
Successioni Spettrali in Topologia Algebrica

Versione \LaTeX della parte finale del corso di Topologia
Algebrica A.

Ale Fenu

Università di Pisa

2024 - BASATO SUL CORSO DEL 2022-2023

Contents

1	Successioni spettrali	2
1.1	Esempi di applicazioni delle successioni spettrali	6
1.2	Isomorfismo Čech-de Rham	7
1.3	Coppie e successioni spettrali	9
2	Successione di Serre	10
2.1	Confronto di successioni spettrali	13
2.2	Prima dimostrazione del Teorema della successione spettrale di Serre	14
2.3	Seconda dimostrazione del Teorema della successione spettrale di Serre	14
2.4	Successione spettrale di Serre in coomologia	17
2.5	Proprietà moltiplicative della successione spettrale di Serre in coomologia	17
3	Applicazioni della successione spettrale di Serre	19
3.1	Trasgressione	22
3.2	Classi di Serre	23
3.3	Il teorema di Serre	30

Chapter 1

Successioni spettrali

Sia R un anello.

Definiamo classicamente (C_*, d) complesso graduato di catene su R e (C^*, d) complesso graduato di cocatene su R . Definiamo $H_*(C_*) = \ker d_i / \text{Im } d_{i+1}$ e $H^*(C^*) = \ker d^i / \text{Im } d^{i-1}$. Useremo questa notazione da qui in poi.

Definizione 1.0.1. Una *filtrazione* su un R - modulo A è una famiglia di sottomoduli definita in uno dei seguenti modi:

- $\dots \subset F^{p+1}A \subset F^pA \subset \dots$ detta famiglia decrescente;
- $\dots \subset F_{p-1}A \subset F_pA \subset \dots$ detta famiglia crescente.

Definizione 1.0.2. Un complesso (C_*, d) è detto *complesso filtrato* se è un R -modulo filtrato, $F_i C_* = \bigoplus_j F_i C_j$ e $d(F_i C_*) \subset F_i C_*$.

Esempio 1.0.1. $A = \mathbb{Z}$, posso definire $F^i A = 2^i \mathbb{Z}$ per ogni $i \geq 0$ e \mathbb{Z} per $i < 0$.

Definizione 1.0.3. Dato (A, F) un R -modulo filtrato, definiamo il suo *modulo graduato associato* come

$$\begin{aligned} E_0^p(A) &= F^p A / F^{p+1} A && \text{se } F \text{ è decrescente;} \\ E_p^0(A) &= F_p A / F_{p-1} A && \text{se } F \text{ è crescente.} \end{aligned}$$

Osserviamo che in generale, anche se F è una filtrazione limitata, ossia definitivamente 0 e A nella direzione giusta, il modulo $E_p^0(A)$ non determina A (*problema di estensione*).

Esempio 1.0.2. Dato X CW-complesso e $X^{(p)}$ il suo scheletro, possiamo dotare il complesso delle sue catene singolari (o cellulari) $C_*(X)$ di una struttura di modulo filtrato definendo

$$F_p C_* = C_*(X^{(p)}) \quad [\text{filtrazione crescente}]$$

e per $C^* = \text{Hom}(C_*(X), R)$ si guarda

$$F^p C^* = \{\phi \in C^* \mid F_{p-1} C_* \subset \ker \phi\} = \text{Ann}(F_{p-1} C_* \subset C_*) \quad [\text{filtrazione decrescente}]$$

Per i due casi si ricava

$$E_p^0(C_*) = F_p C_* / F_{p-1} C_* = C_*(X^{(p)}, X^{(p-1)})$$

e

$$E_p^p(C_*) = \text{Ann}(F_{p-1} C_*) / \text{Ann}(F_p C_*) = C_*(X^{(p)}, X^{(p-1)}).$$

Esempio 1.0.3. Sia $f : D_* \rightarrow C_*$ una mappa di complessi di catene e sia F_p una filtrazione crescente su C_* . Allora è possibile definire una filtrazione crescente G_p su D_* come $G_p D_* := f^{-1}(F_p C_*)$.

Osserviamo che se (C_*, d) è un complesso di catene con F filtrazione crescente, allora anche $H_*(C_*)$ è un modulo filtrato:

$$F_p H_*(C_*) := \text{Im}(H_*(F_p C_*) \rightarrow H_*(C_*)) \quad [\text{filtrazione crescente}]$$

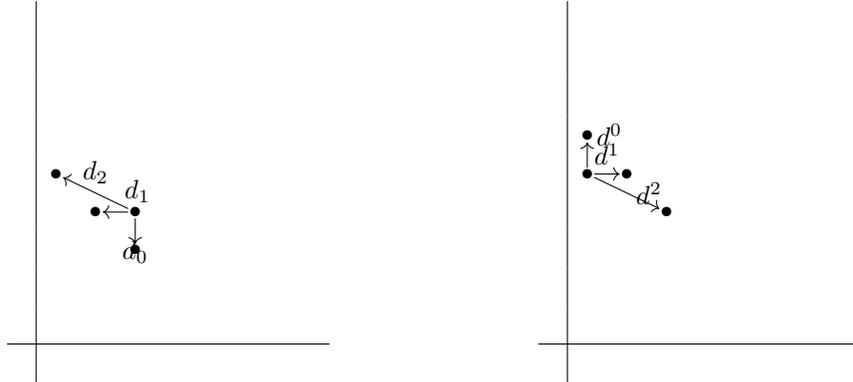
mentre se (C^*, d) è di cocatene filtrato allora anche $H^*(C^*)$ lo è da

$$F^p H^*(C^*) := \ker\{H^*(C^*) \rightarrow H^*(F^{p-1} C^*)\}$$

e questa filtrazione è decrescente.

Definizione 1.0.4. un R -modulo si dice *bigradato* se è somma di moduli con gradi definiti da una coppia di interi (s, t) . Un tale modulo è detto *differenziabile* se ha mappe $d : E \rightarrow E$ tali che $d^2 = 0$ di bigrado $(-r, r-1)$ oppure $(r, 1-r)$ con indici coomologici.

Mostriamo a sinistra esempi di mappe d_0, d_1, d_2 e a destra d^0, d^1, d^2 .



Se definiamo

$$K^i := \left(\bigoplus_{s+t=i} E^{s,t}, d \right)$$

otteniamo un complesso di cocatene (e simile per le catene).

Poniamo

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) := \ker\{d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r-1}\} / \text{Im}\{d : E_{p+r,q-r+1} \rightarrow E_{p,q}\}$$

e similmente per la coomologia.

Definizione 1.0.5. Una *successione spettrale* è una collezione di R -moduli differenziali bigraduati $\{E_{p,q}^r, d^r\}_r$ con $r \geq k$ con d^r di bigrado $(r, 1 - r)$ tale che

$$E_{p,q}^{r+1} = H_{p,q}(E^r, d^r).$$

Una importante osservazione è che (E_r, d_r) determina E_{r+1} ma non d_{r+1} (omettiamo il bigrado).

Definizione 1.0.6 (Limite di una successione spettrale). Posto $E_{i+1} = Z_i/B_i$ e $d_{i+1} : Z_i/B_i \rightarrow Z_i/B_i$ possiamo identificare Z_{i+1} come un quoziente di un sottomodulo di Z_i e analogamente per B_i (con ordine contrario).

Possiamo porre $B_\infty := \bigcup B_i, Z_\infty = \bigcap Z_i$ e definire come *limite della successione spettrale*

$$E_\infty = Z_\infty/B_\infty.$$

Definizione 1.0.7 (Convergenza di una successione spettrale). Una successione spettrale $(E_r^{p,q}, d_r)$ si dice che *converge* a H^* se esiste una filtrazione F decrescente su H^* tale che $E_\infty^{p,q} \cong E_0^p(H^{p+q})$.

Sotto opportune ipotesi (ad esempio $E_2^{p,q} \neq 0$ solo per $p, q \geq 0$) i differenziali d_r sono definitivamente nulli per p, q fissati e quindi una successione spettrale converge in senso più forte: diremo che *stabilizza*.

Definizione 1.0.8. Diciamo che (E_r, d_r) **collassa** alla pagina E_N se $d_r \equiv 0 \forall r \geq N$.

Sia F una filtrazione crescente su un R -modulo graduato A .

Definizione 1.0.9. Diremo che F è una *filtrazione convergente* se

$$\bigcup_j F_j A = A, \bigcap_s F_s A = 0.$$

Definizione 1.0.10. Diremo che F è una filtrazione

- limitata dal basso se $\forall t \exists s(t)$ tale che $F_{s(t)} A_t = 0$;
- limitata dall'alto se $\forall t \exists s'(t)$ tale che $F_{s'(t)} A_t = A_t$.

Teorema 1.0.4. Un complesso di catene filtrato graduato (A, d, F) determina una successione spettrale $\{E_{s,t}^r, d^r\}_{r \geq 1}$ tale che $E_{s,t}^1 = H_{s+t}(F_s A / F_{s-1} A)$ e dove d^1 è l'operatore di bordo (omomorfismo di connessione) della tripla $(F_s A, F_{s-1} A, F_{s-2} A)$.

Se F è convergente e limitata dal basso e dall'alto allora la successione spettrale stabilizza. Il limite $E_{p,q}^\infty$ è isomorfo a $F_p H_{p+q}(A) / F_{p-1} H_{p+q}(A)$.

Vale un enunciato analogo per complessi di cocatene, determinando una successione spettrale di coomologia.

Proof. Omettiamo il grado omologico.

Poniamo

$$Z_s^r = \{c \in F_s A \mid dc \in F_{s-r} A\}$$

$$Z_s^\infty = \{c \in F_s A \mid dc = 0\}$$

$$E_s^r = Z_s^r / (Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1})$$

$$E_s^\infty = Z_s^\infty / (Z_{s-1}^\infty + dA \cap F_s A)$$

e osserviamo che $d : Z_s^r \rightarrow Z_{s-r}^r$ di bigrado $(-r, r-1)$ induce d^r .

In particolare

$$E_s^0 = F_s A / F_{s-1} A$$

$d^0 : F_s A / F_{s-1} A \rightarrow F_s A / F_{s-1} A$ è indotta da d al quoziente

$$E_s^1 = Z_s^1 / (Z_{s-1}^0 + dZ_s^0)$$

inoltre Z_s^1 / Z_s^0 sono cicli di $F_s A / F_{s-1} A$ mentre $(Z_{s-1}^0 + dZ_s^0) / Z_{s-1}^0$ sono bordi di $F_s A / F_{s-1} A$.

