrightarrow{p} S^2$$

questa fornisce una mappa

$$\begin{aligned} \Phi: \Omega^2 S^3 &\rightarrow \Omega_0^2 S^2 \\ (f: S^2 \rightarrow S^3) &\mapsto (p \circ f: S^2 \rightarrow S^2) \end{aligned}$$

che induce isomorfismi in omotopia per via della successione esatta lunga di fibrazione

$$0 \approx \pi_{i+2}(S^1) \longrightarrow \pi_i(\Omega^2 S^3) \longrightarrow \pi_i(\Omega_0^2 S^2) \longrightarrow \pi_{i+1}(S^1) \approx 0$$

dove è stata usata nuovamente l'aggiunzione sospensione-cammini.

Dato che sia S^n che gli spazi di cammini iterati su S^n hanno il tipo di omotopia di un CW complesso (questo fatto è verificato in [Mil59]) è possibile applicare il teorema di Whitehead e concludere la equivalenza omotopica asserita.

Pertanto abbiamo stabilito che $H_*(C_2)[\pi_0^{-1}] \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} H_*(\Omega^2 S^3)$. Lavoriamo sul membro di sinistra.

$$C_2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B(Br_n) \Rightarrow \left(\bigoplus_{\mathbb{N}} H_*(B(Br_n)) \right) [\pi_0^{-1}] \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} H_*(\Omega^2 S^3)$$

tuttavia localizzare per gli elementi del π_0 ha l'effetto di rendere ogni componente connessa uguale al telescopio $Br_i \rightarrow Br_j$ dunque

$$\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} H_*(B(Br_n)) \right) [\pi_0^{-1}] \cong \bigoplus_{\mathbb{N}} H_*(B(Br_\infty))$$

ma allora $\bigoplus_{\mathbb{N}} H_*(B(Br_\infty)) \cong \bigoplus_{\mathbb{Z}} H_*(\Omega^2 S^3) \Rightarrow H_*(B(Br_\infty)) \cong H_*(\Omega^2 S^3)$ dato che il morfismo di anelli è indotto da una mappa topologica che manda componenti connesse in componenti connesse.

Dato che $H_*(B(Br_\infty)) = H_*(K(Br_\infty, 1))$ abbiamo concluso l'isomorfismo voluto. \square

Appendice **A**

Disintegrazione su un ricoprimento

Definiremo adesso un tipo particolare di spazio associato ad un ricoprimento. Seguiremo le definizioni di [Seg68].

Definizione A.1. Dato $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ ricoprimento di uno spazio X , definiamo una categoria R_U tale che:

- $ob(R_U) = \{U_\sigma := \bigcap_{\alpha \in \sigma} U_\alpha, \sigma \in Fin(\Sigma), U_\sigma \neq \emptyset\}$, pensiamo agli oggetti come le intersezioni finite abitate di elementi del ricoprimento;
- $mor(R_U) = \{U_\tau \hookrightarrow U_\sigma, \sigma \subset \tau\}$, pensiamo ai morfismi come alle inclusioni provenienti dall'estensione del sottoinsieme di indici.

Definizione A.2. Dato $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ ricoprimento di uno spazio X , definiamo una categoria X_U nel seguente modo:

- $ob(X_U) = \bigsqcup_{\sigma \in Fin(\Sigma)} U_\sigma$, pensiamo agli oggetti come coppie (x, U_σ) con $x \in U_\sigma \subset X$;
- $mor(X_U) = \bigsqcup_{\sigma \subset \tau} U_\tau$, dichiariamo un morfismo $(x, U_\tau) \rightarrow (y, U_\sigma)$ ogni qual volta U_τ si include in U_σ (in maniera naturale da $\tau \supset \sigma$) e se $x = y$. In questo modo ogni morfismo è univocamente determinato dalla coppia di elementi delle parti finite che si include e da un punto qualsiasi dell' U_\bullet più piccolo.

Questi oggetti sono molto naturali: R_U è la suddivisione baricentrica dell'insieme (semi-)simpliciale formato dal nervo della categoria associata al ricoprimento¹.

Osserviamo invece il nervo di X_U .

Le k -uple di morfismi componibili sono della forma

$$(x, U_{\sigma_0}) \rightarrow (x, U_{\sigma_1}) \rightarrow \cdots \rightarrow (x, U_{\sigma_k})$$

provenienti da $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \cdots \supset \sigma_k$.

In questa maniera, possiamo identificare il nervo NX_U come sottoinsieme simpliciale di X -copie di NR_U .

In particolare il funtore $X_U \rightarrow R_U$ che dimentica la prima coordinata indurrà una mappa fra $BX_U \rightarrow BR_U$ con la proprietà che la preimmagine di un punto nella parte interna di un simpleso $[U_{\sigma_0} \subset \cdots \subset U_{\sigma_k}] \subset BR_U$ sia U_{σ_0} .

Questo ci da un modo per identificare BX_U come un sottospazio di $BR_U \times X$ (ma la topologia può differire).

Nel **Capitolo 4** lo spazio $E_{\mathfrak{B}}$ è stato costruito esattamente in questo modo: se poniamo $X = E$ e ricopriamo² E con la preimmagine degli aperti di base in \mathfrak{B} allora $E_{\mathfrak{B}} = BX_{p^{-1}(\mathfrak{B})}$.

Dimostriamo la seguente proprietà:

Teorema A.1. *Dato $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ un ricoprimento numerabile³ di X , la mappa di proiezione $BX_U \rightarrow X$ data da*

$$BX_U \ni \left(\begin{array}{c} \in \Delta^k \\ p \\ \end{array}, [(x, U_{\sigma_0}) \rightarrow \cdots \rightarrow (x, U_{\sigma_k})] \right) \mapsto x \in X$$

è una equivalenza omotopica.

Dimostrazione. Cominciamo prendendo una partizione dell'unità (localmente finita) $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ subordinata ad U .

Costruiamo in questo modo una mappa $X \rightarrow BX_U$. Cominciamo *enumerando* gli elementi di Σ .

Adesso dato $x \in X$ osserviamo $\{\alpha : \varphi_\alpha(x) \neq 0\}$.

Questo è un insieme finito, poniamo di cardinalità $k + 1$ e con elementi

$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k$.

Possiamo allora mappare

$$X \ni x \mapsto (p, [(x, U_{\alpha_0, \dots, \alpha_k}) \rightarrow (x, U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}}) \rightarrow \cdots \rightarrow (x, U_{\alpha_0})])$$

¹Intendiamo la categoria con oggetti gli elementi del ricoprimento e morfismi le inclusioni.

²Qui stiamo usando surgettività, perlomeno per una buona definizione. Effettivamente questa ipotesi è ovunque garantita nel **Capitolo 4**.

³Ricordiamo che si intende che esiste una partizione dell'unità subordinata ad U .

dove

$$\Delta^k \ni p = (\varphi_{\alpha_0}(x), \varphi_{\alpha_1}(x), \dots, \varphi_{\alpha_k}(x)).$$

Questa mappa è chiaramente continua visto che in un intorno sufficientemente piccolo di x non cambiano gli indici delle φ_\bullet che non si annullano su x ed in questo intorno le coordinate sul k -simpleso variano con continuità (nuovamente semplicemente per come sono fatte le φ_\bullet).

Dato un punto $x \in X$ esiste un unico "simpleso massimale" indicizzato da x in BX_U : basta considerare il sottoinsieme (finito, che supponiamo di cardinalità n) di Σ composto dagli α_i (ordinati dall'enumerazione) tali che $x \in U_{\alpha_i}$. Allora ogni simpleso che viene mappato sopra x dalla mappa di proiezione è una faccia (di dimensione qualsiasi) di

$$[(x, U_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}) \rightarrow (x, U_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}}) \rightarrow \dots \rightarrow (x, U_{\alpha_0})]$$

e pertanto possiamo effettuare una omotopia lineare che atterra sul k -sottosimpleso indicizzato dagli indici che non annullano le φ_\bullet sopra x .