Mettendo tutto assieme

$$E_{s,t}^1 \cong H_{s+t}(F_s A / F_{s-1} A)$$

e l'isomorfismo è indotto da $Z_{s,t}^1 \rightarrow F_s A$. Il differenziale è invece indotto dalla mappa di bordo.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & \uparrow \\
 & & & & F_s A_{s+t} / F_{s-1} A_{s+t} \\
 & & & \longleftarrow & \\
 & & F_s A_{s+t} / F_{s-2} A_{s+t} & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow d & & \\
 & & F_s A_{s+t-1} / F_{s-2} A_{s+t-1} & \longrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & Z_{s-1,t}^1 & \xrightarrow{d} & Z_{s,t}^1 \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
 0 & \downarrow & & & \\
 F_{s-1} A_{s+t-1} / F_{s-2} A_{s+t-1} & \longrightarrow & & &
 \end{array}$$

Dimostriamo ora che $H_*(E^r) = E^{r+1}$.

$$\begin{aligned}
 \ker(d^r : E_s^r \rightarrow E_{s-r}^r) &= \\
 &= \{c \in Z_s^r \mid dc \in Z_{s-r-1}^{r-1} + dZ_{s-1}^{r-1}\} / (Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}) = \\
 &= (Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}) / (\text{stesso denominatore}).
 \end{aligned}$$

Inoltre

$$\text{Im}(d^r : E_{s+r}^r \rightarrow E_s^r) = (dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}) / (Z_{s-1}^{r-1} + dZ_{s+r-1}^{r-1}).$$

Ricaviamo

$$\ker d^r / \text{Im } d^r = (Z_s^{r+1} + Z_{s-1}^{r-1}) / (dZ_{s+r}^r + Z_{s-1}^{r-1}) = E_s^{r+1}$$

che è ciò che volevamo.

Rimane indagare il limite della successione spettrale.

$$E_s^r = Z_s^r / (dZ_{s+r-1}^{r-1} + Z_{s-1}^{r-1}) \cong (Z_s^r + F_{s-1} A) / (F_{s-1} A + dZ_{s+r-1}^{r-1}).$$

Calcolando il limite

$$E_s^\infty = \bigcap_r (Z_s^r + F_{s-1}A) / \bigcup_r (F_{s-1}A + dZ_{s+r-1}^{r-1}) = Z_s^\infty / (Z_{s-1}^\infty + dA \cap F_sA).$$

Dato che la filtrazione è limitata, si ha che $\forall s, t \exists r : E_{s,t}^\infty = E_{s,t}^{r(s,t)}$.

$F_s H_{s+t}(A) = \text{Im}[H_{s+t}(F_s A) \rightarrow H_{s+t}(A)]$ e quindi $F_s H_*(A) = Z_s^\infty / (dA \cap F_s A)$ ed inoltre

$$F_s H_*(A) / F_{s-1} H_*(A) = E_s^\infty.$$

□

1.1 Esempi di applicazioni delle successioni spettrali

Proposizione 1.1.1. *Sia X un CW complesso, allora $H_*^{\text{cell}}(X) = H_*(X)$, ossia omologia cellulare e singolare coincidono.*

Proof. Sia $C_*(X)$ il complesso delle catene singolari su X . Consideriamo la filtrazione $F_p C_*(X) = C_*(X^{(p)})$.

Guardiamo $E_{p,q}^0 = C_{p+q}(X^{(p)}) / C_{p+q}(X^{(p-1)})$ e quindi $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X^{(p)}, X^{(p-1)})$ che è uguale a $C_p^{\text{cell}}(X)$ se $q = 0$ e nulla altrimenti.

Per definizione di catene cellulari abbiamo che la mappa di bordo $\partial : C_p^{\text{cell}}(X) \rightarrow C_{p-1}^{\text{cell}}(X)$ è la mappa di bordo della tripla $(X^{(p)}, X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ proveniente dal lemma del serpente $\partial : H_p(X^{(p)}, X^{(p-1)}) \rightarrow H_{p-1}(X^{(p-1)}, X^{(p-2)})$ e coincide con il differenziale d^1 di $E_{p,q}^1$.

Segue che $E_{p,q}^2 = H_p^{\text{cell}}(X)$ per $q = 0$ e nulla altrimenti.

Vale che $E^2 = E^\infty$ che è uguale a $H_*(X)$ per il teorema precedente. □

Proposizione 1.1.2. *Siano $(C_*, d), (C'_*, d')$ complessi di catene sul campo \mathbb{K} . Vale*

$$H_d(C \otimes C') = [H_*(C_*) \otimes H_*(C')]_d.$$

Proof. Consideriamo il complesso $D_* = C_* \otimes C'_*$ con $D_p = \bigoplus_{i+j=p} C_i \otimes C'_j$ e su di esso la filtrazione

$$F_p(C \otimes C')_q = \bigoplus_{i \leq p} C_i \otimes C'_{q-i}.$$

Allora valgono

$$E_{p,q}^0 = C_p \otimes C'_q$$

$$d^0 = (-1)^p Id_C \otimes d'$$

$$E_{p,q}^1 = C_p \otimes H_q(C')$$

$$d^1 = d \otimes Id$$

$$E_{p,q}^2 = H_p(C) \otimes H_q(C')$$

$$d^2 = 0 = d^n \text{ per } n > 2.$$

La successione spettrale allora stabilizza ad E^2 e $H_d(C \otimes C') = \bigoplus_{p+q=d} H_p(C) \otimes H_q(C')$ per

il teorema.

Questa è la tesi. □

1.2 Isomorfismo Čech-de Rham

Sia X uno spazio topologico e \mathcal{U} un suo ricoprimento.

Definizione 1.2.1. Per $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_k} \in \mathcal{U}$ indichiamo con U_{i_0, i_1, \dots, i_k} la loro intersezione e definiamo il *complesso di Čech* per (X, \mathcal{U}) :

- $\check{C}_{\mathcal{U}}^k(X) = \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_k} \overbrace{C(U_{i_0, \dots, i_k}, \mathbb{R})}^{\text{funzioni localmente costanti}} ;$
- $\partial^k : \check{C}_{\mathcal{U}}^k(X) \rightarrow \check{C}_{\mathcal{U}}^{k+1}$ definita da

$$(\partial^k \alpha)_{i_0, \dots, i_{k+1}} = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \alpha_{i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_{k+1}}$$

Chiaramente $\partial^2 = 0$ e di conseguenza definiamo

Definizione 1.2.2. $\check{H}^*(X, \mathcal{U}) := H^*(\check{C}_{\mathcal{U}}^*, \partial)$ è la *coomologia di Čech*.

Adesso introduciamo il complesso di deRham.

Definizione 1.2.3. Per M che è una n -varietà C^∞ indichiamo con $\Omega^k(M)$ lo spazio delle k -forme differenziali C^∞ su M . Localmente $f \in \Omega^k(M)$ si scrive come

$$f = \sum_{|I|=k} f_I(x) dx^I$$

con $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. La mappa di bordo agisce localmente come

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} f(x) dx^j \wedge dx^I$$

e verifica $d^2 \cong 0$. Chiamiamo allora $(\Omega^*(M), d)$ il *complesso di deRham* associato ad M e $H_{dR}^*(M) := H^*(\Omega^*(M), d)$ *coomologia di deRham* di M .

Proposizione 1.2.1 (Lemma di Poincaré). *Se $A \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto contraibile allora $H_{dR}^0(A) = \mathbb{R}$ e $H_{dR}^i(A) = 0$ per $i > 0$, ossia ogni forma chiusa è esatta.*

Definizione 1.2.4. Un ricoprimento \mathcal{U} è detto *buon ricoprimento* se tutte le intersezioni finite di aperti di \mathcal{U} sono contraibili.

Proposizione 1.2.2. *Sia \mathcal{U} un buon ricoprimento di M (n -varietà C^∞ paracompatta). Allora*

$$\check{H}^*(M, \mathcal{U}) \cong H_{dR}^*(M).$$

Proof. Consideriamo il complesso doppio di Cech-deRham

$$C^{p,q} := \prod_{i_0 \leq \dots \leq i_p} \Omega^q(U_{i_0, \dots, i_p}) \quad D = \partial + (-1)^p d$$

e consideriamo due diverse filtrazioni di (C^*, d) con $C^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}$:

- $F^p C^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{i, n-i}$. Osserviamo la successione spettrale $E_0^{p,q} = C^{p,q}$ e $d_0 = (-1)^p d$.

Si ricava $E_1^{p,q} = \prod H^q(U_{i_0, \dots, i_p})$ che è banale per $q > 0$ dato che il ricoprimento è fatto di aperti con intersezioni finite contraibili. In particolare sopravvivono solo i termini $H^0(U_{i_0, \dots, i_p}) = C(U_{i_0, \dots, i_p}, \mathbb{R})$.

La successione stabilizza ad $E_2 = E_\infty$ da cui salta fuori $H^*(C^*, d) \cong \check{H}^*(M, \mathcal{U})$.

- se invece filtriamo con

$$F^p C^n = \bigoplus_{i \geq p} C^{n-i, i}$$

e definiamo $E_0^{p,q} = C^{p,q}$, $d_0 = \partial$ (il differenziale di Cech di $\prod \Omega^q(U_{i_0, \dots, i_p})$) possiamo utilizzare il seguente fatto (dimostrato successivamente):

Proposizione 1.2.3. *C'è una omotopia di catene $k : \prod \Omega^*(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \prod \Omega^*(U_{i_0, \dots, i_{p-1}})$ tra l'identità e la mappa nulla in grado $p > 0$.*

Segue che nella successione spettrale, in pagina 1 sopravvive solo $E_1^{p,q}$ per $p = 0$ dato da $\ker \partial$ (forme globali).

...		
$\Omega^2(M)$...	$\Rightarrow E_2^{p,q} = H_{dR}^q(M)$
$\Omega^1(M)$...	se $p=0$, nulla altrimenti. La successione spettrale stabilizza dunque a $E_2 = E_\infty$ e conseguentemente $H^*(C^*, d) \cong H_{dR}^*(M)$.
$\Omega^0(M)$...	
0	...	

□

Dimostriamo la **Proposizione 1.2.3**.

Proof. Sia $\{\rho_i\}$ una partizione dell'unità associata a \mathcal{U} . Posto

$$(k\omega)_{i_0, \dots, i_{p-1}} := \sum_i \rho_i \omega_{i, i_0, \dots, i_{p-1}}$$

si verifica che

$$(\partial k\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \sum (-1)^j \rho_i \omega_{i, i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p}$$

e

$$(k\partial\omega)_{i_0, \dots, i_p} = \omega_{i_0, \dots, i_p} + \sum (-1)^{j+1} \rho_i \omega_{i, i_0, \dots, \hat{i}_j, \dots, i_p}$$

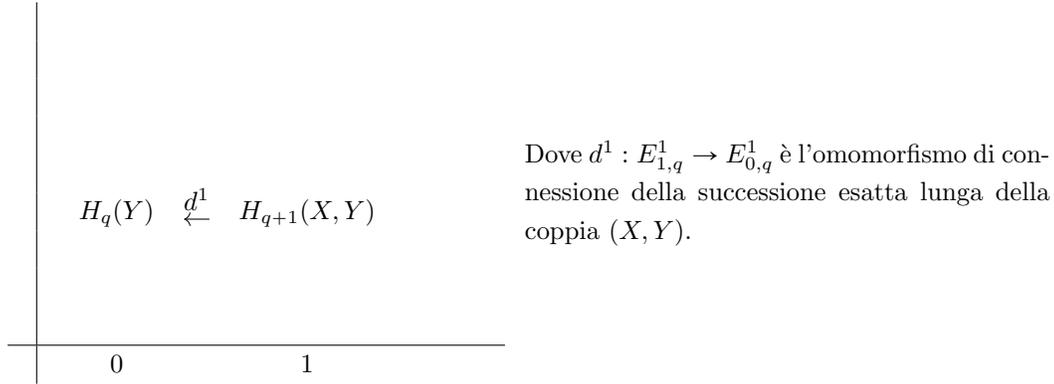
per tanto $\partial k + k\partial = Id$ e dunque k è una omotopia di catene come voluto. □

1.3 Coppie e successioni spettrali

Consideriamo la filtrazione $\emptyset \subset X_0 \subset X_1$ associata alla coppia (X, Y) con $X = X_1$ e $X_0 = Y$. Questa è una filtrazione con due soli termini e analogamente a quanto già fatto otteniamo:

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) = \begin{cases} H_q(Y) & \text{se } p = 0 \\ H_{q+1}(X, Y) & \text{se } p = 1. \end{cases}$$

Osserviamo la pagina 1.



Vogliamo confrontare il termine E_∞ ed E_2 (che sappiamo essere uguali in quanto la successione spettrale si stabilizza subito).

Esplicitiamole entrambe.

$$E_{0,q}^\infty = \frac{\text{Im}(H_q(X_0) \rightarrow H_q(X_1))}{\text{Im}(H_q(\emptyset) \rightarrow H_q(X_1))} = \text{Im}(i : H_q(Y) \rightarrow H_q(X)),$$

$$E_{1,q}^\infty = \frac{H_{q+1}(X_1)}{\text{Im}(H_{q+1}(X_0) \rightarrow H_{q+1}(X_1))} = \frac{H_{q+1}(X)}{\text{Im}(i : H_{q+1}(Y) \rightarrow H_{q+1}(X))}.$$

Per E^2 i conti danno

$$E^2 = \ker(d^1 : H_{q+1}(X, Y) \rightarrow H_q(Y)) \quad (p = 1),$$

$$E^2 = H_q(Y) / \text{Im } d^1 \quad (p = 0).$$

Mettendo tutto insieme otteniamo l'esattezza della successione lunga della coppia in omologia.

Chapter 2

Successione di Serre

Sia $E \xrightarrow{\pi} B$ una fibrazione di Serre, che ricordiamo voler dire risolvere il problema di sollevamento

$$\begin{array}{ccc}
 I^n \times \{0\} & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \nearrow \text{dashed} & \downarrow \\
 I^{n+1} & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

D'ora in poi supporremo B CW complesso connesso per archi, ipotesi che non è più stringente di B connesso per archi a patto di usare approssimazione cellulare e pullback di fibrati.

Definizione 2.0.1. Un *sistema locale* $\mathcal{G} = \{G_x, \tau_\gamma\}$ si gruppi su uno spazio topologico X è un funtore che assegna ad ogni $x \in X$ un gruppo G_x e ad ogni cammino $\gamma : I \rightarrow X$ da x_0 ad x_1 un morfismo $\tau_\gamma : G_{x_0} \rightarrow G_{x_1}$ che dipende solo dalla classe di omotopia ad estremi fissi di γ e tale che se γ è costante allora τ_γ è l'identità. In altre parole, un sistema locale è un funtore dal gruppoide fondamentale ai gruppi.

Osserviamo che chiaramente τ_γ è un isomorfismo e dunque per X connesso per archi tutti i G_x sono isomorfi.

Il $\pi_1(X, x_0)$ agisce a sinistra su G_{x_0} .

Definizione 2.0.2. Se X è connesso per archi e il suo gruppo fondamentale agisce banalmente su \mathcal{G} , diremo che il sistema locale è banale.

Assumiamo che X sia connesso per archi e ammetta rivestimento universale \tilde{X} . Sappiamo che $\pi_1(X, x_0)$ agisce a destra per traslazione su \tilde{X} (azione di monodromia) e conseguentemente agisce (di nuovo da destra) sul complesso $C_*(\tilde{X})$ e questa azione commuta con il differenziale.

Definizione 2.0.3. Posto $G = G_{x_0}$ abeliano, possiamo definire i complessi

$$C_*(X, \mathcal{G}) := C_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]} G$$

$$C^*(X, \mathcal{G}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]}(C_*(\tilde{X}, G))$$

che chiamiamo catene e cocatene singolari a coefficienti nel sistema locale \mathcal{G} .

Definizione 2.0.4. Definiamo omologia e coomologia a coefficienti locali l'omologia del primo o secondo complesso.

Diamo ora un teorema importante.

Teorema 2.0.1 (Successione spettrale di Serre). *Sia $\pi : E \xrightarrow{\pi} B$ una fibrazione di Serre, esiste una successione spettrale di primo quadrante $E_{p,q}^r$ con $r \geq 2$ con*

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; \{H_q(E_x; M)\}) = H_p(B; \mathcal{H}_q(\pi^{-1}; M))$$

convergente a $E_{p,q}^\infty \Rightarrow H_{p+q}(E; M)$ per una opportuna filtrazione di $H_*(E)$.

Esempio 2.0.2. $SU(3)$

Consideriamo la fibrazione $SU(2) \hookrightarrow SU(3) \rightarrow S^5$ data dalla azione di $SU(3)$ sulla 5-sfera. Anche qui $E^2 = E^\infty$.

Si ricava

$$H_p(SU(3); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 3, 5, 8 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
	0	5

Infatti su ogni diagonale $p + q = n$ della pagina E^∞ compare un solo termine non nullo e dunque il modulo graduato associato all'omologia dello spazio totale coincide con l'omologia. Questo ragionamento verrà usato spesso.

Esempio 2.0.3. $SU(4)$

Anche qui, consideriamo la fibrazione $SU(3) \hookrightarrow SU(4) \rightarrow S^7$. In maniera del tutto analoga a prima, ricaviamo $E^2 = E^\infty$, da cui

8	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
5	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
3	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
	0	7

$$H_p(SU(4); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = 0, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Abbiamo nuovamente usato che nella pagina E^∞ compare solo un termine non nullo in ogni diagonale $p + q = n$, dunque coincide con l'omologia.

Esempio 2.0.4. $SU(5)$ dalla fibrazione

$$SU(4) \hookrightarrow SU(5) \rightarrow S^9$$

15	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
12	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
10	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
9	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
7	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
3	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}
	0	9

Osserviamo che $E^2 = \dots = E^9$, mentre $E^{10} = E^\infty$ ma il metodo precedentemente calcolato non ci basta per capire a cosa sono isomorfe queste pagine. Infatti, osservando la diagonale $p + q = 12$ notiamo che in pagina infinito non sappiamo che problema di estensione dobbiamo risolvere, avendo due termini non nulli.

Adesso osserviamo altri esempi basati sulla fibrazione dei cammini (la *pathspace fibration*).

Esempio 2.0.5. ΩX . Prendiamo (X, x_0) spazio topologico puntato, connesso per archi e semplicemente connesso e consideriamo la fibrazione $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$. Osserviamo che PX è contraibile.

$$E_{p,q}^2 = H_p(X, H_q(\Omega X)) \Rightarrow E_{p,q}^\infty = \begin{cases} \mathbb{Z} & p = q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti dato che } PX \text{ contraibile.} \end{cases}$$

$2n - 2$									
$r - 1$									
$n - 1$			•						
0	\mathbb{Z}	...	0	•	...	•	...	•	
	0		n		r			$2n$	

Quindi $d_{r,0}^r : \overbrace{E_{r,0}^r}^{=H_r(X)} \rightarrow \overbrace{E_{0,r-1}^r}^{=H_{r-1}(\Omega X)}$ deve essere un isomorfismo per $r \leq 2n - 2$. Per convincersi basta osservare che anche tutte le righe dalla 1 alla $n - 2$ sono zeri: l'omologia di ΩX in prima colonna è nulla fino alla $n - 2$ esima altrimenti sopravviverebbe fino a pagina E^∞ ,

In realtà, una diretta conseguenza dell'esempio è la seguente proposizione.

Proposizione 2.0.6. *Se X è $(n - 1)$ -connesso, ossia ha omotopia dalla zeresima alla $n - 1$ esima nulla, allora $H_1(X) = \dots = H_{n-1}(X) = 0$ e inoltre $H_r(X) \cong H_{r-1}(\Omega X)$ per $r \leq 2n - 2$.*

Una conseguenza è il seguente.

Teorema 2.0.7 (Teorema di Hurewicz). *Se X è $(n - 1)$ -connesso ed $n \geq 2$ allora $\pi_n(X) = H_n(X)$.*

Come ultimo esempio abbiamo

Esempio 2.0.8. ΩS^n

Visto che $\pi_i(S^n) = 0$ per $i < n$ e usando $\Omega S^n \rightarrow PS^n \rightarrow S^n$ otteniamo

...	
$3n-3$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	
$2n-2$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	
$n-1$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	
0	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	
	0	n	

e dunque

$$H_i(\Omega S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n-1)|i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2.1 Confronto di successioni spettrali

L'associazione di una successione spettrale ad un complesso di catene graduato filtrato è funtoriale, quindi mappe di complessi graduati filtrati inducono mappe di successioni spettrali.