Eseguendo questo collassamento per tutti gli x abbiamo l'omotopia cercata fra $BX_U \rightarrow X \rightarrow BX_U$ e $X \rightarrow BX_U \rightarrow X$ (questa ultima è l'identità)⁴. \square

Dimostriamo un fatto simile, utile nel **Lemma 5.12**.

Lemma A.1. *Se \mathcal{C} è una categoria topologica e U un suo ricoprimento numerabile, allora la mappa dalla sua disintegrazione $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ induce una equivalenza omotopica (tramite una contrazione delle fibre che le preserva) fra le realizzazioni geometriche.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\{C_k\}$ e $\{\tilde{C}_k\}$ gli insiemi simpliciali associati a $|\mathcal{C}|$ e $|\tilde{\mathcal{C}}|$. Notiamo che possiamo esprimere gli scheletri di $|\tilde{\mathcal{C}}|$ come prodotti fibrati

$$\tilde{C}_k = (\tilde{C}_0)^{k+1} \times_{(C_0)^{k+1}} C_k.$$

La realizzazione geometrica commuta con i prodotti fibrati e al contempo la realizzazione di spazi con k -scheletro Y^{k+1} è contraibile (ad esempio perché ammette un oggetto iniziale). Dobbiamo allora dimostrare solo che $\{(\tilde{C}_0)^{k+1}\}_k \rightarrow \{(C_0)^{k+1}\}_k$ è una equivalenza omotopica. Per comodità chiamiamo il primo spazio $E\tilde{C}_0$ e il secondo EC_0 .

Un ricoprimento degli oggetti C_0 induce un ricoprimento aperto di EC_0 fatto dagli aperti $\Delta^k \times (U_{\alpha_0} \times U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_k})$ al variare di tutte le scelte di $k+1$ aperti (questo è un ricoprimento di $(C_0)^{k+1}$). Sopra ognuno di questi aperti la mappa è una equivalenza omotopica: le fibre sono le realizzazioni della sovra-categoria

⁴Ho ommesso la verifica che questa mappa sia ben definita sul quoziente dell'unione disgiunta dei simplessi di BX_U : questa segue dalla "massimalità" del simpleso.

con oggetti $(p, x_0, U_0, x_1, U_1, \dots, x_k, U_k) \rightarrow (p, x_0, x_1, \dots, x_k)$ e morfismi i triangoli commutativi. Questa categoria è contraibile: ha un oggetto iniziale dato dal morfismo $(p, x_0, U_0^*, x_1, U_1^*, \dots, x_k, U_k^*) \rightarrow (p, x_0, x_1, \dots, x_k)$ con U_h^* intersezione di tutti i (finiti) aperti sopra x_h .

Abbiamo concluso l'equivalenza omotopica. Per avere anche la shrinkabilità ci si può appoggiare ad un lemma tecnico di [Dol63] dove si mostra che la shrinkabilità è implicata dalla shrinkabilità locale su un ricoprimento numerabile. \square

Appendice **B**

Quasi-fibrazione $EM \rightarrow BM$

Seguendo [Hat11] daremo una dimostrazione del seguente fatto.

Lemma B.1. *Dato X spazio topologico ed M monoide topologico che agisce (a sinistra) su X tramite equivalenze omotopiche, definiamo EX come la realizzazione geometrica della categoria con oggetti i punti di X e come morfismi $M \times X$, ossia un morfismo $x \rightarrow y$ per ogni $m \in M$ tale che $y = mx$. La mappa dimenticante (che dimentica il punto di partenza di una k -upla di morfismi della categoria appena definita)*

$$EX \rightarrow BM$$

è una quasi-fibrazione con fibra X .

Dimostrazione. Per dimostrare la tesi useremo una caratterizzazione alternativa di *quasi-fibrazione*, la cui dimostrazione è presente in [Hat01] come **Lemma 4K.3**.