Teorema 2.1.1. *Sia $\tau : C \rightarrow C'$ una mappa di complessi di catene filtrati graduati ¹, con una filtrazione convergente e limitata dal basso.*

Se per qualche $r \geq 1$ si ha che $\tau^r : E^r \rightarrow E'^r$ è un isomorfismo allora τ induce isomorfismo in omologia

$$\tau_* : H_*(C) \xrightarrow{\cong} H_*(C').$$

Proof. Per funtorialità segue che τ^l è iso per $l \geq r$ e in particolare lo è anche $\tau^\infty : E^\infty \rightarrow E'^\infty$. Adesso possiamo osservare il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F_{s-1}(H_n(C)) & \longrightarrow & F_s(H_n(C)) & \longrightarrow & E_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F_{s-1}(H_n(C')) & \longrightarrow & F_s(H_n(C')) & \longrightarrow & E_{s,n-s}^\infty \longrightarrow 0 \end{array}$$

Per n fissati possiamo prendere \bar{s} sufficientemente piccolo affinché la limitatezza dal basso della filtrazione garantisca $F_{\bar{s}-1}H_n(C) = F_{\bar{s}-1}H_n(C') = 0$ e per induzione (usando il diagramma), per $s > \bar{s}$ si ottiene

$$\tau_* : F_s H_n(C) \rightarrow F_s H_n(C')$$

isomorfismo. Dato che la filtrazione F è convergente si ha la tesi sulla unione crescente

$$\rightarrow \tau_* : \bigcup_s F_s H_n(C) = H_n(C) \rightarrow H_n(C') = \bigcup_s F_s H_n(C') \quad \text{è isomorfismo.}$$

□

¹Osserviamo che questa ipotesi implica compatibilità delle filtrazioni rispetto a τ ed è più forte di un semplice morfismo di complessi fra complessi graduati e filtrati.

2.2 Prima dimostrazione del Teorema della successione spettrale di Serre

A meno di usare il teorema di approssimazione CW, il pullback di fibrati ed il teorema di Whitehead possiamo supporre che B sia un complesso CW.

Sia $B^{(i)}$ l' i -esimo scheletro di B , questo induce la filtrazione

$$\emptyset \subset B^{(0)} \subset \dots \subset B^{(n)} \subset \dots$$

e quella pullback su E data da $E^{(i)} = \pi^{-1}(B^{(i)})$. Questa filtrazione topologica induce una filtrazione sui complessi di catene singolari $C_*(E)$ da cui otteniamo una successione spettrale con

$$E_{p,q}^0 = C_{p+q}(E^p, E^{p-1})$$

e differenziale d^0 indotto dal bordo di $C_*(E)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{p,q}^1 &= H_{p+q}(E^p, E^{p-1}) = H_{p+q}(\pi^{-1}(B^{(p)}), \pi^{-1}(B^{(p-1)})) \stackrel{\text{escissione}}{=} \\ &= H_{p+q} \left(\pi^{-1}(B^{(p)}), \pi^{-1}(B^{(p)} \setminus \bigcup_i \overbrace{\{c_i\}}^{\text{centro di } p\text{-cella}}) \right) = \\ &= H_{p+q} \left(\bigcup_i \pi^{-1}(D_i^p), \bigcup_i \pi^{-1}(D_i^p \setminus \{c_i\}) \right) = \\ &= \bigoplus_i H_{p+q}(\pi^{-1}(D_i^p), \pi^{-1}(D_i^p \setminus \text{int}(D_i))). \end{aligned}$$

A meno di approssimazione CW possiamo supporre che la fibrazione π sia banale sul disco D_i con fibra $\pi^{-1}(c_i) = F_i$. Quindi

$$H_{p+q}(\pi^{-1}(D_i^p), \pi^{-1}(\partial D_i^p)) = H_{p+q}(D_i^p \times F_i, S^{p-1} \times F_i) \stackrel{\text{Kunneth}}{=} H_q(F_i).$$

Pertanto $E_{p,q}^1 = \bigoplus_i H_q(F_i)$.

Adesso abbiamo due casi differenti. Se il sistema locale $\{H_q(\pi^{-1})\}$ è banale, $E_{p,q}^1$ sono proprio le catene cellulari $C_p^{cell}(B, H_q(F)) = C_p^{cell}(B) \otimes H_q(F)$ con il differenziale d^1 indotto localmente dalla mappa della tripla $(B^{(p)}, B^{(p-1)}, B^{(p-2)})$.

Alternativamente, possiamo passare al rivestimento universale di B e ottenere

$$E_{p,q}^1 = C_p^{cell}(\tilde{B}) \otimes_{\pi_1(B)} H_q(F) = C_p^{cell}(B; H_q(\pi^{-1})).$$

In entrambi i casi $E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(\pi^{-1}))$ come voluto.

2.3 Seconda dimostrazione del Teorema della successione spettrale di Serre

Data la fibrazione $\pi : E \rightarrow B$ consideriamo

$$\text{Sin}_{s,t}(\pi) = \{(f, \sigma) \mid f : \Delta^s \times \Delta^t \rightarrow E, \sigma : \Delta^s \rightarrow B, \pi \circ f = \sigma \circ pr_1\}$$

$$\begin{array}{ccc} \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \pi \\ \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} & B \end{array}$$

e otteniamo un funtore $Sin_{*,*} : \Delta^{op} \times \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$.

Prendiamo $RSin_{*,*}(\pi)$ l' R -modulo libero generato da $Sin_{s,t}(\pi)$.

Ci sono due differenziali:

$$\begin{aligned} \partial'_{p,q} : RSin_{p,q}(\pi) &\rightarrow RSin_{p-1,q} \\ (f, \sigma) &\mapsto \sum_{i=0}^p (-1)^i (f \circ (\varepsilon_i^p \times id_{D_q}), \sigma \circ \varepsilon_i^p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial''_{p,q} : RSin_{p,q}(\pi) &\rightarrow RSin_{p,q-1} \\ (f, \sigma) &\mapsto \sum_{j=0}^q (-1)^j (f \circ (id_{\Delta_p} \times \varepsilon_j^q), \sigma). \end{aligned}$$

I differenziali commutano dunque possiamo considerare $d = \partial' + (-1)^q \partial''$ e poi due filtrazioni su $RSin_{*,*}$ (come nel caso del *complesso di Cech-de Rham*). Le due successioni spettrali convergeranno alla stessa cosa e concluderemo la tesi.

- Prima filtrazione: $F_p(RSin_{*,*}(\pi))_* = \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ t \leq p}} RSin_{s,t}(\pi)$ e $d_0 = \partial'$.

Sia $(f, \sigma) \in Sin_{s,t}(\pi)$, consideriamo \hat{f} associata tramite aggiunta

$$\begin{array}{ccc} \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow \pi \\ \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Delta^s & \xrightarrow{\hat{f}} & E^{\Delta^t} \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{c} & B^{\Delta^t} \end{array}$$

dove c è la mappa di inclusione sulla mappa costante.

I dati di f ed \hat{f} sono equivalenti.

Consideriamo il pullback

$$\begin{array}{ccc} E_t^1 & \longrightarrow & E^{\Delta^k} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ B & \xrightarrow{c} & B^{\Delta^k} \end{array}$$

e dunque $RSin_{s,t}(\pi) = C_s(E_t^1; R)$.

Inoltre $E_t^1 \rightarrow E^{\Delta^t}$ è una equivalenza omotopica perché lo è $B \rightarrow B^{\Delta^t}$ e lo è anche $E \xrightarrow{c} E^{\Delta^t}$, quindi $C_*(E_t^1) \rightarrow C_*(E)$ induce isomorfismi in omologia e

$$E_{s,t}^1 = H_s(E) \quad \forall t \geq 0.$$

Il differenziale $d^1 = \pm \partial''$ è somma a segni alterni di mappe di restrizione alle facce di

Δ^t , che quindi inducono identità in omologia. Concludiamo che

$$E_{s,t}^2 = \begin{cases} H_s(E) & \text{se } t = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- Seconda filtrazione: $F_p(RSin_{*,*}(\pi))_* = \bigoplus_{\substack{s+t=n \\ s \leq p}} RSin_{s,t}(\pi)$ e differenziale $d_0 = \partial''$.

Data $(f, \sigma) \in Sin_{s,t}(\pi)$ abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^s \times \Delta^t & \xrightarrow{\quad} & \sigma^{-1}(E) & \xrightarrow{\quad} & E \\ & \searrow^{pr_1} & \downarrow \pi_\sigma & & \downarrow \pi \\ & & \Delta^s & \xrightarrow{\sigma} & B \end{array}$$

e quindi fissando $\sigma : \Delta^s \rightarrow B$ abbiamo per aggiunta

$$\begin{array}{ccc} \Delta^t & \xrightarrow{\quad} & \hat{\pi}^{-1}(*) \\ & \searrow & \downarrow \hat{\pi} \\ & & \{*\} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & E^{\Delta^s} \\ & \searrow & \downarrow \hat{\pi} \\ & & B^{\Delta^s} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{\pi}^{-1}(*) = \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \\ j(*) = \sigma \end{array}$$

per cui

$$E_{s,t}^0 = \bigoplus_{\sigma: \Delta^s \rightarrow B} C_t(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E))),$$

$$E_{s,t}^1 = \bigoplus_{\sigma} H_t(\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)))$$

e d^1 è la somma a segni alterni delle facce del modulo simpliciale $E_{s,t}^1$ che agiscono in questo modo: se $\phi : [s'] \rightarrow [s]$ è una mappa nella categoria simpliciale, induce

$$\phi^* : \Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \rightarrow \Gamma(\Delta^{s'}, (\sigma \circ \phi)^{-1}(E))$$

e quindi $\phi^* : E_{s,t}^1 \rightarrow E_{s',t}^1$.

Poiché $\pi : E \rightarrow B$ è una fibrazione e Δ^s è contraibile, $\sigma^{-1}(E) \rightarrow \Delta^s$ è una fibrazione banale in quanto pullback di una fibrazione, su base contraibile.

Abbiamo dunque una equivalenza omotopica fra

$$\Gamma(\Delta^s, \sigma^{-1}(E)) \cong F_\sigma^{\Delta^s} \cong F_\sigma$$

con F_σ la fibra di π sopra il vertice 0 di σ .

Quindi

$$E_{s,t}^1 = \bigoplus_{\sigma \in Sin_s(B)} H_t(F_\sigma).$$

Se B è semplicemente connesso, possiamo fissare isomorfismi tra i vari $H_t(F_\sigma)$ al variare di σ , quindi

$$E_{s,t}^1 = C_s(B) \otimes H_t(F).$$

Altrimenti possiamo passare al rivestimento universale \tilde{B} di B e abbiamo

$$E_{s,t}^1 = C_s(\tilde{B}) \otimes_{\pi_1(B)} H_t(F) = C_s(B; H_t(\pi^{-1}))$$

e d^1 è la mappa di bordo di $C_*(\tilde{B})$ e pertanto concludiamo in ogni caso

$$E_{s,t}^2 = H_s(B; H_t(\pi^{-1}))$$

che conclude.

2.4 Successione spettrale di Serre in coomologia

Teorema 2.4.1. *Sia $F \rightarrow E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre, sia G un gruppo e B connesso per archi tale che $\pi_1(B)$ agisce banalmente su $H^*(F; G)$.*

Esiste una successione spettrale di primo quadrante tale che

$$E_2^{p,q} = H^p(B; H^q(F; G))$$

$$E_\infty^{p,n-p} \cong F_p^n / F_{p+1}^n$$

per una appropriata filtrazione

$$0 \subset F_n^n \subset \cdots \subset F_0^n = H^n(E; G).$$

Proof. La dimostrazione può essere portata avanti analogamente a quelle fatte per la versione omologica del teorema. \square

2.5 Proprietà moltiplicative della successione spettrale di Serre in coomologia

Sia il gruppo dei coefficienti un anello R .

Assumiamo che $H^p(B, H^q(F; R)) \cong H^p(B; R) \otimes H^q(F; R)$ (per esempio se $H^*(B; R)$ o $H^*(F; R)$ sono liberi o se R è un campo).

Allora E_2 ha una struttura moltiplicativa:

$$E_2 = H^*(B; R) \otimes H^*(F; R)$$

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{|b||a'|} \cdot aa' \otimes bb'.$$

Inoltre se A è un anello filtrato con una filtrazione decrescente $F_i A$ tale che $F_p A \cdot F_q A \subset F_{p+q} A \Rightarrow GA = \bigoplus (F_p A / F_{p+1} A)$ ha una struttura di anello.

Questa struttura può essere abbastanza povera, ad esempio se $F_p A \cdot F_q A \subset F_{p+q+1} A$ allora GA ha una struttura di prodotto banale.

Ricordiamo che la struttura moltiplicativa in $H^*(X)$ è data dalla mappa diagonale e di Kunneth:

$$H^*(X) \otimes H^*(X) \rightarrow H^*(X \times X) \xrightarrow{\Delta} H^*(X)$$

e per le catene relative

$$c_1 \in H^k(X, X_1) \quad c_2 \in H^l(Y, Y_1)$$

$$c_1 \otimes c_2 \in H^{k+l}(X \times Y, X_1 \times Y \cup X \times Y_1).$$

Data $(E', B', F', p'), (E'', B'', F'', p'')$ fibrazioni di Serre possiamo considerare il prodotto

$$(E' \times E'', B' \times B'', F' \times F'', p' \times p'')$$

e ora costruire la successione spettrale associata alle R -algebre bi-cosimpliciali $Hom(RSin_{*,*}(\pi), R)$ per $\pi = p', p'', p' \times p''$.

Abbiamo quindi una mappa, unica a meno di omotopia

$$\alpha : Hom(RSin_{*,*}(\pi), R) \otimes Hom(RSin_{*,*}(\pi), R) \rightarrow Hom(RSin_{*,*}(\pi \times \pi), R)$$

che possiamo esplicitare tramite la mappa di Alexander-Whitney in entrambe le direzioni.

Il complesso filtrato ha struttura di algebra differenziale graduata filtrata.

Tramite la mappa diagonale

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Delta} & E \times E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \times \pi \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B \times B \end{array}$$

l'omomorfismo di Alexander-Whitney induce quindi un prodotto in $Hom(RSin_{*,*}(\pi), R)$ che induce il prodotto cup su $H^*(E)$ e che, essendo compatibile con la filtrazione, determina un prodotto sulla successione spettrale di coomologia per ogni pagina tal che

$$d_r(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = (d_r \alpha_1) \otimes \alpha_2 + (-1)^{|\alpha_1|} \alpha_1 \otimes d_r \alpha_2.$$

Chapter 3

Applicazioni della successione spettrale di Serre

Vediamo ora alcune applicazioni.

- $SU(n)$.

Ritorniamo a quanto già visto in omologia.

$$H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong H^*(S^3 \times S^5 \times \dots \times S^{2n-1}; \mathbb{Z}).$$

Dimostriamo per induzione che $H^*(SU(n); \mathbb{Z}) = \bigwedge[x_3, \dots, x_{2n-1}]$.

Osserviamo la fibrazione $SU(n) \rightarrow SU(n+1) \rightarrow S^{2n+1}$.

Lo studio della successione spettrale ci fa concludere che $E_\infty \cong \bigwedge[x_3, \dots, x_{2n+1}]$. Dato che per il teorema di Serre sappiamo che E_∞ è il graduato

$$GH^*(SU(n+1)) = \bigoplus_i F_i H^*(SU(n+1)) / F_{i+1} H^*(SU(n+1))$$

ne segue che le preimmagini delle classi X_3, \dots, X_{2n+1} generano $H^*(SU(n+1))$ che è dunque un quoziente della algebra esterna intera libera su x_3, \dots, x_{2n+1} .

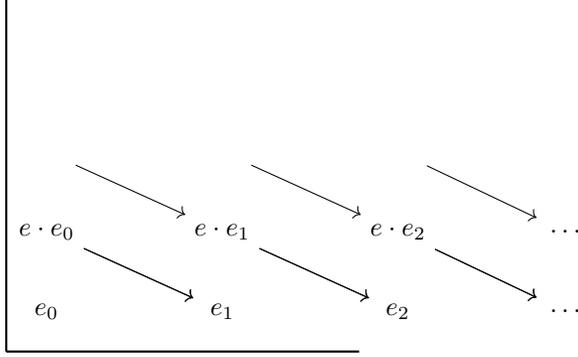
Avendo lo stesso rango è proprio isomorfa a $\bigwedge[x_3, \dots, x_{2n+1}]$ è abbiamo concluso.

- $\mathbb{C}P^n$.

Osserviamo la fibrazione $S^1 \rightarrow S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ e la successione spettrale di Serre coomologica associata

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P^n; H^q(S^1)) = \begin{cases} H^p(\mathbb{C}P^n) & q=0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

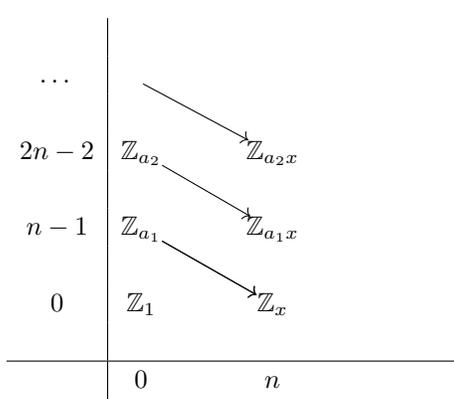
Sappiamo che E_∞ descrive $H^*(S^{2n+1})$. Ricaviamo dalla successione spettrale $d_2(e \cdot e_k) = e_{k+1}$ e $d_2(e \cdot e_n) = 0$, da cui $e_{k+1} = e_k \cdot d_2 e = e_k \cdot e_1 \Rightarrow e_k = e_1^k \Rightarrow H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[\overbrace{e_1}^{\dim=2}] / (e_1^n)$.



• ΩS^n .

Consideriamo la fibrazione $\Omega S^n \rightarrow PS^n \rightarrow S^n$ e guardiamo la successione spettrale di Serre in coomologia (ricordando che PS^n è contraibile). Usiamo, per scrivere la pagina E_2 , il teorema dei Coefficienti Universali e il fatto che le omologie non nulle di ΩS^n sono distanti fra loro.

Prendiamo prima n dispari maggiore di 1.



$$d_n(a_1) = x$$

$$d_n(a_k) = a_{k-1}x$$

$$d_n(a_1^k) = k a_1^{k-1} x$$

da cui, per induzione su k , segue che

$$a_1^k = k! a_k$$

e dunque

$$H^*(\Omega S^n; \mathbb{Z}) = \Gamma_{\mathbb{Z}}[a] = \langle 1, a, \frac{a^2}{2}, \dots, \frac{a^n}{n}, \dots \rangle \subset \mathbb{Q}[a].$$

Quando n è pari invece vale $a_1^2 = 0$.

Si può dimostrare che $a_2^k = k! a_{2k}$ e che $a_1 a_{2k} = a_{2k+1}$:

$$d(a_1 a_{2k}) = x a_{2k} - a_1 \overbrace{a_{2k-1} x}^{=0 \text{ by ind.}} = x a_{2k}$$

e quindi

$$d(a_1 a_{2k}) = d(a_{2k+1}) \Rightarrow a_1 a_{2k} = a_{2k+1}.$$

Anche in questo caso possiamo descrivere esplicitamente

$$H^*(\Omega S^n) = \bigwedge_{\mathbb{Z}} [a] \otimes \Gamma_{\mathbb{Z}} [b]$$

con a in dimensione $n - 1$ e b in dimensione $2n - 2$.

Abbiamo esibito degli esempi di calcolo di anelli di coomologia usando la successione spettrale di Serre, facciamo ora delle considerazioni di carattere generale.

Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre. Supponiamo B e F connessi per archi e che il sistema

locale $H_*(\pi^{-1})$ sia banale.