Ognuno dei seguenti punti implica che una mappa $p : E \rightarrow B$ sia una quasi-fibrazione:

- B è unione di due aperti sopra i quali p è una quasi-fibrazione, inoltre p è una quasi-fibrazione anche sopra la loro intersezione;
- B è limite diretto di sottospazi B_n sopra i quali p è quasi-fibrazione;
- esiste una deformazione $F_t : E \rightarrow E$ che termina in un sottospazio E' che giace sopra B' deformazione di B , tale che $p : E' \rightarrow B'$ sia una quasi-fibrazione e la mappa $F_1^{-1} : p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(F_1(b))$ sia una equivalenza omotopica debole per ogni $b \in B$.

Denotato con $(BM)_k$ il k -scheletro di BM e con $(EX)_k$ la sua preimmagine rispetto a p , per il secondo punto è sufficiente dimostrare che

$$(EX)_k \rightarrow (BM)_k$$

è una quasi-fibrazione per ogni k .

Procederemo per induzione.

Il passo base è chiaro: $(EX)_0 \rightarrow (BM)_0 = *$ che quindi è proprio una fibrazione localmente banale. Per il passo induttivo faremo uso del primo punto: scomponiamo ogni simpleso Δ^k come unione di $U = \Delta^k \setminus \partial\Delta^k$ e V un ϵ -intorno di $\partial\Delta^k$.

La preimmagine di U e $U \cap V$ rispetto a $p \upharpoonright (EX)_k$ sono rispettivamente il prodotto $X \times U$ e $X \times U \cap V$ (stiamo usando che U e V sono nella parte interna dei simplessi di dimensione maggiore pertanto non sono soggetti a relazioni di incollamento), pertanto per il primo punto della caratterizzazione ci rimane da verificare che $p \upharpoonright (EX)_k : (EX)_k \rightarrow (BM)_k$ è una quasi-fibrazione anche sopra V .

Consideriamo una deformazione lineare F_t di V che schiaccia gli ϵ -intorni di $\partial\Delta^k$ su $\partial\Delta^k$. Per il terzo punto della caratterizzazione dovremmo controllare che p si restringa su $F_1(V)$ ad una quasi fibrazione e che induca una equivalenza omotopica $p^{-1}(b) \rightarrow p^{-1}(F_1(b))$ per ogni b .

La prima condizione segue dalla ipotesi induttiva (p è una quasi fibrazione ristretta ai $k - 1$ scheletri) mentre per la seconda è sufficiente notare che F_1 sta agendo sulle fibre come M agisce su X : per ipotesi la mappa¹ $m \cdot : X \rightarrow X$ è una equivalenza omotopica pertanto abbiamo verificato le condizioni del terzo punto della caratterizzazione e concluso che p è una quasi-fibrazione sopra V . Abbiamo concluso il passo induttivo e concluso che $EX \rightarrow BM$ è una quasi-fibrazione. \square

Teorema B.1. *Se M è un monoide topologico group-like, ossia se $\pi_0(M)$ è un gruppo (condizione garantita quando M è connesso per archi), allora la mappa naturale*

$$M \rightarrow \Omega BM$$

è una equivalenza omotopica debole.

Dimostrazione. Per ogni $m \in M$, la mappa $M \ni x \mapsto mx \in M$ è una equivalenza omotopica: basta prendere m' nella componente connessa per archi inversa di m e osservare che $\cdot mm'$ è omotopa all'identità tramite moltiplicazione sinistra per elementi $\varphi(t)$, dove $\varphi(t)$ è un qualsiasi arco che connette mm' all'identità (stessa cosa per $\cdot m'm$).

Abbiamo allora che $M \rightarrow EM \rightarrow BM$ è una quasi-fibrazione per il **Lemma**

¹In questo caso m dipende a priori dal punto b .