Consideriamo la successione spettrale

$$E_{p,q}^2 = H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E),$$

$$E_{n,0}^2 \cong H_n(B).$$

Poiché nessun differenziale arriva alla riga 0 abbiamo

$$E_{n,0}^{r+1} = \ker(d^r : E_{n,0}^r \rightarrow E_{n-r,r-1}^r)$$

che è banale per $r > n$. Quindi

$$E_{n,0}^2 \supset E_{n,0}^3 \supset \dots \supset E_{n,0}^{n+1} = E_{n,0}^\infty.$$

Approssimando $E \rightarrow B$ con CW-complessi e mappe cellulare si ha

$$E^{(n)} \subset \pi^{-1}(B^{(n)})$$

da cui segue che $H_n(E) = \text{Im}(H_n(\pi^{-1}(B^{(n)})) \rightarrow H_n(E)) = F_n H_n(E)$ cioè vale $F_n H_n(E) = H_n(E)$ e quindi possiamo guardare la composizione

$$H_n(E) = F_n H_n(E) \rightarrow F_n H_n(E)/F_{n-1} H_n(E) = E_{n,0}^{n+1} \hookrightarrow E_{n,0}^n \hookrightarrow \dots \hookrightarrow E_{n,0}^2 = H_n(B).$$

Proposizione 3.0.1. *La mappa $H_n(E) \rightarrow H_n(B)$ appena esposta coincide con $H_n(\pi)$.*

Proof. Per naturalità, confrontando le successioni spettrali per

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \downarrow \pi & & \downarrow Id_B \\ B & \xrightarrow{Id_B} & B \end{array}$$

da cui

$$\begin{array}{ccc} H_n(E) & \xrightarrow{\text{speciale}} & H_n(B) \\ \downarrow \pi_* & & \downarrow Id_{B*} \\ H_n(B) & \xrightarrow{Id_{B*}} & H_n(B) \end{array}$$

e rimane solo da verificare che anche la mappa in basso sia effettivamente la nostra mappa 'speciale'. Ma questo perché la fibrazione di sinistra è banale e la successione spettrale converge a pagina 2. \square

Data una sezione $B \rightarrow E$ lo stesso ragionamento ci dice che la mappa speciale $H_n(E) \rightarrow H_n(B)$ ha una sezione. In particolare possiamo concludere che la riga 0 sopravvive fino al termine E^∞ .

In maniera simile possiamo notare che $E_{0,n}^2 = H_n(F)$ e dunque facendo quozienti successivi

$$H_n(F) = E_{0,n}^2 \rightarrow E_{0,n}^3 \rightarrow \cdots \rightarrow E_{0,n}^\infty = F_0 H_n(E) \hookrightarrow H_n(E).$$

Proposizione 3.0.2. *La mappa $H_n(F) \rightarrow H_n(E)$ appena descritta è proprio la mappa indotta dall'inclusione $i : F \rightarrow E$ in omologia.*

Proof. Analogo a prima ma usando il diagramma

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\text{Id}_F} & F \\ \downarrow & & \downarrow i \\ F & \xrightarrow{i} & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ * & \longrightarrow & B \end{array}$$

e confrontando le successioni spettrali. □

3.1 Trasgressione

Consideriamo $E \xrightarrow{\pi} B$ fibrazione di Serre con F, B connessi per archi e sistema locale banale.

Definizione 3.1.1. Consideriamo nella successione spettrale di Serre i differenziali

$$d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n.$$

Questo omomorfismo (e il suo analogo in coomologia) si chiama *trasgressione*. Gli elementi che sopravvivono fino al dominio della trasgressione sono detti *trasgressori*.

Per $n = 2$ abbiamo $d^2 : \overbrace{E_{2,0}^2}^{H_2(B)} \rightarrow \overbrace{E_{0,1}^2}^{H_1(F)}$, ma in generale, per quanto visto prima, $E_{n,0}^n$ è un sottomodulo di $H_n(B)$ mentre $E_{0,n-2}^n$ è un quoziente di $H_{n-1}(F)$.

Consideriamo la successione esatta della coppia

$$\cdots \rightarrow H_m(F) \rightarrow H_m(E) \rightarrow H_m(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{m-1}(F) \rightarrow \cdots$$

e la proiezione

$$\pi_* : H_n(E, F) \rightarrow H_n(B, *).$$

Teorema 3.1.1. *La trasgressione nella successione spettrale di Serre in omologia coincide con la composizione*

$$H_n(B) \rightarrow H_n(B, *) \xrightarrow{\pi_*^{-1}} H_n(E, F) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(F)$$

e analogamente in coomologia

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(F) \xrightarrow{\partial^*} H^n(E, F) \xrightarrow{(\pi^*)^{-1}} H^n(B, *) \rightarrow H^n(B)$$

Proof. Consideriamo il caso dell'omologia. L'altro è analogo.

Approssimiamo B con un CW-complesso con una sola 0-cella.

Quindi ogni elemento di $E_{n,0}^n$ è rappresentato da una catena $c \in C_n(\pi^{-1}(B^{(n)})) \subset C_n(E)$ con bordo in $C_{n-1}(\pi^{-1}(B^{(n)})) \subset C_{n-1}(F)$. Ovvero c è un ciclo relativo di $C_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F)$.

Come abbiamo visto nella proposizione di identificazione della riga 0 della successione spettrale, l'identificazione di $E_{n,0}^n$ con $H_n(B)$ avviene tramite la mappa che manda

$$E_{n,0}^n \rightarrow \overbrace{H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F)}^{Z_{n,0}^n} \ni [c] \xrightarrow{\pi_*} [\pi_*(c)] \in H_n(B).$$

Inoltre il differenziale $d_{n,0}^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ manda

$$H_n(\pi^{-1}(B^{(n)}), F) \ni [c] \rightarrow [\partial c] \in C_{n-1}(F)$$

quindi segue la tesi. □

3.2 Classi di Serre

Sia X spazio topologico connesso per archi tale che $\bar{H}_*(X)$ è di torsione. Equivalentemente si può dire che $\bar{H}_*(X; \mathbb{Q}) = \bar{H}_*(pt, \mathbb{Q})$. Possiamo dire qualcosa sui gruppi di omotopia? Sono tutti di torsione?

E se fosse che $\bar{H}_*(X)$ è tutta di p -torsione possiamo dire lo stesso di $\pi_*(X)$?

E se $H_*(X)$ sono tutti finitamente generati?

Definizione 3.2.1. Una classe \mathcal{C} di gruppi abeliani si dice *classe di Serre* se $0 \in \mathcal{C}$ e per ogni successione esatta corta

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

vale $A, B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C \in \mathcal{C}$.

Osserviamo che una classe di Serre è chiusa per

- isomorfismi;
- sottogruppi;
- quozienti;
- estensioni: data $A \rightarrow B \rightarrow C$ esatta in B , allora se $A, C \in \mathcal{C}$ anche $\ker(B \rightarrow C)$, $\text{coker}(B \rightarrow C)$ stanno in \mathcal{C} e dunque

$$0 \rightarrow \ker(B \rightarrow C) \rightarrow B \rightarrow \text{coker}(B \rightarrow C) \rightarrow 0$$

è esatta corta con estremi in $\mathcal{C} \Rightarrow B \in \mathcal{C}$.

Elenchiamo un po' di classi di Serre (la dimostrazione è un esercizio):

- la classe dei gruppi abeliani finiti \mathcal{C}_{fin} ;
- la classe dei gruppi abeliani finitamente generati \mathcal{C}_{fg} ;
- la classe dei gruppi abeliani di torsione \mathcal{C}_{tor} ;
- la classe dei gruppi abeliani di p -torsione.

Definizione 3.2.2. Sia \mathcal{P} un insieme di primi. Sia $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ la classe di gruppi di torsione tali che se $\exists p \in \mathcal{P}$ che divide l'ordine di $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ allora $a = 0$.

Scriveremo \mathcal{C}_p per indicare $\mathcal{C}_{\{p\}}$.

Questa è una classe di Serre per ogni primo p .

Sia $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ la localizzazione di \mathbb{Z} al complementare dell'unione dei generati dai primi $(p), p \in \mathcal{P}$. Allora $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{\mathcal{P}} = 0$ dunque in particolare

$$A \in \mathcal{C}_p \Leftrightarrow A \otimes \mathbb{Z}_p = 0$$

(ometteremo il pedice al tensore quando è chiaro che stiamo lavorando con \mathbb{Z} moduli).

Osserviamo anche che l'intersezione di classi di Serre è una classe di Serre.

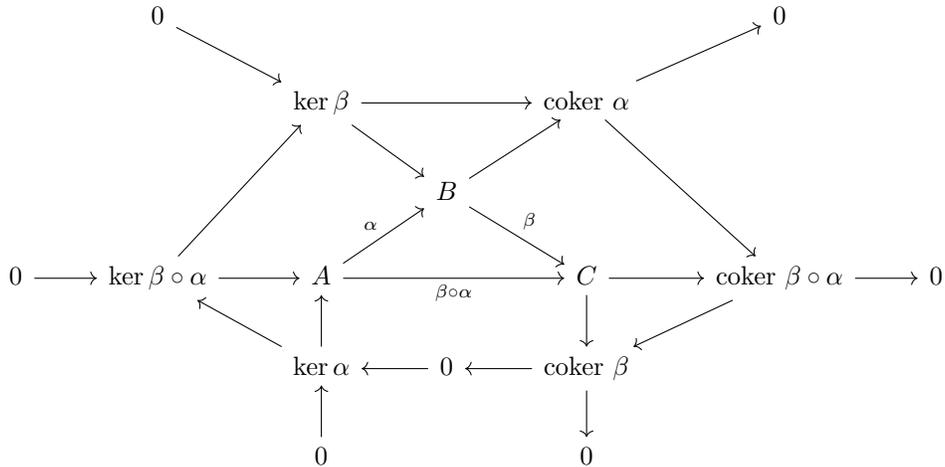
Diamo adesso una definizione che ci permetterà di lavorare *modulo una classe di Serre*.

Definizione 3.2.3. Data una classe di Serre \mathcal{C} , diremo che $A = 0 \pmod{\mathcal{C}}$ se $A \in \mathcal{C}$. Dato un morfismo $f : A \rightarrow B$ diremo

- è monomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$ se $\ker f \in \mathcal{C}$;
- è epimorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$ se $\text{coker } f \in \mathcal{C}$;
- è isomorfismo $\pmod{\mathcal{C}}$ se è entrambi.

Proposizione 3.2.1. Sia \mathcal{C} una classe di Serre. Le classi di monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi $\pmod{\mathcal{C}}$ sono chiuse per composizione. La classe degli isomorfismi rispetta la regola "2 su 3", ossia se due tra $\alpha, \beta, \alpha \circ \beta$ sono iso ($\pmod{\mathcal{C}}$) anche il terzo lo è.

Proof. La dimostrazione segue dall'esattezza del cammino esagonale esterno del diagramma sotto.



□

Proseguiamo con delle osservazioni.

Sia C_* un complesso di catene. Se $C_n \in \mathcal{C}$ allora anche $H_n(C_*) \in \mathcal{C}$.

Sia F filtrazione su A . Se $A \in \mathcal{C}$ allora $gr_s A \in \mathcal{C} \forall s$.

Se F è finita allora $gr_s A \in \mathcal{C} \forall s \Leftrightarrow A \in \mathcal{C}$.

Sia $\{E_{s,t}^r\}$ una successione spettrale. Se $E_{s,t}^2 \in \mathcal{C} \forall s, t$ allora tutte le altre pagine (con indice finito) stanno in \mathcal{C} . Se inoltre $\{E^r\}$ è di primo quadrante, anche la pagina ∞ .

Se la successione spettrale di primo quadrante è indotta da una filtrazione su un complesso C_* e $E_{s,t}^2 \in \mathcal{C}$ per $s+t=n$ allora $H_n(C_*) \in \mathcal{C}$.

Come esempio di questa ultima considerazione, osserviamo che data una coppia (X, A) , se due tra $\bar{H}_n(A), \bar{H}_n(X, A)$ sono in \mathcal{C} , allora anche il terzo lo è.

Vale un **FATTO IMPORTANTE** (lasciato come esercizio): il lemma dei 5 mod \mathcal{C} continua a valere guardando successioni esatte mod \mathcal{C} .

Definizione 3.2.4. Una classe di Serre è detta *anello di Serre* se $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B$ e $A * B$ stanno in \mathcal{C} .

Definizione 3.2.5. Una classe di Serre è detta *ideale di Serre* se $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes B$ e $A * B$ stanno in \mathcal{C} per ogni B gruppo abeliano.

Tutti gli esempi sopra sono anelli di Serre. Gli esempi senza l'ipotesi che i gruppi siano finitamente generati sono ideali di Serre.

Sia \mathcal{C} una classe di Serre ed $A \in \mathcal{C}$. Consideriamo lo spazio classificante $BA = K(A, 1)$.

Sappiamo che $H_1(K(A, 1)) = A \in \mathcal{C}$.

Definizione 3.2.6. Un anello di Serre si dice *aciclico* se contiene le omologie di tutti i suoi spazi classificanti.

Verifichiamo l'aciclicità di alcune classi di Serre.

- \mathcal{C}_{fin} è aciclica. Per Kunneth ci basta considerare $H_*(BC_n)$ dove $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $C_n \subset S^1$ agisce su $S^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$. Un modello di spazio classificante è lo spazio lenticolare infinito. In particolare abbiamo la fibrazione

$$S^1 = C_n \backslash S^1 \rightarrow BC_n \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

Studiamo la successione spettrale di Serre associata (riportiamo solo coomologica):

1	e	ex	ex^2	\dots	$E_2^{s,t} = H^s(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^t(S^1)$
0	1	x	x^2	x^3	$H_1(BC_n) = C_n, H_2(BC_n) = 0 \Rightarrow H^2(BC_n) = C_n$
0		2	4	6	$\Rightarrow d_2 e = nx \Rightarrow d_2 ex^i = nx^{i+1}$

Ricaviamo allora $H^*(BC_n) = \mathbb{Z}[x]/(nx)$ con x in grado 2.

Quindi $H_i(BC_n)$ e $H^i(BC_n)$ sono finiti e \mathcal{C}_{fin} è aciclica.

- Poiché ogni gruppo di torsione è limite diretto dei suoi sottogruppi finiti, possiamo concludere che $A \in \mathcal{C}_{tor} \Rightarrow \bar{H}_q(K(A, 1)) \in \mathcal{C}_{tor}$ ossia \mathcal{C}_{tor} è aciclica.

- Analogamente le classi dei p -gruppi finiti e C_p sono acicliche.
- Osservando che $H^*(K(\mathbb{Z}, 1)) = H^*(S^1) = \bigwedge[e]$ con e in grado 1 e concludiamo che C_{fg} è aciclica.

Facciamo una osservazione importante. Sia \mathcal{C} un ideale di Serre, se $H_n(X), H_{n-1}(X)$ sono nulli mod \mathcal{C} allora $H_n(X; M) = 0$ mod \mathcal{C} per ogni gruppo abeliano M .

Nel caso in cui \mathcal{C} sia solo un anello di Serre, l'osservazione vale per $M \in \mathcal{C}$.

Proposizione 3.2.2. *Sia $\pi : E \rightarrow B$ una fibrazione di Serre con B, F connessi per archi e azione banale $\pi_1(B) \curvearrowright H_*(F)$. Sia \mathcal{C} un ideale di Serre.*

Se $H_t(F) \in \mathcal{C} \forall t > 0$ allora $\pi_ : H_*(E) \rightarrow H_*(B)$ è un isomorfismo mod \mathcal{C} .*

Proof. Per il teorema dei coefficienti universali vale

$$E_{s,t}^2 = H_s(B, H_t(F)) \in \mathcal{C}$$

Dunque anche $E_{s,t}^r$ sta in \mathcal{C} per $t > 0$ e similmente per la pagina $E_{\bullet,\bullet}^\infty$.

Ne segue che la mappa

$$\pi_* : H_*(E) \rightarrow H_*(B)$$

è un isomorfismo modulo \mathcal{C} . □

Proposizione 3.2.3. *Sia $\pi : E \rightarrow B$ tale che F, B connessi per archi e $\pi_1(B) = 0$. Sia \mathcal{C} un anello di Serre tale che*

- $H_s(B) \in \mathcal{C}$ per ogni $0 < s < n$;
- $H_t(F) \in \mathcal{C}$ per ogni $0 < t < n - 1$ **oppure** \mathcal{C} è un ideale di Serre.

Allora $\pi_* : H_i(E, F) \rightarrow H_i(B, b_0)$ è isomorfismo mod \mathcal{C} per $i \leq n$.

Proof. Usiamo la successione spettrale di Serre omologica nel caso relativo.

$$E_{s,t}^2 = H_s(B, b_0; H_t(F)) \Rightarrow H_{s+t}(E, F).$$

Per $s = 0$ ed $s = 1$ abbiamo $E_{s,t}^2 = 0$ (stiamo usando B connesso per archi e semplicemente connesso).

Inoltre $E_{s,t}^2 \in \mathcal{C}$ per (s, t) in $[2, n - 1] \times [1, n - 2]$ pertanto per $s + t \leq n$ gli unici gruppi non nulli modulo \mathcal{C} sono $E_{i,0}^2 = H_i(B, b_0)$.

Ricaviamo pertanto che $\pi_* : H_i(E, F) \rightarrow H_i(B, b_0)$ è un isomorfismo modulo \mathcal{C} . □

Parliamo adesso di un importante teorema.

Teorema 3.2.4 (Teorema di Hurewicz modulo un anello di Serre aciclico). *Sia \mathcal{C} un anello di Serre aciclico. Sia X semplicemente connesso ed $n \geq 2$.*

$$\pi_q(X) \in \mathcal{C} \quad \forall q < n \Leftrightarrow \bar{H}_q \in \mathcal{C} \quad \forall q < n$$

ed in tal caso la mappa di Hurewicz $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ è un isomorfismo modulo \mathcal{C} .

Prima della dimostrazione, mostriamo qualche corollario (basato sulla aciclicità di alcuni anelli verificata precedentemente).

- $H_q(X)$ è finitamente generato per ogni $q < n$ se e solo se $\pi_q(X)$ finitamente generato per ogni $q < n$;
- Per p primo, $H_q(X)$ è di p -torsione $\forall q < n$ se e solo se $\pi_q(X)$ è di p -torsione per ogni $q < n$;
- $\bar{H}_q(X; \mathbb{Q}) = 0$ per ogni $q < n$ se e solo se $\pi_q(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ per ogni $q < n$ e

$$h : \pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H_n(X; \mathbb{Q})$$

è iso.

Passiamo alla dimostrazione.

Proof. Ripercorriamo con alcune variazioni la dimostrazione del teorema di Hurewicz.

Procediamo per induzione su n , usando la fibrazione $\Omega X \rightarrow PX \rightarrow X$ e mostriamo che se $\pi_q(X) \in \mathcal{C}$ per $q < n$ allora $\pi_q(X) \rightarrow H_q(X)$ è un isomorfismo modulo \mathcal{C} .

Passo base: $n = 2$. Per il teorema di Hurewicz $\pi_2(X) \rightarrow H_2(X)$ è un isomorfismo.

Passo induttivo: Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \pi_q(X, x_0) & \xleftarrow{\cong} & \pi_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{q-1}(\Omega X) \\ \downarrow h & & \downarrow h & & (2) \downarrow h \\ H_q(X, x_0) & \xleftarrow{(1)} & H_q(PX, \Omega X) & \xrightarrow{\cong} & H_{q-1}(\Omega X) \end{array}$$

e verifichiamo che (1), (2) sono isomorfismi modulo \mathcal{C} .

Se $\pi_2(X) = 0$ (equivalentemente $\pi_1(\Omega X) = 0$, che a priori non possiamo supporre), allora (2) è un isomorfismo per ipotesi induttiva (usando ΩX al posto di X).

Inoltre usando la proposizione sulla fibrazione con B semplicemente connesso e \mathcal{C} anello di Serre, poiché sempre per ipotesi induttiva $H_i(X, x_0) \in \mathcal{C}$ per $i < n$, possiamo concludere che (1) è un isomorfismo modulo \mathcal{C} .