B.1 con base contraibile. Per lo stesso discorso di diagrammi del **Lemma 5.3** abbiamo la tesi. \square

Bibliografia

- [Art47] Emil Artin. “Theory of braids”. In: *Annals of Mathematics* 48 (1947), pp. 101–126.
- [Cal22] Maxine Elena Calle. *Notes on classifying spaces of topological categories*. Unpublished notes. 2022.
- [Dol63] A. Dold. “Partitions of Unity in the theory of Fibrations”. In: *Annals of Mathematics* 78 (1963).
- [FN62a] E. Fadell e L. Neuwirth. “Configuration Spaces”. In: *Math. Scand.* 10 (1962), pp. 111–118.
- [FN62b] R. Fox e L. Neuwirth. “The Braid Groups”. In: *Math. Scand.* 10 (1962), pp. 119–126.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001.
- [Hat11] Allen Hatcher. “A Short Exposition of the Madsen-Weiss Theorem”. In: (2011).
- [Mil57] John Milnor. “The geometric realization of a semi-simplicial complex”. In: *Annals of Mathematics* 65 (1957), pp. 357–362.
- [Mil59] John W. Milnor. “On spaces having the homotopy type of a CW-complex”. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 90 (1959), pp. 272–280.
- [MS76] D. McDuff e G. Segal. “Homology fibrations and the Group Completion Theorem”. In: *Inventiones Math.* 31 (1976), pp. 279–284.
- [Seg68] Graeme Segal. “Classifying spaces and spectral sequences”. In: *Publications Mathématiques de l’IHES* 34 (1968), pp. 105–112.
- [Seg73] Graeme Segal. “Configuration-Spaces and Iterated Loop-Spaces”. In: *Inventiones Math.* 21 (1973), pp. 213–221.
- [Spa59] Edward H. Spanier. *Algebraic Topology*. 1959.

- [Wei13] Charles Weibel. *The K-Book: an introduction to algebraic K-theory*. 2013.
- [Wei94] Charles Weibel. *An introduction to Homological Algebra*. Vol. 38. Cambridge studies in advanced mathematics. 1994, pp. 160–161.

Ringraziamenti

Questo percorso si è rivelato molto più difficile del previsto e non sarei mai stato in grado di portarlo a termine senza l'aiuto e il supporto di tutti.

Ringrazio il prof. Filippo Callegaro per la sua disponibilità e le ore che ha dedicato a risolvere pazientemente i miei dubbi, anche più di una volta, oltre che per avermi fatto appassionare agli argomenti della tesi. Mi dispiace di non essere stato attento ad alcune piccole scadenze.

Ringrazio i TrapBois, senza di voi questo percorso non sarebbe mai cominciato. Ringrazio Pierpaolo, Andrea e Antonio per aver accettato la mia difficoltà nel comunicare a distanza: penso che vivere lontani abbia solo aumentato il valore del rapporto che abbiamo.

Ringrazio tutte le persone del Dipartimento, in particolar modo l'Aula 4, l'Aula Stud e in ultimo l'Aula 2 (che si è subito il mio stress pre-discussione): ho trovato tra voi persone a cui porre domande, persone che rispondono, persone che ridono, persone che piangono, persone che mi apprezzano, persone che mi disprezzano. Mi avete insegnato tutti quanti e continuerete a farlo. Mi dispiace di avervi parlato poco.

Ringrazio tutta la mia famiglia. Un grazie speciale va a mio padre e a mia madre che mi trattano da principe e la cui maturità ammiro.

Tutto ciò che ho è merito vostro e per questo ve ne sono infinitamente grato.

L'ultimo anno è stato difficile e se sono riuscito a superare tutti gli ostacoli è stato principalmente grazie a voi.

Siete le persone migliori che io conosca ed il mio esempio, vi amo.

Voglio dedicare questo lavoro a Zio Roberto: mi stai insegnando tanto anche adesso, grazie. Il motivo delle cose che succedono non deve essermi chiaro, ma la sicurezza che tu invece lo sai mi rasserena.