Se $\pi_2(X) \neq 0$ procediamo così: guardiamo la torre di Whitehead

$$\begin{array}{ccc} K = K(\pi_2(X), 1) & & \text{Poiché } \pi_2(X) \in \mathcal{C} \text{ abbiamo } H_i(K) \in \mathcal{C} \text{ per tutti gli } i \text{ positivi,} \\ \downarrow & & \text{per ipotesi di aciclicità di } \mathcal{C}. \text{ Segue guardando la successione} \\ Y & & \text{esatta lunga della coppia } (Y, K) \text{ che } H_i(Y, y_0) \rightarrow H_i(Y, K) \text{ è un} \\ \downarrow & & \text{isomorfismo modulo } \mathcal{C}. \\ X & & \text{Poiché } X \text{ è semplicemente connesso possiamo applicare di} \\ & & \text{nuovo la proposizione sulla fibrazione con base semplicemente} \\ & & \text{connessa e anello di Serre alla mappa } (Y, K) \rightarrow (X, x_0). \end{array}$$

Otteniamo

$$H_i(Y, K) \rightarrow H_i(X, x_0)$$

isomorfismo modulo \mathcal{C} per $i \leq n$. Quindi $H_i(Y, y_0) \rightarrow H_i(X, x_0)$ isomorfismo modulo \mathcal{C} per $i \leq n$.

La mappa $\pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$ è un isomorfismo per $i \geq 3$ e $\pi_2(Y) = \pi_1(Y) = 0$, dunque si può applicare l'ipotesi induttiva ad Y e concludere. \square

Esibiamo un ulteriore corollario (che frasiamo come proposizione).

Proposizione 3.2.5. *Sia X semplicemente connesso, p un primo ed $n \geq 2$. Allora*

$$\pi_i(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = 0 \quad \forall i < n \Leftrightarrow \bar{H}_i(X; \mathbb{Z}_{(p)}) = 0 \quad \forall i < n$$

ed in tal caso la mappa $h : \pi_n(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow \bar{H}_n(X; \mathbb{Z}_{(p)})$ è un isomorfismo.

Proof. Basta usare il teorema di Hurewicz modulo \mathcal{C} prendendo come anello di Serre \mathcal{C}_p . \square

Diamo anche una versione relativa del teorema.

Teorema 3.2.6 (Hurewicz relativo modulo \mathcal{C}). *Sia \mathcal{C} un ideale di Serre (notare l'ipotesi più forte) aciclico. Sia (X, A) una coppia di spazi topologici semplicemente connessi ed $n \geq 2$. Allora*

$$\pi_i(X, A) \in \mathcal{C} \quad \forall 2 \leq i < n \Leftrightarrow H_i(X, A) \in \mathcal{C} \quad \forall 2 \leq i < n$$

ed in tal caso $h : \pi_n(X, A) \rightarrow H_n(X, A)$ è un isomorfismo modulo \mathcal{C} .

Idea. Sia F la fibra omotopica di $A \hookrightarrow X$. Allora abbiamo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(X, A) & \xleftarrow{\cong} & \pi_n(PX, F) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{n-1}(F) \\ \downarrow h & & \downarrow h & & \cong \downarrow h \\ H_n(X, A) & \xleftarrow{p_*} & H_n(PX, F) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(F, f_0) \end{array}$$

e per dimostrare che p_* è un isomorfismo modulo \mathcal{C} abbiamo bisogno della successione spettrale di Serre per

$$\begin{array}{ccc} \Omega X & \hookrightarrow & (PX, F) \\ & & \downarrow \\ & & (X, A) \end{array}$$

con $E_{s,t}^2 = H_s(X, A; H_t(\Omega X))$. A questo punto usiamo il fatto che \mathcal{C} è un ideale di Serre per applicare una delle proposizioni precedenti e concludere che p_* è un isomorfismo modulo \mathcal{C} . \square

Teorema 3.2.7 (Teorema di Whitehead modulo \mathcal{C}). *Sia \mathcal{C} un ideale aciclico di Serre ed $f : X \rightarrow Y$ una mappa di spazi semplicemente connessi. Sia $n \geq 2$. Sono equivalenti i seguenti*

- $f_{\#} : \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$ è isomorfismo modulo \mathcal{C} per $i \leq n-1$, epimorfismo modulo \mathcal{C} per $i = n$;
- $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(Y)$ è isomorfismo modulo \mathcal{C} per $i \leq n-1$ ed epimorfismo per $i = n$.

Proof. Come sempre, possiamo supporre che f sia una inclusione sostituendo Y con M_f .

Abbiamo adesso il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \pi_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & \pi_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & \pi_n(Y) & \longrightarrow & \pi_n(Y, X) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \downarrow h & & \\
\dots & \longrightarrow & H_{n+1}(Y, X) & \longrightarrow & H_n(X) & \xrightarrow{f_*} & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, X) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Quindi la prima affermazione è equivalente a $\pi_i(Y, X) = 0 \pmod{\mathcal{C}}$ per $i \leq n$ e per Hurewicz questo è equivalente a $H_i(Y, X) = 0 \pmod{\mathcal{C}}$, che è equivalente alla seconda affermazione. \square

Proposizione 3.2.8. *Siano X, Y spazi topologici tali che $H_q(\bullet, \mathbb{Z}_{(p)})$ è finitamente generato per ogni q .*

Se $f : X \rightarrow Y$ è isomorfismo in $H_q(\bullet, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ per ogni q allora induce isomorfismo modulo \mathcal{C}_p in $H_q(\bullet, \mathbb{Z})$.

Proof. Ricordiamo che $A \xrightarrow{\alpha} B$ è un isomorfismo modulo \mathcal{C}_p se e solo se $A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\alpha \otimes 1} B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ è un isomorfismo: il modulo $\mathbb{Z}_{(p)}$ è piatto e dunque la successione esatta

$$0 \rightarrow \ker \alpha \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \rightarrow 0$$

implica l'esattezza di

$$0 \rightarrow \ker \alpha \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow B \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow \operatorname{coker} \alpha \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow 0$$

pertanto abbiamo isomorfismo tra i due termini centrali se e solo se $\ker \alpha, \operatorname{coker} \alpha \in \mathcal{C}_{(p)}$.

Un modulo finitamente generato su $\mathbb{Z}_{(p)}$ è il modulo banale se lo è dopo aver tensorizzato con \mathbb{F}_p . Allora mostriamo che il kernel e il cokernel di $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ sono nulli quando tensorizziamo con \mathbb{F}_p .

Sia ora Z il mapping cone di f . Sappiamo che

$$0 = \bar{H}_*(Z; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

per ipotesi e dunque $H_*(C_f, X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$.

Poiché $\mathbb{Z}_{(p)}$ è Noetheriano, le ipotesi di finito-generatezza delle omologie (a coefficienti localizzati) di X ed Y ci garantisce la finito generatezza di $H_q(Z; \mathbb{Z}_{(p)})$ per ogni q .

Dal teorema dei coefficienti universali si ha l'immersione $\bar{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) \otimes \mathbb{F}_p \hookrightarrow H_*(Z; \mathbb{F}_p)$, da cui $\bar{H}_*(Z; \mathbb{Z}_{(p)}) = 0$ pertanto $f_* \otimes 1$ è isomorfismo, che è la tesi. \square

Proposizione 3.2.9. *Siano X, Y semplicemente connessi con omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_{(p)}$ finitamente generata. Supponiamo un morfismo f induca isomorfismi tra le omologie a coefficienti in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, allora $f_{\#} : \pi_*(X) \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \rightarrow \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ è isomorfismo.*

Proof. Segue dalla proposizione precedente e dal teorema di Whitehead modulo \mathcal{C} . \square

3.3 Il teorema di Serre

Procediamo preliminarmente a calcolare l'omologia di $K(A, n)$.

Se $A \in \mathcal{C}_{tor}$ il teorema di Hurewicz modulo \mathcal{C} ci dice che anche $\bar{H}_*(K(A, n); \mathbb{Q}) = 0$.

Per $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$ abbiamo $H^*(K(\mathbb{Z}, 1), \mathbb{Q}) = \bigwedge_{\mathbb{Q}}[i_1]$ con i_1 generatore in grado 1.

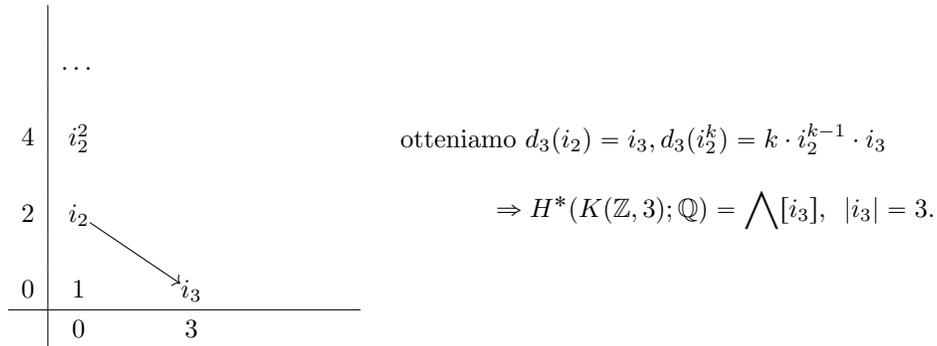
Per $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^\infty$ possiamo calcolare l'omologia come segue.

Usiamo la fibrazione $K(\mathbb{Z}, n-1) \rightarrow PK(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$ e osserviamo la successione spettrale di Serre in coomologia (per $n=2$).



da cui $H^*(K(\mathbb{Z}, 2); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[i_2]$ con i_2 di grado 2.

Procediamo adesso con lo spazio $K(\mathbb{Z}, 3)$ in maniera simile.



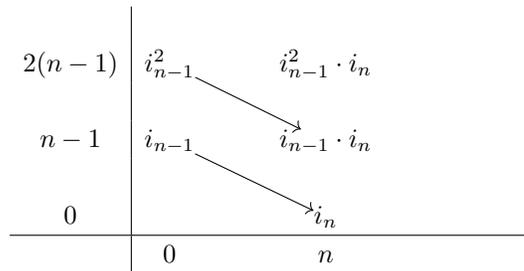
Per il caso generale di $K(\mathbb{Z}, n)$ possiamo procedere induttivamente (su n). Usando la fibrazione

$$K(\mathbb{Z}, n-1) = \Omega K(\mathbb{Z}, n) \rightarrow PK(\mathbb{Z}, n) \rightarrow K(\mathbb{Z}, n)$$

riusciamo ad ottenere (tramite successione spettrale di Serre)

$$H^*(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{Q}) = \begin{cases} \bigwedge [i_n] & \text{per } n \text{ dispari} \\ \mathbb{Q}[i_n] & \text{per } n \text{ pari} \end{cases}$$

n dispari



n pari

